求平面图形上的点加速度之双加速度瞬心法

卢其宜 *,1)　黄海啃 †

*(江西机电职业技术学院机械系，南昌 330013)　†(江西现代职业技术学院机械分院，南昌 330012)

摘要 在平面机构的运动分析中，我们经常会遇到求平面图形上点的加速度问题，通常是采用加速度基点法求加速度，该方法需要进行矢量运算，比较繁琐．提供一种利用双加速度瞬心定理求加速度的双加速度瞬心法，避免了矢量运算，只要进行代数运算．经相关题目验算表明，其计算过程比传统方法简捷．

关键词 加速度瞬心，外接圆，法向加速度瞬心，切向加速度瞬心，双加速度瞬心定理

如图 1 所示，已知平面图形上任意两点 A, B 的加速度分别为 $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$, 其延长线的交点为 P_n, 在图示瞬时，加速度瞬心为 P, 角 $\alpha = \arctan\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, 其中 ω, ε 分别为图形的角速度和角加速度，且 ε 为绝对值．由文献 [1] 提出的加速度瞬心外接圆定理可知，在任一瞬时，平面图形上任意两点的加速度矢延长线的交点与此瞬时的加速度瞬心及该两点所组成的四边形外接一个圆，即四边形 ABP_nP 外接一个圆 (该圆称为加速度瞬心外接圆)．由文献 [1] 又知，当图形的角加速度 $\varepsilon = 0$ 时，图形的加速度瞬心为加速度矢 $\bar{a}_A, \bar{a}_B$ 延长线的交点 P_n; 当图形的角速度 $\omega = 0$ 时，图形的加速度瞬心为通过 A, B 两点分别作垂直于其加速度矢的两条直线的交点 P_τ; 在一般情况下， ω, ε 均不等于零，图形的加速度瞬心为点 P, 此时 P_n, P_τ 分别称为 A, B 两点的法向加速度瞬心、切向加速度瞬心．显然，点 P_τ 也在 A, B 两点的加速度瞬心外接圆上，且 $P_\tau P_n$ 为外接圆的直径．

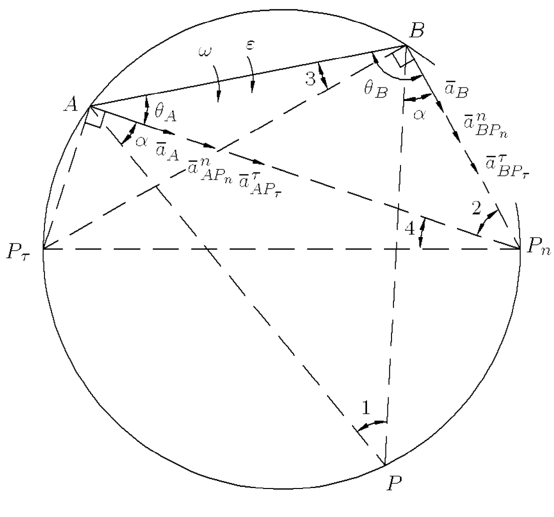

图 1

在 ΔAPB 与 ΔAP_nB 中，由正弦定理可得

$$\frac{AB}{\sin\angle 1} = \frac{AP}{\sin(\theta_B - \alpha)}, \quad \frac{AB}{\sin\angle 2} = \frac{AP_n}{\sin\theta_B}$$

由于 $\angle 1 = \angle 2$, 所以 $AP = \dfrac{AP_n}{\sin\theta_B}\cdot\sin(\theta_B - \alpha)$.

由文献 [1] 可知

$$a_A = \frac{a^n_{AP}}{\cos\alpha} = \frac{AP\cdot\omega^2}{\cos\alpha} = AP_n\cdot\omega^2 - \frac{AP_n\cdot\omega^2\cdot\tan\alpha}{\tan\theta_B}$$

$\Theta \tan\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, 所以 $\omega^2\cdot\tan\alpha = \varepsilon$. 又 $\tan\theta_B = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \angle 3\right) = -\dfrac{1}{\tan\angle 3} = -\dfrac{1}{\tan\angle 4}$, 于是得

$$a_A = AP_n\cdot\omega^2 - \frac{AP_n\cdot\varepsilon}{-1/\tan\angle 4} =$$

$$AP_n\cdot\omega^2 + AP_n\cdot\varepsilon\cdot\tan\angle 4 =$$

$$AP_n\cdot\omega^2 + AP_\tau\cdot\varepsilon = a^n_{APn} + a^\tau_{AP\tau}$$

其中 $a^n_{APn} = AP_n\cdot\omega^2$ 为 A 点相对于 A, B 两点的法向加速度瞬心 P_n 的法向加速度． $a^\tau_{AP\tau} = AP_\tau\cdot\varepsilon$ 为 A 点相对于 A, B 两点的切向加速度瞬心 P_τ 的切向加速度．

应用等式 $a_A = a^n_{APn} + a^\tau_{AP\tau}$ 时应注意，当 $\bar{a}^n_{APn}, \bar{a}^\tau_{AP\tau}$ 与 $\bar{a}_A$ 方向相同时，$a^n_{APn}, a^\tau_{AP\tau}$ 为正值；方向相反时，a^n_{APn}, $a^\tau_{AP\tau}$ 为负值．由于 $\bar{a}^n_{APn}, \bar{a}^\tau_{AP\tau}, \bar{a}_A$ 三者共线，因此计算时只要进行代数运算，避免了矢量运算，因而计算过程比传统方法更为简捷．

同理可证明： $a_B = a^n_{BPn} + a^\tau_{BP\tau}$. 于是得到下列结论：

双加速度瞬心定理：平面图形上任意两点的加速度分别等于该两点相对于它们的法向加速度瞬心的法向加速度和相对于它们的切向加速度瞬心的切向加速度代数和．

需要注意的是：平面图形在某一瞬时的加速度瞬心是唯一的，但不同两点的法向加速度瞬心和切向加速度瞬心是不同的两点，不具备唯一性．利用图形上某两点的法向加速度瞬心、切向加速度瞬心只能求该两点的加速度，不能求其它点的加速度．若要求其它点的加速度，则要重新寻找新的法向加速度瞬心、切向加速度瞬心．且这两点相对于它们的法向加速度瞬心只有法向加速度，没有切向加速度；相对于切向加速度瞬心只有切向加速度，没有法向加速度．

参考文献

1 皮亚南，卢其宜，刘燕霞．确定平面图形上加速度瞬心位置的两种方法．南昌大学学报 (工科版), 1996, 18(1): 26～30

2006–09–28 收到第 1 稿， 2007–02–09 收到修改稿．

1) E-mail: lqy1962@126.com