第 34 卷 第 3 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 34 No. 3
2011 年 5 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　May, 2011

一类二阶 n- 维中立型泛函微分系统周期解存在性问题 *

李晓静　　周友明

(江苏技术师范学院数理学院，常州 213001)

(E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn)

鲁世平

(安徽师范大学数学系，芜湖 241000)

摘　要　利用 Fourier 级数理论和重合度理论研究了一类二阶 n- 维中立型泛函微分系统

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)-Cx(t-r))+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}\,F(x(t))+\mathrm{grad}\,G(x(t-\tau(t)))=p(t)$$

的周期解问题，得到了周期解存在性的新结论，有意义的是本文的矩阵 C 仅为一般的实方阵，不必为实对称阵，因而本文的结果改进和推广了已有工作．此外，本文周期解先验界估计方法与已有工作也不同.

关键词　中立型微分系统；重合度；周期解

MR(2000) 主题分类　34C25; 34K40

中图分类　O175.14

1　引言

本文引入以下记号：$T>0$ 为常数，$I_n=\{1,2,\cdots,n\}$, 对任意 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$, $|a|=\big(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}$; $P_T=\big\{x: x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n), x(t+T)\equiv x(t)\big\}$, 其模定义为 $\|x\|_{P_T}=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$, $\forall\, x\in P_T$; $P_T^1=\{x: x\in C^1(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^n), x(t+T)\equiv x(t)\}$, 其模定义为 $\|x\|_{P_T^1}=\max\{\|x\|_{P_T},\|x'\|_{P_T}\}$, $\forall\, x\in P_T^1$; $C_T=\{x+iy: x,y\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}), x(t+T)\equiv x(t),\ y(t+T)\equiv y(t)\}$, 其模定义为 $\|\varphi\|_{C_T}=\max\limits_{t\in[0,T]}|\varphi(t)|$, $\forall\,\varphi\in C_T$; $C_T^1=\{x+iy: x,y\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}), x(t+$

本文 2007 年 7 月 18 日收到. 2008 年 5 月 12 日收到修改稿.
* 江苏省自然科学基金 (BK2009105,BK2008119), 江苏省高校自然科学基金 (09kjd110001,08kjb110011) 和江苏技术师范学院青年科研基金项目 (KYY08033) 资助项目.

$T)\equiv x(t),\ y(t+T)\equiv y(t)\}$, 其模定义为 $\|\varphi\|_{C_T^1}=\max\{\|\varphi\|_{C_T},\|\varphi'\|_{C_T}\}$, $\forall\varphi\in C_T^1$. 易得， P_T,P_T^1,C_T,C_T^1 均为 Banach 空间.

关于时滞 (或偏差变元) 的二阶微分方程的研究，已有很多结果 [1−4]. 与滞后型泛函微分方程相比，中立型泛函微分方程 (或系统) 周期解问题的研究要困难得多，因而它一直得到国内外学者的关注 [5−11], [10] 研究了系统

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)-Cx(t-\overline{\tau}))+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}\,F(x(t))+\mathrm{grad}\,G(x(t-\tau(t)))=p(t)$$

的周期解问题，其关键条件是 C 为实对称矩阵，则矩阵 C 必相似于一个对角矩阵，故线性差分算子 $\widetilde{M}:[\widetilde{M}x](t)=x(t)-Cx(t-\overline{\tau})$ 的性质较容易研究. 但在 C 仅为一般的实方阵的条件下，研究具偏差变元的二阶 n- 维中立型泛函微分系统的周期解问题，据我们所知，到目前为止还没有这方面的工作. 其主要原因是：一般的实方阵 C 并不一定相似于对角矩阵，此时，对线性差分算子 $\widetilde{M}:[\widetilde{M}x](t)=x(t)-Cx(t-\overline{\tau})$ 的性质进行研究就困难的多.

本文研究一类二阶 n- 维中立型泛函微分系统

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)-Cx(t-r))+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}\,F(x(t))+\mathrm{grad}\,G(x(t-\tau(t)))=p(t) \tag{1.1}$$

的周期解问题，其中 $x(t)\in\mathbf{R}^n$, C 为一般 n 阶实常数矩阵， $F\in C^2(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R})$, $G\in C^1(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$, $p\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n), p(t+T)\equiv p(t)$ 且 $\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t=0$, $\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),\tau(t+T)\equiv\tau(t)$, $\forall t\in[0,T]$, $r\in\mathbf{R}$ 为常数. 本文在不要求 C 为对称的条件下，首先对线性差分算子 $M:[Mx](t)=x(t)-Cx(t-r)$ 的性质进行了研究，在此基础上，利用 Mawhin 重合度拓展定理，我们得到了系统 (1.1) 存在 T- 周期解的结果. 而且方程 (1.1) 中非线性项 $\mathrm{grad}\,G(x)$ 关于 x 的增长条件比 [10] 要弱.

2　主要引理

现设

$$A_1:C_T\to C_T,\qquad [A_1x](t)=x(t)-cx(t-r),\qquad \forall\,t\in\mathbf{R},$$

其中 c 为复常数， r 为实常数，则由 [12] 易得：

引理 2.1　如果 $|c|\neq 1$, 则 A_1 存在有界连续逆 A_1^{-1} 满足

(1) 对 $\forall\,f\in C_T$, 有

$$[A_1^{-1}f](t)\equiv\begin{cases}\sum\limits_{j'\geq 0}c^{j'}f(t-j'r), & |c|<1,\\ -\sum\limits_{j'\geq 1}c^{-j'}f(t+j'r), & |c|>1;\end{cases}$$

(2) $\int_0^T|[A_1^{-1}f](t)|\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{|1-|c||}\int_0^T|f(t)|\,\mathrm{d}t,\ \forall\,f\in C_T.$

为了利用 Mawhin 重合度拓展定理，首先讨论线性算子

$$\overline{M}:P_T\longrightarrow P_T,\qquad (\overline{M}y)(t)=y(t)-By(t-r) \tag{2.1}$$

的性质. 由线性代数知识知 [13], 对实矩阵 $C=(a_{ij})_{n\times n}$, 一定存在 n 阶可逆实矩阵 U, 使得

$$UCU^{-1}=B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{21} & \cdots & B_{22} \end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{2.2}$$

这里, B_{12},B_{21} 分别为 $\alpha\times(n-\alpha)$ 阶和 $(n-\alpha)\times\alpha$ 阶零矩阵,

$$B_{11}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \delta_{\alpha-1} \\ & & & \lambda_\alpha \end{pmatrix}_{\alpha\times\alpha},$$

其中 $\lambda_i(i\in I_\alpha)$ 为矩阵 C 的实特征根, δ_i $(i\in I_{\alpha-1})$ 为 0 或 1, 而 B_{22} 是通过将矩阵 $\overline{B}(\mu_j,\overline{\mu}_j)(j\in I_s)$ 放在对角线上构成的, 其中 $\mu_j=\alpha_j+i\beta_j(j\in I_s)$ 为矩阵 C 的 m_j 重复特征根, $\beta_j>0$, $\overline{\mu}_j$ 为 μ_j 的共轭复特征根, 且 $\alpha+2\sum\limits_{j=1}^{s}m_j=n$. 对每一个 $\overline{B}(\mu_j,\overline{\mu}_j)$ $(j\in I_s)$, 我们用整数偶 $\{(m_{j1},k_{j1}),\cdots,(m_{jp_j},k_{jp_j})\}$ 来刻划, 其中 $m_{j1}>\cdots>m_{jp_j}\geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{p_j}m_{ji}k_{ji}=2m_j=\mu_j$ 或 $\overline{\mu}_j$ 的重数的两倍, 即, $\overline{B}(\mu_j,\overline{\mu}_j)$ 是通过把实的 Jordan 矩阵 $J_{2m_{ji}}(\alpha_j,\beta_j)(i\in I_{p_j})$ 放置在对角线上而构成的, 而 k_{ji} $(i\in I_{p_j})$ 表示 $J_{2m_{ji}}(\alpha_j,\beta_j)$ 在对角线上出现的次数, 其中

$$J_{2m_{ji}}(\alpha_j,\beta_j)=\begin{pmatrix} J_{m_{ji}}(\alpha_j) & -\beta_jE_{m_{ji}} \\ \beta_jE_{m_{ji}} & J_{m_{ji}}(\alpha_j) \end{pmatrix}_{2m_{ji}\times 2m_{ji}},$$

这里, $E_{m_{ji}}$ 为 m_{ji} 阶单位矩阵及

$$J_{m_{ji}}(\alpha_j)=\begin{pmatrix} \alpha_j & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_j \end{pmatrix}_{m_{ji}\times m_{ji}}.$$

为方便起见, 我们约定 $\prod\limits_{d=k}^{k-1}b_d=1$, $\sum\limits_{k=1}^{0}\overline{b}_k=0$ 且

$$A=\sqrt{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\prod\limits_{d=1}^{k}\delta_{i-d}}{\prod\limits_{l=0}^{k}|1-|\lambda_{i-l}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

$$\overline{A}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{p_j}k_{ji}\sqrt{m_{ji}}\left[\sum_{\overline{j}=1}^{m_{ji}}\left(\frac{1}{|1-|\xi_j||}+\sum_{k=1}^{\overline{j}-1}\frac{1}{|1-|\xi_j||^{k+1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

引理 2.2 设 $B,\lambda_i\ (i\in I_\alpha)$，$\delta_i\ (i\in I_{\alpha-1})$，$\mu_j,\overline{\mu}_j,m_j,\alpha_j,\beta_j(j\in I_s)$ 如 (2.2) 式中所定义，$A,\overline{A}$ 分别由 (2.3), (2.4) 所定义. 如果 $|\lambda_i|\neq 1$, $\forall\, i\in I_\alpha$，$|\xi_j|=\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\neq 1$, $\forall\, j\in I_s$，则 $\overline{M}$ 存在唯一逆 $\overline{M}^{-1}$ 满足

(1) $\|\overline{M}^{-1}z\|_{P_T}\le (A+\overline{A})\|z\|_{P_T}$, $\forall\, z\in P_T$;

(2) $\int_0^T|(\overline{M}^{-1}z)(t)|\,\mathrm{d}t\le (A+\overline{A})\int_0^T|z(t)|\,\mathrm{d}t$, $\forall\, z\in P_T$;

(3) 如果 $\overline{M}x\in P_T^2:=\{x:\ x\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^n),x(t+T)\equiv x(t)\}$, 则 $x\in P_T^2$, 且对 $\forall\, t\in[0,T]$，$(\overline{M}x'')(t)=(\overline{M}x)''(t)$，$(\overline{M}^{-1}x'')(t)=(\overline{M}^{-1}x)''(t)$.

证　先证情形 (1). $\forall\, z\in P_T$, 令 $\overline{M}y=z$. 一方面，$y_i(t)\ (i\in I_\alpha)$ 可由矩阵 B_{11} 及 $z_i(t)\ (i\in I_\alpha)$ 唯一确定，事实上，$y_i(t)\ (i\in I_\alpha)$ 满足

$$\begin{cases} y_i(t)-\lambda_i y_i(t-r)-\delta_i y_{i+1}(t-r)=z_i(t), & i\in I_{\alpha-1},\\ y_\alpha(t)-\lambda_\alpha y_\alpha(t-r)=z_\alpha(t). \end{cases}\tag{2.5}$$

由 (2.5) 的第 α 个方程，并利用引理 2.1 的结论 (1) 得

$$y_\alpha(t)\equiv\begin{cases} \sum\limits_{j'\ge 0}\lambda_\alpha^{j'}z_\alpha(t-j'r), & |\lambda_\alpha|<1,\\ -\sum\limits_{j'\ge 1}\lambda_\alpha^{-j'}z_\alpha(t+j'r), & |\lambda_\alpha|>1; \end{cases}\tag{2.6}$$

再由 (2.5) 的第 $i\ (i\in I_{\alpha-1})$ 个方程，并利用引理 2.1 的结论 (1) 得，对任意的 $i\in I_{\alpha-1}$，有

$$y_i(t)\equiv\begin{cases} \sum\limits_{j'\ge 0}\lambda_i^{j'}z_i(t-j'r)+\sum\limits_{j'\ge 0}\lambda_i^{j'}\delta_i y_{i+1}(t-(j'+1)r), & |\lambda_i|<1,\\ -\sum\limits_{j'\ge 1}\lambda_i^{-j'}z_i(t+j'r)-\sum\limits_{j'\ge 1}\lambda_i^{-j'}\delta_i y_{i+1}(t+(j'-1)r), & |\lambda_i|>1. \end{cases}\tag{2.7}$$

从 (2.6) 和 (2.7) 及 $\prod\limits_{d=k}^{k-1}b_d=1$ 不难发现

$$\max_{t\in[0,T]}|y_i(t)|\le\sum_{k=i}^{\alpha}\frac{\prod\limits_{d=i}^{k-1}\delta_d\max\limits_{t\in[0,T]}|z_k(t)|}{\prod\limits_{l=i}^{k}|1-|\lambda_l||},\qquad i\in I_\alpha,$$

于是，由 $\sum\limits_{k=1}^{0}\overline{b}_k=0$ 及柯西不等式，我们有

$$\begin{aligned} &\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{\alpha}|y_i(t)|^2\right)^{\frac12}\le\sum_{i=1}^{\alpha}\max_{t\in[0,T]}|y_i(t)|\\ \le&\left(\sum_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\prod\limits_{d=1}^{k}\delta_{i-d}}{\prod\limits_{l=0}^{k}|1-|\lambda_{i-l}||}\right)^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{\alpha}\left(\max_{t\in[0,T]}|z_i(t)|\right)^2\right)^{\frac12} \end{aligned}$$

$$\le\sqrt{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\prod\limits_{d=1}^{k}\delta_{i-d}}{\prod\limits_{l=0}^{k}|1-|\lambda_{i-l}||}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{\alpha}|z_i(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=A\|z\|_{P_T}. \tag{2.8}$$

另一方面，类似于 $y_i(t)(i\in I_\alpha)$ 的讨论， $y_{\alpha+1}(t),\cdots,y_n(t)$ 可由实的 Jordan 矩阵 $J_{2m_{ji}}(\alpha_j,\beta_j)$ $(j\in I_s,\ i\in I_{p_j})$ 和 $z_{\alpha+1}(t),\cdots,z_n(t)$ 分块唯一确定, 我们仅以矩阵 B_{22} 对角线上的第一个实的 Jordan 矩阵为例，即 $y_{\alpha+i}(t)$ $(i\in I_{2m_{11}})$ 由 Jordan 矩阵 $J_{2m_{11}}(\alpha_1,\beta_1)$ 和 $z_{\alpha+i}(t)$ $(i\in I_{2m_{11}})$ 唯一确定，其余类似可证．为此，对于 $\overline{j}\in I_{m_{11}}$, 我们引入复数：$Y_{\alpha+\overline{j}}(t)=y_{\alpha+\overline{j}}(t)+iy_{\alpha+\overline{j}+m_{11}}(t)$, $Z_{\alpha+\overline{j}}(t)=z_{\alpha+\overline{j}}(t)+iz_{\alpha+\overline{j}+m_{11}}(t)$, $\xi_1=\alpha_1+i\beta_1$, 则

$$\begin{cases} Y_{\alpha+i}(t)-\xi_1Y_{\alpha+i}(t-r)-Y_{\alpha+i+1}(t-r)=Z_{\alpha+i}(t), & i\in I_{m_{11}-1},\\ Y_{\alpha+m_{11}}(t)-\xi_1Y_{\alpha+m_{11}}(t-r)=Z_{\alpha+m_{11}}(t).. \end{cases}$$

由 (2.8) 式可得

$$\sum_{\overline{j}=1}^{m_{11}}\max_{t\in[0,T]}|Y_{\alpha+\overline{j}}(t)|$$
$$\le\sqrt{m_{11}}\left(\sum_{\overline{j}=1}^{m_{11}}\left(\frac{1}{|1-|\xi_1||}+\sum_{k=1}^{\overline{j}-1}\frac{1}{|1-|\xi_1||^{k+1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{\overline{j}=1}^{m_{11}}|Z_{\alpha+\overline{j}}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

从而,

$$(y_{\alpha+\overline{j}}(t),y_{\alpha+\overline{j}+m_{11}}(t))^\top=(\mathrm{Re}\,Y_{\alpha+\overline{j}}(t),\mathrm{Im}\,Y_{\alpha+\overline{j}}(t))^\top,\qquad\forall\overline{j}\in I_{m_{11}},$$

由此及 (2.9) 式得

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{2m_{11}}|y_{\alpha+i}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{\overline{j}=1}^{m_{11}}\max_{t\in[0,T]}|Y_{\alpha+\overline{j}}(t)|$$
$$\le\sqrt{m_{11}}\left(\sum_{\overline{j}=1}^{m_{11}}\left(\frac{1}{|1-|\xi_1||}+\sum_{k=1}^{\overline{j}-1}\frac{1}{|1-|\xi_1||^{k+1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\|z\|_{P_T}. \tag{2.10}$$

由上面讨论可知 $\overline{M}^{-1}$ 存在且唯一，结合 (2.8) 和 (2.10), 我们有

$$\|\overline{M}^{-1}z\|_{P_T}=\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{1}{|1-|\lambda_i||}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\prod\limits_{d=1}^{k}\delta_{i-d}}{\prod\limits_{l=0}^{k}|1-|\lambda_{i-l}||}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\|z\|_{P_T}$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{p_j}k_{ji}\sqrt{m_{ji}}\left[\sum_{\overline{j}=1}^{m_{ji}}\left(\frac{1}{|1-|\xi_j||}+\sum_{k=1}^{\overline{j}-1}\frac{1}{|1-|\xi_j||^{k+1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\|z\|_{P_T},$$

结合 $A,\overline{A}$ 的定义，我们有

$$\|\overline{M}^{-1}z\|_{P_T}\leq (A+\overline{A})\|z\|_{P_T},$$

因而，

$$\|\overline{M}^{-1}\|_{P_T}\leq A+\overline{A}. \tag{2.11}$$

类似可证结论 (2), 结论 (3) 可由 (2.11) 直接得到.

下面利用引理 2.2 进一步讨论线性算子

$$M: P_T\longrightarrow P_T,\qquad (Mx)(t)=x(t)-Cx(t-r) \tag{2.12}$$

的性质，为此对任意的 $\omega\in P_T$, 考虑算子方程 $Mx=\omega$, 即

$$x(t)-Cx(t-r)=\omega(t),\qquad \forall\, t\in\mathbf{R}$$

解的存在性及其解的性质．事实上，令 $x(t)=U^{-1}y(t)$, 其中 U 由前面所定义，即 U 为可逆矩阵且满足 $UCU^{-1}=B$, 则算子方程 $Mx=\omega$ 改写为

$$y(t)-By(t-r)=U\omega(t),\qquad \forall\, t\in\mathbf{R}. \tag{2.13}$$

利用引理 2.2 可得下面结果：

引理 2.3 设 $B,\lambda_i\ (i\in I_\alpha)$, $\delta_i\ (i\in I_{\alpha-1})$, $\mu_j,\overline{\mu}_j,m_j,\alpha_j,\beta_j\ (j\in I_s)$ 如 (2.2) 式中所定义，$A,\overline{A}$ 分别由 (2.3), (2.4) 所定义. 如果 $|\lambda_i|\neq 1$, $\forall\, i\in I_\alpha$, $|\xi_j|=\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\neq 1$, $\forall\, j\in I_s$, σ_0,σ_1 分别为正定对称矩阵 $U^\top U$ 的最小和最大特征植，则 M 存在唯一逆 M^{-1} 满足

(1) $\|M^{-1}\omega\|_{P_T}\leq(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}(A+\overline{A})\|\omega\|_{P_T}$, $\forall\,\omega\in P_T$;

(2) $\int_0^T|(M^{-1}\omega)(t)|\,\mathrm{d}t\leq(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}(A+\overline{A})\int_0^T|\omega(t)|\,\mathrm{d}t$, $\forall\,\omega\in P_T$;

(3) 如果 $Mx\in P_T^2:=\{x: x\in C^2(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^n), x(t+T)\equiv x(t)\}$, 则 $x\in P_T^2$, 且对 $\forall\, t\in[0,T]$, $(Mx'')(t)=(Mx)''(t)$, $(M^{-1}x'')(t)=(M^{-1}x)''(t)$.

证　由 (2.13), 并利用引理 2.2 的结论 (1) 得 $y(t)=(\overline{M}^{-1}U\omega)(t)$, 其中 $\overline{M}$ 由 (2.1) 式所定义．于是线性算子 M 存在唯一逆 M^{-1}, 且表示为

$$(M^{-1}\omega)(t)=x(t)=U^{-1}(\overline{M}^{-1}U\omega)(t),\qquad \forall\, t\in\mathbf{R}. \tag{2.14}$$

下证情形 (1). 由 (2.14), 并利用引理 2.2 的结论 (1) 和两矩阵 $UU^\top$, $U^\top U$ 具有相同的特征值得，对 $\forall t\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}|(M^{-1}\omega)(t)|^2 =&[U^{-1}(\overline{M}^{-1}U\omega)(t)]^\top[U^{-1}(\overline{M}^{-1}U\omega)(t)]\\ =&[(\overline{M}^{-1}U\omega)(t)]^\top(UU^\top)^{-1}[(\overline{M}^{-1}U\omega)(t)]\\ \le&\sigma_0^{-1}|(\overline{M}^{-1}U\omega)(t)|^2\\ \le&\sigma_0^{-1}(A+\overline{A})^2(\omega(t))^\top U^\top U\omega(t)\\ \le&\sigma_1\sigma_0^{-1}(A+\overline{A})^2\|\omega\|^2,\end{aligned}$$

由此得

$$\|M^{-1}\omega\|_{P_T}\le(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac12}(A+\overline{A})\|\omega\|_{P_T}.$$

类似可证明结论 (2) 和结论 (3).

注 2.1 如果 C 为 n 阶实对称矩阵, 则可取 U 为正交矩阵, 使得 $UCU^{-1}=UCU^\top=B=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\lambda_i\ (i\in I_n)$ 为实常数. 于是由引理 2.3 可得 [10] 中的引理 2, 故引理 2.3 推广了 [10] 相应的结果. .

引理 2.4 设 $x\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$, 并且存在常数 $T>0$, 使得 $x(t+T)\equiv x(t)$, 则

$$\|x'\|_{P_T}\le\frac{\sqrt{n}}{2}\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{2.15}$$

证 对任意的 $j\in I_n$, 因为 $x_j''(t)$ 为 T- 周期函数，所以 $x_j''(t)$ 的 Fourier 级数为

$$x_j''(t)=\sum_{k\in Z,\,k\ne0}a_{jk}e^{i\frac{2k\pi}{T}t},$$

其中

$$a_{jk}=\frac1T\int_0^T x_j''(r)e^{-i\frac{2k\pi}{T}r}\,\mathrm{d}r. \tag{2.16}$$

于是，我们有

$$x_j'(t)=\sum_{k\in Z,\,k\ne0}\frac{a_{jk}}{i\frac{2k\pi}{T}}e^{i\frac{2k\pi}{T}t}. \tag{2.17}$$

另一方面，我们定义 T- 周期函数 $h(t)$ 在 $[0,T]$ 为

$$h(t)=\begin{cases}T/2-t, & 0<t<T,\\ 0, & t=0,T,\end{cases}$$

则 $h(t)$ 的 Fourier 展开式为

$$h(t)=\sum_{k\in Z,k\ne0}\frac{1}{\frac{2k\pi}{T}i}e^{i\frac{2k\pi}{T}t},\qquad t\in\mathbf{R}. \tag{2.18}$$

于是由 (2.16)–(2.18) 可得

$$x_j'(t)=\frac{1}{T}\sum_{k\in Z,k\neq 0}\frac{e^{i\frac{2k\pi}{T}t}}{\frac{2k\pi}{T}i}\int_0^T x_j''(r)e^{-i\frac{2k\pi}{T}r}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{T}\int_0^T h(t-r)x_j''(r)\,\mathrm{d}r,$$

因而

$$|x_j'|_0\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T|x_j''(r)|\,\mathrm{d}r,\qquad\forall j\in I_n,$$

从而 (2.15) 式成立.

引理 2.5[14] (Mawhin 重合度拓展定理) 设 X,Y 是 Banach 空间，$L:D(L)\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子，$\Omega\subset X$ 是有界开集，且 $N:\overline{\Omega}\to Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的，如果

(1) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$, 方程 $Lx=\lambda Nx$ 的解 $x\notin\partial\Omega$;

(2) 对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\ker L$, $QNx\neq 0$;

(3) $\deg\{JQN,\Omega\cap\ker L,0\}\neq 0$,

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}$ 中至少存在一个解.

3　主要结果

定理 3.1 如果存在常数 $\rho>0$, 使得下列条件满足

(A_1) 对任意 $i\in I_n$, $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ 在集合 $\Delta_1=\{x:x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,x_i\in(-\infty,\rho],\ x_j\in\mathbf{R},\ \forall j\in I_n-\{i\}\}$ 或在集合 $\Delta_2=\{x:x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\ x_i\in[-\rho,\infty),\ x_j\in\mathbf{R},\ \forall j\in I_n-\{i\}\}$ 上满足

$$\Big|\frac{\partial G}{\partial x_i}\Big|\le r_i|x|+\rho_i,$$

其中 $r_i\ge 0$, $\rho_i>0$ $(i\in I_n)$ 为常数;

(A_2) 对任意的 $i\in I_n$, 当 $|x_i|>\rho$ 时，$x_i\frac{\partial G}{\partial x_i}>0$ 或 $x_i\frac{\partial G}{\partial x_i}<0$;

(A_3) 存在可逆矩阵 U 使得 $UCU^{-1}=B$, 其中 $B,\lambda_i\ (i\in I_\alpha),\delta_i\ (i\in I_{\alpha-1})$, $\mu_j,\overline{\mu}_j,m_j$, α_j, $\beta_j\ (j\in I_s)$ 如 (2.2) 式中所定义;

(A_4) 设 μ_1,μ_2 为矩阵 $\frac{\partial^2F(x)}{\partial x^2}$ 的特征值，$x\in\mathbf{R}^n$, 且 $\max\{|\mu_1|,|\mu_2|\}=\sigma$,

则当 $(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}(A+\overline{A})\big[\sigma T\sqrt{n}+2T^2n(\sum\limits_{i=1}^n r_i)\big]<2$ 时，系统 (1.1) 存在 T- 周期解，其中 $A,\overline{A}$ 由 (2.3), (2.4) 所定义，σ_1,σ_0 为引理 2.3 所定义的常数，即 σ_1,σ_0 分别为正定对称矩阵 $U^\top U$ 的最大和最小特征值.

注 3.1 类似于 [10], 条件 (A_2) 中，当 $|x_i|>\rho$ 时，对不同的 $i\in I_n$ 允许 $\operatorname{sgn}x_i\frac{\partial G}{\partial x_i}$ 不同.

证　令

$$L:D(L)\subset P_T^1\longrightarrow P_T,\qquad Lx=(Mx)'',$$

其中 M 由 (2.12) 所定义，$D(L)=\big\{x\mid x\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^n),x(t+T)\equiv x(t)\big\}$. 由引理 2.3 得，$\ker L=\mathbf{R}^n$, $I_mL=\big\{x\mid x\in P_T,\ \int_0^T x(s)\,\mathrm{d}s=0\big\}$, 因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子.

令投影算子 P,Q 分别为：

$$P:P_T^1\to\ker L,\qquad [Px](t)=(Mx)(0)=(Mx)(T),\qquad \forall\, t\in[0,T],$$
$$Q:P_T\to\frac{P_T}{I_mL},\qquad [Qy](t)=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \forall\, t\in[0,T],$$

则 $I_mP=\ker L$, $\ker\ Q=I_mL$. 令 $L_P=L|_{D(L)\cap\ker P}$, $L_P^{-1}:\operatorname{Im}L\to D(L)\cap\ker P$ 表示 L_P 的右逆，则

$$[L_P^{-1}y](t)=M^{-1}\Big(-\frac{t}{T}\int_0^T(T-s)y(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s\Big)\in D(L). \tag{3.1}$$

再设

$$N:P_T^1\longrightarrow P_T,\qquad [Nx](t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}\,F(x(t))-\mathrm{grad}\,G(x(t-\tau(t)))+p(t),$$

则方程 (1.1) 可化为算子方程 $Lx=Nx$. 由 (3.1) 式和引理 2.3 易证 N 在 $\overline{\Omega}$ 是 L- 紧的，其中 Ω 为 P_T^1 中的任意有界开集. 记 $\Omega_1=\{x:x\in D(L)\subset P_T^1,\ Lx=\lambda Nx,\ \lambda\in(0,1)\}$, $\forall\, x\in\Omega_1$, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)-Cx(t-r))+\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}\,F(x(t))+\lambda\mathrm{grad}\,G(x(t-\tau(t)))=\lambda p(t), \tag{3.2}$$

将方程 (3.2) 两边分别在 [0, T] 上积分得 $\int_0^T\mathrm{grad}\,G(x(t-\tau(t)))\,\mathrm{d}t=0$, 即，对任意 $i\in I_n$, 有

$$\int_0^T\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\,\mathrm{d}t=0. \tag{3.3}$$

由假设 (A_2) 可见，不妨设

$$x_i\frac{\partial G}{\partial x_i}>0,\qquad \forall\,|x_i|>\rho. \tag{3.4}$$

令 $E=\{t:t\in[0,T],\ x_i(t-\tau(t))\le\rho\}$, $E_1=\{t:t\in[0,T],x_i(t-\tau(t))>\rho\}$, 则由 (3.3) 得

$$\int_{E_1}\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\,\mathrm{d}t=-\int_E\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\,\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

再由假设 (A_1) 可见，不妨设 $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ 在 Δ_1 上满足

$$\Big|\frac{\partial G}{\partial x_i}\Big|\le r_i|x|+\rho_i. \tag{3.6}$$

故由 (3.4)–(3.6) 得

$$\int_{E_1}\Big|\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\Big|\,\mathrm{d}t=\int_{E_1}\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\,\mathrm{d}t$$
$$\le\int_E\Big|\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\Big|\,\mathrm{d}t\le r_iT\|x\|+\rho_iT,$$

因此

$$\int_0^T \Big|\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\Big| \mathrm{d}t \le \Big(\int_E + \int_{E_1}\Big) \Big|\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\Big| \mathrm{d}t \le 2r_iT\|x\| + 2\rho_iT,$$

即

$$\begin{aligned}&\int_0^T |\mathrm{grad}\, G(x(t-\tau(t)))|\, \mathrm{d}t = \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\ \le &\int_0^T \Big(\sum_{i=1}^n \Big|\frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i}\Big|\Big) \mathrm{d}t \le 2T\Big(\sum_{i=1}^n r_i\Big)\|x\| + 2T\Big(\sum_{i=1}^n \rho_i\Big).\end{aligned} \tag{3.7}$$

下面证明：对任意的 $i \in I_n$, 一定存在 $t_1 \in \mathbf{R}$, 使得

$$|x_i(t_1)| \le \rho. \tag{3.8}$$

事实上, 如果对一切 $t \in [0,T]$, 均有 $x_i(t-\tau(t)) > \rho$, 则由 (3.4) 得到 $\int_0^T \frac{\partial G(x(t-\tau(t)))}{\partial x_i} \mathrm{d}t > 0$, 这与 (3.3) 矛盾，故一定存在 $\xi \in [0,T]$, 使得

$$x_i(\xi - \tau(\xi)) \le \rho, \tag{3.9}$$

类似可得存在 $\eta \in [0,T]$, 使得

$$x_i(\eta - \tau(\eta)) \ge -\rho, \tag{3.10}$$

(1) 如果 $x_i(\xi-\tau(\xi)) \le -\rho$, 由 (3.10), 并利用连续函数介值性定理得到一定存在介于 $\xi-\tau(\xi)$ 与 $\eta-\tau(\eta)$ 之间的某个 t_1, 使得 $x_i(t_1) = -\rho$.

(2) 如果 $x_i(\xi-\tau(\xi)) \ge -\rho$, 则由 (3.9) 得 $|x_i(\xi-\tau(\xi))| \le \rho$, 此时取 $t_1 = \xi-\tau(\xi)$, 故不论何种情况 (3.8) 都正确.

记 $t_1 = kT + t_2$, 其中 k 为整数， $t_2 \in [0,T]$, 则 $|x_i(t_2)| = |x_i(t_1)| \le \rho$, 因此 $\forall\, t \in [0,T]$, 有 $|x_i(t)| \le \rho + \int_0^T |x_i^{'}(s)|\, \mathrm{d}s$. 由此得

$$\|x\|_{p_T} \le \sum_{i=1}^n \Big(\max_{t\in[0,T]} |x_i(t)|\Big) \le n\rho + \sqrt{n}\int_0^T |x^{'}(s)|\, \mathrm{d}s. \tag{3.11}$$

由 (3.2) 得

$$\begin{aligned}&\int_0^T \big|[Mx]''(t)\big|\, \mathrm{d}t \\ \le &\int_0^T \Big|\frac{\partial^2 F(x(t))}{\partial x^2} x^{'}(t)\Big| \mathrm{d}t + \int_0^T \big|\mathrm{grad}\, G(x(t-\tau(t)))\big|\, \mathrm{d}t + \int_0^T |p(t)|\, \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.12}$$

由条件 (A_4) 知

$$\int_0^T \Big|\frac{\partial^2 F(x(t))}{\partial x^2} x^{'}(t)\Big| \mathrm{d}t \le \sigma \int_0^T |x^{'}(t)|\, \mathrm{d}t. \tag{3.13}$$

由引理 2.4 可知,

$$\|x^{'}\|_{P_T} \le \frac{\sqrt{n}}{2}\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{3.14}$$

将 (3.7), (3.11), (3.13) 和 (3.14) 代入 (3.12) 得

$$\begin{aligned}\int_0^T |[Mx]''(t)|\,\mathrm{d}t \le &\frac{\sigma T\sqrt{n}+2T^2n(\sum\limits_{i=1}^n r_i)}{2}\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t\\ &+2n\Big(\sum_{i=1}^n r_i\Big)T\rho+2\Big(\sum_{i=1}^n \rho_i\Big)T+\int_0^T|p(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.15}$$

利用引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^T \big|M^{-1}[Mx''](t)\big|\,\mathrm{d}t\\ =&\int_0^T |M^{-1}[Mx]''(t)|\,\mathrm{d}t \le (\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}(A+\overline{A})\int_0^T |[Mx]''(t)|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

将 (3.15) 代入得

$$\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{2(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}(A+\overline{A})[2n(\sum\limits_{i=1}^n r_i)T\rho+2(\sum\limits_{i=1}^n\rho_i)T+\int_0^T|p(t)|\,\mathrm{d}t]}{2-(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}(A+\overline{A})[\sigma T\sqrt{n}+2T^2n(\sum\limits_{i=1}^n r_i)]}:=R,$$

结合 (3.14) 得

$$\|x'\|_{P_T} \le \frac{\sqrt{n}}{2}\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{\sqrt{n}}{2}R:=R_1. \tag{3.16}$$

将其代入 (3.11) 得

$$\|x\|_{P_T} \le n\rho+\sqrt{n}TR_1:=R_0. \tag{3.17}$$

取 $\Omega=\{x: x\in P_T^1,\ \|x\|_{P_T}<R_0+\rho,\ \|x'\|_{P_T}<R_1+\rho\}$, 则 $\Omega_1\subset\Omega$, 且由假设 (A_2) 易证对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\ker L$, $QNx\ne 0$, 结合 (3.16),(3.17) 可知引理 2.5 的前两个条件都满足. 现对 $\forall\, v\in\partial\Omega\cap\ker L$, 则 $v(t)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^\top$ 为常向量, 因而

$$QNv=-\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{grad} G(v(t-\tau(t)))\,\mathrm{d}t=-\operatorname{grad} G(v).$$

由于当 $|v_i|>\rho$ 时, $\operatorname{sgn}\ v_i\frac{\partial G(v)}{\partial v_i}=(-1)^{s_i},\ s_i\in\{0,1\}$, 令映射:

$$H:[0,1]\times(\partial\Omega\cap\ker L)\longrightarrow P_T^1,\qquad H(\mu,x)=-\mu\widetilde{A}x+(1-\mu)\operatorname{grad} G(x),$$

其中 $\widetilde{A}=\operatorname{diag}\{(-1)^{s_1},\ (-1)^{s_2},\cdots,(-1)^{s_n}\}$, 易证当 $x^0\in\partial\Omega\cap\ker L$ 时, 至少有一 $i\in I_n$, 使得 $|x_i^0|>\rho$, 故有

$$H(\mu,x)=-\mu\widetilde{A}x-(1-\mu)\operatorname{grad} G(x)\ne 0,\qquad (\mu,x)\in[0,1]\times(\partial\Omega\cap\ker L),$$

另外取 $J: I_mQ \to \ker L$ 为恒同映射，于是

$$\begin{aligned}&\deg\{JQN, \Omega\cap\ker L, 0\} = \deg\{H(0,\cdot), \Omega\cap\ker L, 0\}\\ =&\deg\{H(1,\cdot), \Omega\cap\ker L, 0\} = \deg\{-\widetilde{A}, \Omega\cap\ker L, 0\} \neq 0.\end{aligned}$$

因而由引理 2.5 得系统 (1.1) 至少有一 T- 周期解.

推论 3.1 设 C 为实对称矩阵，$\lambda_i\ (i\in I_n)$ 为其特征值，且 $|\lambda_i|\neq 1\ (i\in I_n)$. 如果定理 3.1 中 (A_1), (A_2) 和 (A_4) 成立，则当 $(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac12}\big(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{|1-|\lambda_i||^2}\big)^{\frac12}\big[\sigma T\sqrt{n}+2T^2n(\sum\limits_{i=1}^{n}r_i)\big]<2$, 系统 (1.1) 存在 T- 周期解.

下面举例说明定理 3.1 的应用

例 考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)-Cx(t-4))+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{grad}F(x(t))+\operatorname{grad}G(x(t-\tau(t)))=p(t), \tag{3.18}$$

其中 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^\top$,

$$C=\begin{pmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{pmatrix},\qquad F(x)=\frac{1}{2\pi^6}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3),$$

$$G(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^6}\Big(x_1^2-x_2^2-x_3^2+\frac{1}{2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\Big),$$

$$p(t)=(\sin t,\cos t,\sin t)^\top.$$

易见，

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}G(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^6}\Big(&2x_1-\frac{2x_1}{(2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2},-2x_2-\frac{2x_2}{(2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2},\\&-2x_3-\frac{2x_3}{(2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2}\Big)^\top,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2F(v)}{\partial v^2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\pi^6}&\frac{1}{\pi^6}&\frac{1}{\pi^6}\\ \frac{1}{\pi^6}&\frac{1}{\pi^6}&\frac{1}{\pi^6}\\ \frac{1}{\pi^6}&\frac{1}{\pi^6}&\frac{1}{\pi^6}\end{pmatrix}.$$

通过计算不难发现 $\frac{\partial^2F(v)}{\partial v^2}$ 特征值的绝对值的最大值为 $\frac{3}{\pi^6}$, 当 $|x_1|>2$ 时，$x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}>0$, 当 $|x_2|>2$ 时，$x_2\frac{\partial G}{\partial x_2}<0$, 当 $|x_3|>2$ 时，$x_3\frac{\partial G}{\partial x_3}<0$, 且当 $x_i\in(-\infty,2]$ 时，$|\frac{\partial G}{\partial x_i}|\leq\frac{1}{\sqrt{2}\pi^6}|x|+\frac{1}{\sqrt{2}\pi^6}$，$i=\{1,2,3\}$, 故相应于定理 3.1, 我们可取 $\sigma=\frac{3}{\pi^6}$，$r_1=r_2=r_3=\rho_1=\rho_2=\rho_3=\frac{1}{\sqrt{2}\pi^6}, \rho=2$, 使得定理 3.1 中条件 (A_1), (A_2) 和 (A_4) 均满足. 此外，由线性代数知识不难发现可取

$$U=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-\frac{2\sqrt{14}}{7}&-\frac{4\sqrt{14}}{7}&\frac{\sqrt{14}}{7}\\-1&1&2\end{pmatrix},$$

使得

$$UCU^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{14} \\ 0 & \sqrt{14} & 0 \end{pmatrix},$$

于是条件 (A_3) 也满足，且矩阵 $U^{\top}U$ 特征值为 $\upsilon_{1,2}=6$, $\upsilon_3=14$. 即 $\sigma_0^{-1}=\frac{1}{6}$, $\sigma_1=14$, $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=\pm i\sqrt{14}$. 同时,

$$(\sigma_1\sigma_0^{-1})^{\frac{1}{2}}(A+\overline{A})\Big[\sigma T\sqrt{n}+2T^2n\Big(\sum_{i=1}^{n}r_i\Big)\Big]<2.$$

利用定理 3.1 可得系统 (3.18) 存在 2π- 周期解.

注 3.2 上例中矩阵 C 不是对称的，故不能用 [10] 的结果研究上例问题，结合推论 3.1 易见，本文的结果推广和改进了 [10] 的相应工作. 此外, [10] 要求对任意的 $i\in I_n$, $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ 在集合 $\triangle_1$ 或者 $\triangle_2$ 上有界，因而本文的假设 (A_1) 比 [10] 相应的条件要弱，所以本文的结果是新的.

参 考 文 献

[1] 鲁世平, 葛渭高. 一类具偏差变元的二阶微分方程的周期解存在性问题. 数学学报, 2002, 45(4): 811–818 (Lu Shiping, Ge Weigao. Periodic Solutions of the Second Order Differential Equation with Deviating Arguments. *Acta Math. Sinica, Chinese Series*, 2002, 45(4): 811–818)

[2] 鲁世平，葛渭高，郑祖庥. 具偏差变元的 Rayleigh 方程周期解问题. 数学学报, 2004, 47(2): 299–304 (Lu Shiping, Ge Weigao, Zheng Zuxiu. Periodic Solutions for a Kind of Rayleigh Equation with a Deviating Argument. *Acta Math. Sinica* (Chinese Series), 2004, 47(2): 299–304)

[3] 任景莉，葛渭高. 一类二阶泛函微分方程周期解存在性问题. 数学学报, 2004, 47(3): 569–578 (Ren Jingli, Ge Weigao. On the Existence of Periodic Solutions for the Second Order Functional Differential Equation. *Acta Math. Sinica, Chinese Series*, 2004, 47(3): 569–578)

[4] Lu Shiping, Ge Weigao. Periodic Solutions for a Kind of Liénard Equation with a Deviating Argument. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, 289(1): 231–243

[5] Fan Meng, Wang Ke. Periodic Solutions of Convex Neutral Functional Differential Equations. *Tohoku Math. J.*, 2000, 52: 47–59

[6] 王根强，燕居让. 二阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性. 数学学报, 2004, 47(2): 379–384 (Wang Genqiang, Yan Jurang. Existence of Periodic Solutions for Second Order Nonlinear Neutral Delay Equations. Acta Math. Sinica (Chinese Series), 2004, 47(2): 379–384)

[7] Jack Hale. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

[8] Lu Shiping, Ge Weigao. On the Existence of Periodic Solutions for Neutral Functional Differential Equation. *Nonlinear Analysis, TMA*, 2003, 54: 1285–1306

[9] Lu Shiping, Ge Weigao. On the Existence of Periodic Solutions of a Kind of Second order Neutral Functional Differential Equation with Multiple Deviating Arguments. *Acta Mathematica Sinica*, 2005,

21(2): 381–392

[10] 鲁世平，葛渭高．一类二阶 n- 维中立型微分系统周期解问题． 数学学报, 2003, 46(3): 601–610
(Lu Shiping, Ge Weigao. On the Existence of Periodic Solutions for a Kind of Second order n-dimensional Neutral Differential Systems. *Acta Math. Sinica* (Chinese Series), 2003, 46(3): 601–610)

[11] Bartsch Th., Mawhin J. The Lery-Schauder Degree of S^1-equivariant Operators Associated to Autonomous Neutral Equation in Spaces of Periodic Functions. *J. Diff. Eqns.*, 1991, 92: 90–99

[12] Zhang Meirong. Periodic Solutions of Linear and Quasilinear Neutral Functional Differential Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, 189(2): 378–392

[13] 沈纯理，郑宇．线性代数与几何．北京：高等教育出版社， 1998
(Shen Chunli, Zheng Yu. Linear Algebra and Geometric. Beijing: Higher Education Press, 1998)

[14] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1977

On the Existence of Periodic Solutions for a Kind of Second-order n-dimensional Neutral Functional Differential System

LI Xiaojing ZHOU Youming

(*College of Mathematics and Physics, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou* 213001)

(*E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn*)

LU Shiping

(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000)

Abstract In this paper, by using the theory of Fourier series and continuation theorem of coincidence degree theory, we study a kind of second-order n-Dimensional neutral functional differential system with deviating arguments as follows:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)-Cx(t-r))+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{grad}F(x(t))+\operatorname{grad}G(x(t-\tau(t)))=p(t).$$

Some new results on the existence of periodic solutions are obtained. The interesting thing is that the matrix C is not required to be symmetric. Therefore, the results of this paper inprove and extend some known results in recent literature. But, the methods to estimate a priori bounds of periodic solutions are different from the corresponding ones of the past.

Key words neutral differential system; coincidence degree; periodic solution

MR(2000) Subject Classification 34C25; 34K40

Chinese Library Classification O175.14