

一般随机环境中二重随机 游动的强大数定律*

王伟刚

(浙江工商大学统计与数学学院, 杭州 310018)

(E-mail: wwgys_2000@163.com)

摘 要 讨论了一般环境中二重随机游动的强泛函大数定律, 给出了当过程几乎处处趋向于正无穷时的泛函大数定律成立的几个充分条件.

关键词 随机环境; 随机环境中二重随机游动; 强大数定律

MR(2000) 主题分类 60J10; 60F08

中图分类 O211.62

1 引言

20 世纪 80 年代初, Cogburn 等人开始研究随机环境中马氏链的一般理论, 取得了一系列深刻的结果^[1-4], 其中 Alili 在 [5] 中研究了平稳环境中的 2 重随机游动, 给出了它的大数定律和中心极限定律. 国内学者对随机环境中的马氏链也进行了深入的研究. 胡迪鹤在 [6-8] 中给出了 $p-m$ 链到随机环境中马氏链的构造方法, 研究了随机环境中 Markov 过程的构造及等价定理. 王汉兴, 戴永隆在 [9] 中给出了马氏环境中马氏链的 Poisson 极限定理; 郭明乐, 万成高分别在 [10] 和 [11] 中研究乐马氏环境中马氏链的函数大数定律. 本文在前人研究的基础上, 进一步研究具有离散参数的一般环境的二重随机游动, 给出了一般环境中二重随机游动的大数定律成立的充分条件.

设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, $\vec{X} = \{X_n, n \geq 0\}$ 和 $\xi = \{(\lambda_j, \mu_j)\}_{j \geq 1}$ 分别是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上取值于 \mathbb{Z} 和 $(0, 1)^2$ 的随机序列. 在给定 ξ 的情况下, 若 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 为时齐二重随机游动, 且满足:

对任意 $n \geq 0, j \in \mathbb{Z}$,

$$P(X_{n+1} = j + 1 \mid X_{n-1} = j - 1, X_n = j, \xi) = \lambda_j,$$

本文 2009 年 7 月 28 日收到. 2011 年 4 月 19 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11026088) 资助项目.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j-1 | X_{n-1} = j-1, X_n = j, \xi) &= 1 - \lambda_j, \\ P(X_{n+1} = j-1 | X_{n-1} = j+1, X_n = j, \xi) &= \mu_j, \\ P(X_{n+1} = j+1 | X_{n-1} = j+1, X_n = j, \xi) &= 1 - \mu_j, \end{aligned}$$

则称 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 为随机环境下的单边二重随机游动, 其中 ξ 称为随机环境. 本文恒设

$$P(X_0 = 0) = 1, \quad P(X_1 = 1) = \lambda_0, \quad P(X_1 = -1) = 1 - \lambda_0.$$

2 泛函中的强大数定律

对每个 $k \geq 0$, 令 $\tau_0 \equiv 0$, $\tau_{k+1} = \inf \{n > \tau_k; X_n = k+1\}$, $\sigma_k = \tau_{k+1} - \tau_k$.

$$\begin{aligned} \Omega_{\tau_k} &= \{\tau_k < \infty\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n), \\ \mathcal{F}_{\tau_k} &= \{A \subset \Omega_{\tau_k}; \forall n \geq 0, A \cap \{\tau_k \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}, \quad \mathcal{F}^{\tau_k} = \sigma(X_{\tau_k+n}; n \geq 0). \end{aligned}$$

对任意 $j \leq 0$, 令 $U_j = \#\{k; 0 \leq k < \tau_1, x_k = j, X_{k+1} = j-1\}$. $Z_0 = 1$, $Z_n = U_{-n+1}$, $n \geq 1$, 则由 [5] 知,

$$\tau_1 = 1 + 2 \sum_{j=-\infty}^0 U_j = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n. \quad (1)$$

引理 1 Z_n 为依时随机环境中的分枝过程, 且每一代繁殖的母函数为

$$\begin{cases} f_0(s) = \frac{\lambda_0}{1 - (1 - \lambda_0)s}, \\ f_n(s) = 1 - \mu_{-n} + \frac{\mu_{-n}\lambda_{-n}s}{1 - (1 - \lambda_{-n})s}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

证 由 [5] 引理 3.3 可知此引理成立.

引理 2 (i) 如果 $A_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu_{-k+1}}{\lambda_{-k+1}} \dots \frac{\mu_{-1}}{\lambda_{-1}} \frac{1-\lambda_0}{\lambda_0} < \infty$, 则有 $E\tau_0 < \infty$, 从而 $\tau_0 < \infty$, a.s.

(ii) 若对任意 $n \geq 0$ 有 $A_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu_{n-k+1}}{\lambda_{n-k+1}} \dots \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \frac{1-\lambda_n}{\lambda_n} < \infty$, 则有 $E\tau_n < \infty$, 从而 $\tau_n < \infty$, a.s. $\forall n \geq 0$.

证 我们只须证明 (i) 式, (ii) 式有对称性可得.

由 (1) 式及引理 1 得

$$\begin{aligned} EZ_n &= f'_0(1)f'_1(1) \dots f'_n(1) = \frac{1-\lambda_0}{\lambda_0} \frac{\mu_{-1}}{\lambda_{-1}} \dots \frac{\mu_{-n+1}}{\lambda_{-n+1}}, \\ E\tau_0 &= \sum_{k=1}^{+\infty} EZ_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu_{-k+1}}{\lambda_{-k+1}} \dots \frac{\mu_{-1}}{\lambda_{-1}} \frac{1-\lambda_0}{\lambda_0}. \end{aligned}$$

引理得证.

易知, 若对任意 $n \geq 0$ 有 $A_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu_{n-k+1}}{\lambda_{n-k+1}} \cdots \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \frac{1-\lambda_n}{\lambda_n} < \infty$, 由 τ_k 的定义, 易知 τ_k 是关于 σ -代数 \mathcal{F}_n 的停时, 且有 $X_{\tau_k} = k, 0 \leq k \leq \tau_k < \tau_{k+1} < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty, \text{a.s.}$ $\Omega_{\tau_k} = \Omega, \text{a.s. } \mathcal{F}_{\tau_n} \subset \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}, \forall n \geq 1$.

令 $l(n) = k$, 当 $\tau_k < n \leq \tau_{k+1}$, $Y_k = \sum_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f_i(X_i), N_k = \sum_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} |f_i(X_i)|, Y'_k = \sum_{i=l(\tau_k)}^k f_i(X_i)$, 其中 $f_i, i \geq 0$ 是定义在 \mathbb{Z} 上的可测函数. 显然, 对任意 $n \geq 1$, 有 $\sum_{i=0}^n f_i(X_i) = \sum_{k=0}^{l(n)-1} Y_k + Y'_n$.

引理 3 (i) $\{Y_k; k \geq 0\}$ 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上独立的随机变量列.

(ii) 若 EY_k 有限, $\forall k \geq 0$, 则

$$\int_{\{l(n) < k\}} Y_k \, dP = (EY_k)P(l(n) < k).$$

(iii) 对任意实数 $a, b, \{aY_k + b\sigma_k; k \geq 0\}$ 和 $\{aU_k + b\sigma_k; k \geq 0\}$ 都是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上相互独立的随机变量序列.

证 (i) 由 X_k 的取值知 Y_k 是取可列多个值的随机变量, 且对任意 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 0 \leq r \leq k$ 有

$$\begin{aligned} & \{Y_r \in A, \tau_k = n\} \\ &= \bigcup_{r \leq m < m' < n} \{Y_r \in A, \tau_r = m, \tau_{r+1} = m', \tau_k = n\} \\ &= \bigcup_{r \leq m < m' < n} \left\{ \sum_{j=m}^{m'-1} f_j(X_j) \in A, \tau_r = m, \tau_{r+1} = m', \tau_k = n \right\} \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

所以 Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1} 是 \mathcal{F}_{τ_k} 是可测的. 注意到

$$\{\sigma_k = \mu\} = \{X_{\tau_{k+1}} \neq k+1, \dots, X_{\tau_{k+\mu-1}} \neq k+1, X_{\tau_{k+\mu}} = k+1\} \in \mathcal{F}^{\tau_k},$$

由强马氏性知

$$\begin{aligned} & P(Y_0 = c_0, Y_1 = c_1, \dots, Y_{k-1} = c_{k-1}, Y_k = c_k) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P\left(Y_0 = c_0, Y_1 = c_1, \dots, Y_{k-1} = c_{k-1}, \tau_k = n, \sigma_k = \mu, \sum_{j=\tau_k}^{\tau_{k+\mu}-1} f_j(X_j) = c_k\right) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_{Y_0=c_0, \dots, Y_{k-1}=c_{k-1}, \tau_k=n} P\left(\sigma_k = \mu, \sum_{j=\tau_k}^{\tau_{k+\mu}-1} f_j(X_j) = c_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k}\right) dP \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_{Y_0=c_0, \dots, Y_{k-1}=c_{k-1}, \tau_k=n} P\left(\sigma_k = \mu, \sum_{j=\tau_k}^{\tau_{k+\mu}-1} f_j(X_j) = c_k \mid X_{\tau_k}\right) dP \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(Y_0 = c_0, \dots, Y_{k-1} = c_{k-1}, \tau_k = n) P\left(\sigma_k = \mu, \sum_{j=\tau_k}^{\tau_{k+\mu}-1} f_j(X_j) = c_k\right) \end{aligned}$$

$$= P(Y_0 = c_0, Y_1 = c_1, \dots, Y_{k-1} = c_{k-1})P(Y_k = c_k),$$

由归纳法知 (i) 成立.

(ii) 由

$$\{l(n) < m\} = \{\tau_{l(n)} < \tau_m\} = \{n \leq \tau_m\} = \{\tau_m < n\}^c \in \mathcal{F}_{\tau_m}$$

可得

$$\begin{aligned} \int_{l(n) < m} Y_m \, dP &= \int_{l(n) < m} E(Y_m | \mathcal{F}_{\tau_m}) \, dP = \int_{l(n) < m} E(Y_m | X_{\tau_m}) \, dP \\ &= \int_{l(n) < m} EY_m \, dP = (EY_m)P(l(n) < m). \end{aligned}$$

(iii) 对任意 $k \geq 0$, 由于 $aY_k + b\sigma_k = \sum_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} (af(X_i) + b)$, 利用 (i) 的证明, 我们可以得到 (iii).

引理 4 当 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 正交, 特别的当 $\{X_n\}_{n > 0}$ 独立且 $EX_n = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln^2 n) EX_n^2 < +\infty$, 则 $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ a.s. 收敛.

证 证明参见 [12, 定理 2.3.2].

引理 5 (Kronecker 引理) 设 $x_i > 0$, $a_i > 0$, 并且 a_i 关于 i 单调非减, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n/a_n) < \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$.

定理 1 (i) $\sup_{n \geq 0} E\sigma_n^3 = M < \infty$, 存在 $0 \leq p < 1/2$, 使得 $f_n(\cdot) \leq n^p$ a.s. 成立;
(ii) 存在 $0 < \alpha < 1$ 和常数 $X > 0$, 使得 $E\sigma_n^2 = o(n^\alpha)$, 且 $|f_n(\cdot)| \leq X$ a.s. 成立.
如果条件 (i) 或者条件 (ii) 成立则有下列形式的大数定律

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f_k(X_k) - Ef_k(X_k)] = 0, \quad \text{a.s.}$$

证 (i) 由 $\sup_{n \geq 0} E\sigma_n^3 = M < \infty$ 及 $\sigma \geq 0$, a.s. 得 $\sup_{n \geq 0} E\sigma_n \leq \sup_{n \geq 0} E^{1/3}\sigma_n^3 = M^{1/3} = M_1 < \infty$, $\sup_{n \geq 0} E\sigma_n^2 \leq E^{2/3}\sigma_n^3 = M^{2/3} = M_2 < \infty$.

令

$$Z_k = Y_k - EY_k = \sum_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} [f_i(X_i) - Ef_i(X_i)],$$

由条件 $f_n(\cdot) \leq n^p$, a.s. 成立得

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Z_k}{k}\right)^2 &\leq \frac{4}{k^2} E(\tau_{k+1}^p \sigma_k^2) = \frac{4}{k^2} E(\tau_k + \sigma_k)^{2p} \sigma_k^2 \leq \frac{4}{k^2} E(\tau_k^{2p} + \sigma_k^{2p}) \sigma_k^2 \\ &= \frac{4}{k^2} (E\sigma_k^2 E\tau_k^{2p} + E\sigma_k^{2p+2}) \leq \frac{4}{k^2} (M_2 E^p \tau_k^2 + M_3) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{k^2} [M_2 E^p(\sigma_0 + \cdots + \sigma_{k-1})^2 + M_3] \leq \frac{4}{k^2} \left[M_2 \left(kM_2^2 + \frac{k(k-1)}{2} M_1^2 \right)^p + M_3 \right],$$

其中上式第二个不等式用到了 $(x+y)^{2p} \leq x^{2p} + y^{2p}$, $\forall x > 0, y > 0, 0 \leq p < 1/2$. 第3个不等式用到了 $0 \leq p < 1/2$ 及 Jensen 不等式. 所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2 n E \left(\frac{Z_n}{n} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \ln^2 n}{n^2} \left[M_2 \left(nM_2^2 + \frac{n(n-1)}{2} M_1^2 \right)^p + M_3 \right] < +\infty.$$

故由引理 4 知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z_n}{n} < +\infty$ a.s. 成立.

再由引理 5 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_n = 0$ a.s. 成立, 此即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [Y_k - EY_k] = 0, \quad \text{a.s.} \quad (2)$$

因此

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f_k(X_k) - Ef_k(X_k)] \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l(n)-1} (Y_k - EY_k) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=\tau_l(n)}^{n-1} [f_k(X_k) - Ef_k(X_k)] \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l(n)-1} (Y_k - EY_k) \right| + \frac{1}{n} 2n^p [(n-1) - \tau_l(n)] \\ & \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l(n)-1} (Y_k - EY_k) \right| + \frac{1}{n} 2n^p [\tau_{l(n)+1} - \tau_l(n)] \\ & \leq \frac{1}{l(n)} \left| \sum_{k=0}^{l(n)-1} (Y_k - EY_k) \right| + \frac{2}{n^{1-p}} \sigma_{\tau_l(n)}. \end{aligned}$$

由 $E\sigma_{l(n)} \leq M_1 < \infty$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\tau_l(n)}}{n^{1-p}} = 0$, a.s. 成立. 又有 $l(n) \rightarrow \infty$, a.s. 及式子 (2), 对上式两边去极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f_k(X_k) - Ef_k(X_k)] = 0.$$

(ii) 如果条件 (ii) 成立, 则 $E \left(\frac{Z_k}{k} \right)^2 \leq \frac{4}{k^2} X^2 E\sigma_k^2$, 又 $E\sigma_n^2 = o(n^\alpha)$ 得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2 n E \left(\frac{Z_n}{n} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2 n \frac{4}{n^2} X^2 E\sigma_n^2 < \infty.$$

类似于 (i) 可证结论. 定理 1 得证.

定义 1 设 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量列, Y 是非负随机变量, 若对任意 $x > 0, n \in \mathbb{N}$, 有 $P(|Z_n| > x) \leq P(Y > x)$, 则称 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 尾概率一致有界于 Y , 记作 $\{Z_n\} < Y$.

引理 6 设 $\{N_n + \sigma_n\} < Y, EY < \infty$, 则对任意 $n \geq 0$, 有

$$E|Y_n| + E\sigma_n \leq EN_n + E\sigma_n \leq EY < \infty, \quad (3)$$

$$E \max_{0 \leq i \leq n} N_i < \infty, \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} E \max_{0 \leq i \leq n} N_i = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{l(n)}}{l(n)} = 0, \quad \text{a.s.}, \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (N_k - EN_k) = 0, \quad \text{a.s.}, \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{l(n)-1} EY_k - E \sum_{k=0}^{l(n)-1} Y_k \right] = 0, \quad \text{a.s.} \quad (8)$$

证 证明参见 [10].

定理 2 设 $\{N_n + \sigma_n\} < Y, EY < \infty$, 则有大数定律成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f_k(X_k) - Ef_k(X_k)] = 0, \quad \text{a.s.}$$

证 因为

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f_k(X_k) - Ef_k(X_k)] \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{l(n)-1} (Y_k - EY_k) \right| + \frac{1}{n} |Y'_n| + \frac{1}{n} |EY'_n|.$$

由引理 6 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{l(n)-1} E(Y_k - EY_k) \right| = 0, \quad \text{a.s.},$$

$$\frac{1}{n} |EY'_n| \leq \frac{1}{n} E(\max_{0 \leq k \leq n-1} N_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\frac{1}{n} |Y'_n| \leq \frac{1}{n} N_{l(n)} = \frac{l(n)}{n} \cdot \frac{N_{l(n)}}{l(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{a.s.}$$

从而本定理的结论成立.

定理 3 如果 $\{f_n(X_n)\} < Y, EY < \infty$ 并且 $\{\sigma_n\} < Z, EZ < \infty$, 特别的 $\{\sigma_n, n \geq 0\}$ 独立同分布 $E\sigma_0 < \infty$, 则有大数定律成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [f_k(X_k) - Ef_k(X_k)] = 0, \quad \text{a.s.}$$

证 令 $|f_k(X_k)|$ 的分布函数为 $F_k(x)$, $k = 0, 1$, 由 $\{f_n(X_n)\} < Y$, 对任意 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{k=0}^1 |f_k(X_k)| > x\right) &= \int_0^{+\infty} P(|f_1(X_1)| > y - x) dF_0(y) \\ &\leq \int_0^{+\infty} P(Y > y - x) dF_0(y) \\ &= P(|f_0(X_0)| + Y > x) \\ &= \int_0^{+\infty} P(|f_0(X_0)| > x - y) dF_Y(y) \\ &\leq \int_0^{+\infty} P(Y > x - y) dF_Y(y) \\ &= P(2Y > x), \end{aligned}$$

此即, $\{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 |f_k(X_k)|\} < Y$. 由归纳知 $\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f_k(X_k)|\} < Y$.

取 Y 的一个版本使得 Y 与 $\{\sigma_n, n \geq 0\}$ 独立, 则对任意 $x > 0$ 有

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{k=\tau_n}^{\tau_{n+1}-1} |f_k(X_k)| > x\right) \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} P(\tau_n = m) P(\sigma_n = l) P\left(\sum_{k=m}^{m+n-1} |f_k(X_k)| > x\right) \\ &\leq \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} P(\tau_n = m) P(\sigma_n = l) P(lY > x) \\ &= P(\sigma_n Y > x) \leq P(YZ > x), \end{aligned}$$

也就是 $\{N_n\} < YZ$, 其中 Y, Z 独立.

所以 $\{N_n + \sigma_n\} < YZ + Z$, 且 $E(YZ + Z) < \infty$. 从而定理 2 的条件成立. 定理得证.

参 考 文 献

- [1] Cogburn R. Markov Chains in Random Environments: the Case of Markovian Environments. *Ann. Probab.*, 1980, 8: 908-916
- [2] Cogburn R. The Ergodic Theory of Markov Chains in Random Environments. *Z. W.*, 1984, 66: 109-128
- [3] Cogburn R. On the Central Limit Theorem for Markov Chains in Random Environments. *Ann. Probab.*, 1991, 19: 597-604
- [4] Orey S. Markov Chains with Stochastically Transition Probabilities. *Ann. Probab.*, 1991, 19: 907-928
- [5] Alili S. Persistent Random Walks in Stationary Environment. *Journal of Statistical Physics*, 1999, 94(3): 469-494

- [6] 胡迪鹤, 从 p - m 链到随机环境中的马氏链. 数学年刊, 2004, 25: 65–78
(Hu Dihe. From p - m Chains to Markov Chains in Random Environments. *Chinese Annals of Mathematics*, 2004, 25: 65–78)
- [7] 胡迪鹤, 随机环境中的 Markov 过程的构造及等价定理. 中国科学 (A 辑), 2004, 34: 268–282
(Hu Dihe. The Construction of Markov Processes in Random Environments and the Equivalence Theorems. *Sci. in China (Series A)*, 2004, 47: 481–496)
- [8] Hu Dihe, Xiao Zhengyan. The Invariance Principle for p - θ Chain. *Acta Math. Sin.*, 2007, 23: 41–56
- [9] 王汉兴, 戴永隆. 马氏环境中马氏链的 Poisson 极限律. 数学学报, 1997, 40: 266–270
(Wang Hanxing, Dai Yonglong. Poisson Limit Law for Markov Chains in Markovian Environments. *Acta Mathematica Sinica*, 1997, 40: 266–270)
- [10] 郭明乐. 马氏环境中马氏链的强大数定律. 应用数学, 2003, 16: 143–148
(Guo Mingle. The Strong Law of Large Numbers for Markov Chains in Markovian Environments. *Mathematica Applicata*, 2003, 16: 143–148)
- [11] 万成高. 马氏环境中马氏链的强大数定律. 应用概率统计, 2003, 19: 155–160
(Wan Chenggao. On the Strong Law of Large Numbers for Markov Chains in Markovian Environments. *Chi. J. Appl. Prob. Stat.*, 2003, 19: 155–160)
- [12] William F, Stout. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974.

The Strong Law of Large Numbers for Order 2 Random Walk in Random Environments

WANG WEIGANG

(College of Statics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018)

(E-mail: wwgys_2000@163.com)

Abstract In this paper, a strong law of large numbers for function of Order 2 random walk in random environments are investigated. Moreover, when the process tending to positive infinity, some sufficient conditions on the law of large number are given.

Key words random environments; order 2 random walk in random environments;
strong law of large numbers

MR(2000) Subject Classification 60J10; 60F08

Chinese Library Classification O211.62