Logistic 种群演化模型的渐近加权周期性 *

王金良 李慧凤

(青岛理工大学理学院应用数学研究所，青岛 266033)
(E-mail: wangjinliang@qtech.edu.cn; lihuifeng@qtech.edu.cn)

摘 要 在生态动力学研究中，研究者们往往假设环境因素 $f(t)$ 随着季节变化而发生周期性变化. 但是诸如光照等因素在这一年的变化都将有别于上一年. 因此环境的变化不是严格周期的，从而 $f(t+T)=w(t)f(t)$, 这里的 $w(t)\neq 1$. 在我们前期工作中称这类函数为加权周期函数. 本文针对 Logistic 种群演化模型研究了这一情况，得到了一个有趣的结果：当内禀增长率和种内竞争率都发生加权周期变化时，种群演化会呈现出某种渐近加权周期性，而且其权函数刚好是种内竞争率权函数的倒数. 这很好地解释了一个生态学现象：种内竞争加剧则意味着种群数量加快下降.

关键词 渐近加权周期性； Logistic 种群演化模型；反应 - 扩散方程

MR(2000) 主题分类 35B10; 35B40; 35K55

中图分类 O175.26

1 引言

众所周知，如果连续函数 $f(t)$ 满足

$$f(t+T)=f(t), \qquad -\infty<t<\infty, \tag{1}$$

其中 T 是一个正常数，则称 $f(t)$ 是一个周期函数. 由于周期现象极为普遍且应用广泛，很多的学者都希望去寻求一些动力系统的周期解. 但不幸的是，不是每个动力系统都有周期解. 于是，近年来研究概周期 [1,2] 成了新的热点. 另外，渐近周期解研究的也很普

本文 2009 年 4 月 11 日收到. 2011 年 4 月 21 日收到修改稿.
* 中国科学院海洋环流与波动重点实验室开放研究基金 (KLOCAW1003) 和青岛理工大学高层引进人才科研启动基金 (C2009-004) 资助项目.

遍 [3-5]. 一个函数 $f(t)$ 被称为是渐近周期的如果存在周期函数 $\theta(t)$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}|f(t)-\theta(t)|=0. \tag{2}$$

顺便指出，若该函数还与空间变量 x 有关则上述表达式需要替换成某种范数形式．例如函数 $(1+e^{-t})\sin 2\pi t$ 和 $e^{-t}+\sin 2\pi t$ 相对于周期函数 $\sin 2\pi t$ 来说是渐近周期的．但是对于 $e^{-t}\sin 2\pi t$ 和 $e^{-t^2}\sin 2\pi t$ 来讲，它们不是周期、概周期也不是渐近周期的，因为它们关于零点振动且当 $t\to\infty$ 时趋于零．但它们毕竟存在某种周期性．事实上，

$$f_1(t+1)=e^{-1}f_1(t), \tag{3}$$

$$\lim_{t\to\infty}|f_2(t+1)-e^{-1}f_2(t)|=\lim_{t\to\infty}|(e^{-2t}-1)e^{-(1+t^2)}\sin 2\pi t|=0. \tag{4}$$

受此启发，我们在 [6,7] 中提出了 "加权周期" 和 "渐近加权周期" 的概念，而且在 [8,9] 中初步探讨了它们在脉冲动力系统中的应用． "加权周期" 函数区别于关系式 (1) 定义的通常周期函数也和 [1,2] 中定义的概周期函数不同．让 E 代表实数集 R 或复数集 C，则其 "迭代形式" 的定义如下：

定义 1[6] $f(t):R\to E$ 是连续或分段连续函数．若存在正数 T 和连续或分段连续的函数 $w(t):R\to R$ 使得

$$f(t+T)=w(t)f(t),\qquad \forall\, t\in R, \tag{5}$$

则 $f(t)$ 就被称为一个加权周期函数， T 被称为它的周期， $w(t)$ 被称为它的权函数．

相应于关系式 (2) 定义的渐近周期性，也将有一个 "渐近加权周期性" 的定义，只不过其形式有所不同．记 X 为某个 Banach 空间，称函数 $f(t):R\to X$ 是连续或分段连续的是指它在范数 $\|\cdot\|_X$ 意义下连续或分段连续．

定义 2[7] $f(t):R\to X$ 是连续或分段连续函数．若存在正数 T 和连续或分段连续的函数 $w(t):R\to R$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}\|f(t+T)-w(t)f(t)\|_X=0, \tag{6}$$

则称 $f(t)$ 具有渐近加权周期性，相应的 T 被称为它的周期， $w(t)$ 被称为它的权函数．

事实上， "加权周期" 现象和 "渐近加权周期" 现象在自然界中普遍存在．如在生态学的研究中，研究者们往往假设影响种群演化的环境因素 $f(t)$ (>0) 随着季节变化而发生周期性变化．但是诸如光照、空气、温度、水等因素，在这一年的变化都将有别于上一年的变化，因此环境的变化不是严格周期的，从而权函数 $w(t)=f(t+T)/f(t)\not\equiv 1$. 当然事物没有绝对的，当 $|w(t)-1|\ll 1$ 时我们可以近似地认为 $f(t)$ 是周期的．但是在另外的情况下，权函数 $w(t)$ 的影响就不能忽略了，甚至于它会对生态系统产生致命性的影响．例如在某个特定的生境中，光照、空气、温度等因素都近似地作周期变化，唯独水资源日趋枯竭，而这将导致物种的最终灭亡，而不是持续生存．因此，有必要从新的角度对这类问题进行研究，在此我们就以典型的 Logistic 种群演化模型为例展开讨论．

从 [8,9] 的研究结果来看，脉冲和时滞的联合作用能造成系统的 "渐近加权周期" 变化，其实系统参量的 "加权周期" 变化也同样能.

2 主要结果

考察如下的 Logistic 模型：

$$\partial_t u(x,t) - d\Delta u(x,t) = u(x,t)[a(t) - b(t)u(x,t)], \qquad (x,t) \in \Omega \times R^+, \tag{7}$$

$$\partial_n u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times R^+, \tag{8}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{9}$$

它描述的是单个物种种群密度随时间和空间的演化过程. 这里的 Ω 代表该物种的栖息地，它是 R^n 中的一个有界区域且有光滑的边界 $\partial\Omega$. R^+ 表示区间 $(0,\infty)$. $d>0$ 是扩散系数. ∂_t 表示关于时间变量 t 的偏导数， Δ 表示关于空间变量 x 的 Laplace 算子，∂_n 表示边界 $\partial\Omega$ 上的外法向导数. 这里的齐次 Neumann 边界条件 $\partial_n u(x,t)=0$ 反映了该种群都生活在区域 Ω 内部，而不会跑到边界外面去. 初始函数 $\phi(x)\in C^1(\overline{\Omega})$ 是一个非负、非平凡的有界函数，它满足相容性条件 $\partial_n\phi(x)=0\ \ (x\in\partial\Omega)$. 关于这个模型 Hess 曾在 [10] 中对 $a=a(x,t)$ 和 $b=b(x,t)$ 都是周期函数的情况进行了研究，结果表明在 $a(x,t),b(x,t)$ 满足某些限制条件时边值问题 (7),(8) 存在唯一的周期解. 在另外的一些文章里，例如 [3] 和 [11], 含有时滞的情况也曾被研究过. 结果表明，系统参数的周期强迫 (反映在系数 a 和 b 上) 会掩盖掉时滞的影响，从而使得初 - 边值问题的解收敛到边值问题的周期解，种群演化呈现出一种渐近周期性.

但是，正如前面所讲，环境因素的变化不会是严格周期的，所以设内禀增长率 $a(t)$ (自然出生率与自然死亡率之差) 和种内竞争率 $b(t)$ 都在 R^+ 上连续且作加权周期变化就更合理一些. 设

$$a(t+T) = w_0(t)a(t), \qquad b(t+T) = w_1(t)b(t). \tag{10}$$

为了体现生态学意义，还假设它们是有界函数：

$$0 < a_1 \le a(t) \le a_2, \qquad 0 < b_1 \le b(t) \le b_2, \tag{11}$$

其中 a_1,a_2,b_1 和 b_2 都是正常数.

定理 1 如果系统满足相对稳定性条件 $a_2b_2 < 2a_1b_1$ 和协调性条件

$$w_1(t) = w_1(0)\cdot\exp\Big\{\int_0^t (1-w_0(s))a(s)\,\mathrm{d}s\Big\}, \tag{12}$$

则对每个给定的初始函数 $\phi(x)\ge a_1/b_2$ 来说，初 - 边值问题 (7)–(9) 的解将具有如下的渐近加权周期性：

$$\lim_{t\to\infty}\Big\|u(\cdot,t+T) - \frac{1}{w_1(t)}u(\cdot,t)\Big\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{13}$$

证　记 $w(t)=1/w_1(t)$, 则由关系式 (12) 可得：

$$w'(t)+a(t)w(t)=w_0(t)a(t)w(t). \tag{14}$$

易验 $\underline{u}=a_1/b_2$ 满足

$$\partial_t\underline{u}-d\Delta\underline{u}\le\underline{u}[a(t)-b(t)\underline{u}]. \tag{15}$$

同时考虑到 $\underline{u}\le\phi(x)$, 则由比较原理 [12] 可知 $u(x,t)\ge\underline{u}=a_1/b_2$ 在 $\Omega\times R^+$ 上成立．另一方面，由 (7) 和 (14) 我们知

$$\begin{aligned}&\partial_t[w(t)u(x,t)]-d\Delta[w(t)u(x,t)]\\=&w'(t)u(x,t)+w(t)\left[\partial_t u(x,t)-d\Delta u(x,t)\right]\\=&\left[w'(t)+a(t)w(t)\right]u(x,t)-b(t)w(t)u^2(x,t)\\=&w_0(t)a(t)w(t)u(x,t)-b(t)w(t)u^2(x,t).\end{aligned} \tag{16}$$

进而考虑到 $a(t+T)=w_0(t)a(t)$ 和 $b(t+T)=w_1(t)b(t)=b(t)/w(t)$, 则有

$$\begin{aligned}&\partial_t[u(x,t+T)-w(t)u(x,t)]-d\Delta[u(x,t+T)-w(t)u(x,t)]\\=&a(t+T)[u(x,t+T)-w(t)u(x,t)]-b(t+T)u^2(x,t+T)+b(t)w(t)u^2(x,t)\\=&\big\{a(t+T)-b(t+T)[u(x,t+T)+w(t)u(x,t)]\big\}\left[u(x,t+T)-w(t)u(x,t)\right].\end{aligned} \tag{17}$$

另外, 由条件 $a_2b_2<2a_1b_1$ 可知，$\varepsilon=2a_1b_1/b_2-a_2>0$. 记 $Y(x,t)=u(x,t+T)-w(t)u(x,t)$, 将上面的等式同乘以 $Y(x,t)$ 并在 Ω 上积分得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega Y^2(x,t)\,\mathrm{d}x+d\int_\Omega|\nabla Y(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega\big\{a(t+T)-b(t+T)[u(x,t+T)+w(t)u(x,t)]\big\}Y^2(x,t)\,\mathrm{d}x\\\le&\int_\Omega\Big\{a(t+T)-b(t+T)(1+w(t))\frac{a_1}{b_2}\Big\}Y^2(x,t)\,\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega\Big\{a(t+T)-[b(t+T)+b(t)]\frac{a_1}{b_2}\Big\}Y^2(x,t)\,\mathrm{d}x\\\le&\int_\Omega\Big\{a_2-2b_1\cdot\frac{a_1}{b_2}\Big\}Y^2(x,t)\,\mathrm{d}x=-\varepsilon\int_\Omega Y^2(x,t)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{18}$$

由此可得

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega Y^2(x,t)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\|Y(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}=0. \tag{19}$$

证毕.

上述定理给出了一个非常有趣的生态学结果．当内禀增长率 $a(t)$ 和种内竞争率 $b(t)$ 都作加权周期变化时，种群演化将呈现出一种渐近加权周期变化而且其权函数就是 $b(t)$ 权函数的倒数．这说明尽管该物种受到环境变化的某种周期性制约其种群密度还是会有一个大体的增长或衰减趋势，而且种内竞争加剧会导致种群密度下降．特别地，当

$a(t)$ 和 $b(t)$ 都是普通周期函数时，有 $w_0(t) = w_1(t) \equiv 1$ 从而条件 (12) 自然满足，因而初 - 边值问题的解就应具有普通的渐近周期性，这和 [10] 中的结论是一致的．当然，我们的结果依赖于相对稳定性条件 $a_2 b_2 < 2a_1 b_1$ 和协调性条件 (12)．之所以称 $a_2 b_2 < 2a_1 b_1$ 为相对稳定性条件是要求内禀增长率和种内竞争率的联合变化不能太剧烈，否则系统会崩溃．至于条件 (12) 则要求上述两参数于相邻两周期内的变化具有某种协调性．对于一个给定的生态系统来说，这种协调性是能够满足的，毕竟它们都受控于同一环境．诚然，这一条件略显苛刻，至于如何降低这一要求还是个有待深入研究的问题．此外，除了上述的 Logistic 模型之外，加权周期的思想还可用于尝试解决其它问题.

参 考 文 献

[1] 何崇佑，概周期微分方程，北京：高等教育出版社， 1992
(He C Y. Almost Periodic Differential Equations. Beijing: Higher Education Press, 1992)

[2] Fink A M. Almost Periodic Differential Equations. Lecture Notes in Math., 377. Berlin: Springer-Verlag, 1974

[3] Wang J L, Zhou L. Existence and Uniqueness of Periodic Solution of Delayed Logistic Equation and its Asymptotic Behavior. *Journal of Partial Differential Equations*, 2000, 16(4): 1–13

[4] Wang J L, Zhou L, Tang Y B. Asymptotic Periodicity of a Food-Limited Diffusive Population Model with Time-Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, 313: 381–399

[5] Wang J L, Zhou L and Tang Y B. Asymptotic Periodicity of the Volterra Equation with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis*, 2008, 68(2): 315–328

[6] Wang J L, Li H F. The Weighted Periodic Function and its Properties. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems* (Series A-Mathematical Analysis), 2006, 13(S3): 1179–1183

[7] Wang J L, Li H F. Concept of Asymptotic Weighted Periodicity and its Applications in Impulsive Dynamic Systems. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems* (Series A-Mathematical Analysis), 2008, 15(S1): 20–24

[8] Wang J L, Li H F. Asymptotic Weighted-periodicity of the Impulsive Parabolic Equation with Time Delay. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* (English Series), 2007, 23(1): 1–8

[9] Wang J L, Zhang G. Asymptotic Weighted Periodicity for Delay Differential Equations. *Dynamic Systems and Applications*, 2006, 15: 479–500

[10] Hess P. Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 247. New York: Pitman, 1991

[11] Feng W, Lu X. Asymptotic Periodicity in Diffusive Logistic Equations with Discrete Delays. *Nonlinear Analysis*, 1996, 26: 171–178

[12] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992

Asymptotic Weighted Periodicity for the Logistic Population-evolution Model

WANG Jinliang LI Huifeng

(*Institute of Applied Mathematics, College of Science, Qingdao Technological University, Qingdao* 266033)

Abstract In the study of the ecological dynamics, the researchers always assume the factors $f(t)$ of the circumstances vary periodically according to the changes of the seasons. But as the sunlight and other factors of this year may be different from that year, so the variation of $f(t)$ is not rigidly periodic, that is, $f(t+T) = w(t)f(t)$ with $w(t) \not\equiv 1$, which is called weighted periodic function in our previous works. Here this case is tried on the Logistic population-evolution model and it gives a very interesting result: in case the inherent increasing rate and the interspecific competition rate vary in a weighted periodic manner, the evolution of the population will show itself asymptotic weighted periodicity and the weight is just the reciprocal of that for the interspecific competition rate. It gives a good explanation to the ecological phenomenon that more fierce competition implies more rapid decreasing of the population.

Key words asymptotic weighted periodicity; Logistic population-evolution model; reaction-diffusion equation

MR(2000) Subject Classification 35B10; 35B40; 35K55

Chinese Library Classification O175.26