借助 Lie 群研究 Burgers-KdV 方程行波解的可积性

刘明惠

(北京交通大学理学院数学系，北京 100044)

(E-mail: mhliu@bjtu.edu.cn)

管克英

(北京交通大学理学院数学系，北京 100044)

(E-mail: kyguan@yahoo.com)

摘 要 运用经典 Lie 群方法证明 Burgers-KdV 方程行波解所满足的二阶非线性常微分方程当且仅当参数满足特殊情况下，恰好接受一个两参数 Lie 群，并用不同的方法求出方程的两个相互独立首次积分.

关键词 Burgers-KdV 行波解方程； Lie 群；首次积分

MR(2000) 主题分类 34A05; 34A34; 22E70

中图分类 O175

1 引言

非线性波动方程是数学物理中具有吸引力的研究领域之一，它揭示自然界中较普遍存在的非线性波的运动规律. 其中已发展较成熟的是孤立子理论，该理论包含一系列可积型非线性波动方程，如 KdV 方程，非线性 Schrödinger 方程， Sine-Gordon 方程等. 对这类方程人们已发展出多种定义及判定方程的可积性的理论与方法，例如 AKNS 型非线性演化方程的 Bäcklund 变换与反散射方法 [1,2] 等. 必须指出，更多的非线性波动方程并不属于上述可积类型，例如有色散与耗散双重作用的 Burgers-KdV 方程、有双稳态的 Fisher 型波动方程，一般形状的非线性 Klein-Gordon 方程等，它们不存在 Bäcklund 变换与反散射方法，但均存在很有意义的行波解，这些行波解一般不能用积分法求出，但在特殊的参数下，一些作者确能用特殊方法找到用初等函数表示的特殊行波解 [3−5]. 因此，寻求较一般类型的非线性波动方程的行波解方程的可积性条件、求精确解的一般

本文 2009 年 8 月 17 日收到.

方法是很有意义的研究工作.

对于具有色散与耗散双重作用的 Burgers-KdV 方程,

$$u_t + uu_x - \gamma u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

在一般条件下不可积. 考虑其行波解 $u = u(x-ct) = u(\theta)$ 满足的二阶非线性常微分方程

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - \gamma u_\theta + \beta u_{\theta\theta} = k, \tag{2}$$

k 为积分常数. [6,7] 用一阶常微分方程的 Liouville 可积性理论分析了 Burgers-KdV 方程的行波解方程 (2) 相应的二阶自治系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = v \quad (= P(u,v)), \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{k}{\beta} + \dfrac{c}{\beta}u + \dfrac{\gamma}{\beta}v - \dfrac{1}{2\beta}u^2 \quad (= Q(u,v)), \end{cases} \tag{3}$$

证明了当且仅当其中的参数满足以下关系

$$c^2 + 2k = \left(\frac{6\gamma^2}{25\beta}\right)^2, \tag{4}$$

存在代数曲线解

$$\begin{aligned} &\beta^3[-(c-u)^3 + 3v^2\beta] + 37500(c-u)v\beta^3\gamma - 3750(c-u)^2\beta^2\gamma^2 \\ &+ 9000v\beta^2\gamma^3 + 900(c-u)\beta\gamma^4 + 216\gamma^6 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

而且是 Liouville 可积的. 上式 $v = \frac{du}{d\theta}$, 因此式 (5) 为一阶微分方程, 可解得方程 (1) 的有界行波解

$$u(x,t) = c + \frac{6\gamma^2}{25\beta} - \frac{12\gamma^2}{25\beta}(1 + e^{\frac{\gamma(ct-x)+d}{5\beta}})^{-2}, \tag{6}$$

但有关的计算与判断很复杂. [8] 则用经典 Lie 群的方法判断出在同样条件下该方程接受不平凡的 Lie 群, 因此是可积的. 通过比较可发现使用 Lie 群方法找可积性条件较 [9,7] 直接判定代数曲线解的存在性与 Liouville 可积性的计算与判断要简单. 但仍由于计算的复杂性, [8] 没能给出方程的通解. 本节综合使用传统 Lie 群方法及 [10–12] 的方法求出了上述 Burgers-KdV 行波解方程两个独立的首次积分.

2　方程接受的 Lie 群

下面简单介绍二阶常微分方程可积性的经典的 Lie 群方法 [13,14].

研究对两个变量 q, ρ 的依赖于单参数 ε 的 Lie 变换

$$Ł_\varepsilon = \begin{cases} q^* = \varphi(q,\rho,\varepsilon), & q^*|_{\varepsilon=0} = q, \\ \rho^* = \psi(q,\rho,\varepsilon), & \rho^*|_{\varepsilon=0} = \rho, \end{cases} \tag{7}$$

其中， φ 和 ψ 是光滑函数．当参数 ε 很小时，上式可展成：

$$\begin{aligned} q^* &= q + \varepsilon\xi(q,\rho) + O(\varepsilon^2), \\ \rho^* &= \rho + \varepsilon\eta(q,\rho) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{8}$$

其中，

$$\xi(q,\rho) = \frac{\partial\varphi(q,\rho,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}, \qquad \eta(q,\rho) = \frac{\partial\psi(q,\rho,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0},$$

由此可得到该单参数 Lie 群的无穷小生成算子

$$\Lambda = \xi(q,\rho)\frac{\partial}{\partial q} + \eta(q,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}. \tag{9}$$

Lie 群理论表明知道了该无穷小算子，我们就可唯一地确定该 Lie 群．在 Lie 变换 (7) 下，给定函数 $\rho(q)$ 变成函数 $\rho^*(q^*)$, 它的各阶导数也会发生相应的变换，例如其一、二阶导数 $\rho_1 = \rho' = \frac{d\rho}{dq}, \rho_2 = \rho'' = \frac{d\rho_1}{dq}$ 就会按如下规律变换

$$\begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_1 + \varepsilon\eta_1(q,\rho,\rho_1) + O(\varepsilon^2), \\ \rho_2^* &= \rho_2 + \varepsilon\eta_2(q,\rho,\rho_1,\rho_2) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

其中

$$\eta_1 = \eta_q + (\eta_\rho - \xi_q)\rho_1 - \xi_\rho\rho_1^2, \tag{10}$$

$$\eta_2 = \eta_{qq} + (2\eta_{q\rho} - \xi_{qq})\rho_1 + (\eta_{\rho\rho} - 2\xi_{q\rho})\rho_1^2 - \xi_{\rho\rho}\rho_1^3 - (2\xi_q - \eta_\rho + 3\xi_\rho\rho_1)\rho_2. \tag{11}$$

由无穷小算子

$$\Lambda^{(2)} = \xi(q,\rho)\frac{\partial}{\partial q} + \eta(q,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} + \eta_1(q,\rho,\rho_1)\frac{\partial}{\partial\rho_1} + \eta_2(q,\rho,\rho_1,\rho_2) \tag{12}$$

生成的关于 4 个变量 q,ρ,ρ_1 和 ρ_2 的 Lie 变换群称为 Lie 群 (9) 的二次扩展群．对于高维空间如果 Lie 变换群有 n 个独立的参数 ε_i $(i = 1,2,\cdots,n)$, 则每个参数 ε_i, 存在无穷小生成元

$$\Lambda_i = \xi_i(q,\rho)\frac{\partial}{\partial q} + \eta_i(q,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}, \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

它们的生成元 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 对 Lie 括号运算是封闭的，即

$$[V_i,V_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k V_k, \qquad i,j = 1,2,\cdots,n, \tag{13}$$

其中常数 $C_{i,j}^k$, $i,j,k = 1,2,\cdots,n$ 称为结构常数，并且满足反对称性

$$C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k, \qquad \forall\, i,j,k = 1,2,\cdots,n$$

及 Jacobi 等式

$$\sum_{k=1}^{n}(C_{i,j}^k C_{k,l}^m) + C_{l,i}^k C_{k,j}^m + C_{j,l}^k C_{k,i}^m = 0, \qquad \forall\, i,j,k = 1,2,\cdots,n,$$

Lie 证明了对任意给定的一组常数 $C_{i,j}^k,\ i,j,k=1,2,\cdots,n$, 如果它们满足以上等式，那么就存在以这组常数为结构常数的 n 参数 Lie 群.

对给定的二阶常微分方程

$$\rho_2 = F(q,\rho,\rho_1). \tag{14}$$

如果经给定的 Lie 变换 (7) 的作用下方程的形式不变，就称方程 (14) 接受该 Lie 群. 这就相当于要求

$$\Lambda^{(2)}\left[\rho_2 - F(q,\rho,\rho_1)\right]\Big|_{\rho_2=F(q,\rho,\rho_1)} = 0. \tag{15}$$

对给定的方程 (14), (15) 式左方是一个关于未知函数 $\xi(q,\rho),\eta(q,\rho)$ 及变量 q,ρ 和 ρ_1 的确定的函数. 由于要求 (15) 式对方程 (14) 的所有的解都成立，变量 q,ρ 和 ρ_1 可以看成是相互独立的. 为使 (15) 式对这些独立变量恒成立，未知函数 $\xi(q,\rho),\eta(q,\rho)$ 就必须满足一系列等式，由这些等式我们就可判定这两个未知函数的存在条件与形式. 微分方程的经典理论证明了如果给定的二阶常微分方程接受一个两参数 Lie 群 (它的两个生成元 Λ_1 与 Λ_2 均满足 (13) 式), 该方程就可用积分法求解 [13,14]. 将这一方法运用到 Burgers-KdV 行波解的方程 (2), 我们可得到以下定理：

定理 1　对任何参数方程 (2) 均接受生成元为

$$\Lambda_1 = \frac{\partial}{\partial q} \tag{16}$$

的单参数 Lie 群，而当且仅当在条件 (4) 满足时，方程 (2) 接受一个两参数 Lie 群.

证　对方程 (2), 对应的方程 (1) 中的变量为 $q=\theta,\ \rho=u,\ \rho_1=\frac{du}{d\theta},\ \rho_2=\frac{d^2u}{d\theta^2}$, 函数 F 的具体形式为

$$F(q,\rho,\rho_1) = \frac{k}{\beta} + \frac{c}{\beta}\rho - \frac{1}{2\beta}\rho^2 + \frac{\gamma}{\beta}\rho_1.$$

对应的等式 (15) 为

$$\begin{aligned}&-\xi_{\rho\rho}\rho_1^3 + \left(\eta_{\rho\rho} - 2\xi_{q\rho} - \frac{2\gamma}{\beta}\xi_\rho\right)\rho_1^2 + \left[(2\eta_{q\rho} - \xi_{qq}) - 3\xi_\rho\left(\frac{k}{\beta} + \frac{c}{\beta}\rho - \frac{1}{2\beta}\rho^2\right) - \frac{\gamma}{\beta}\xi_q\right]\rho_1\\ &+\left\{\eta_{qq} + (\eta_\rho - 2\xi_q)\left(\frac{k}{\beta} + \frac{c}{\beta}\rho - \frac{1}{2\beta}\rho^2\right) + \eta\left(\frac{1}{\beta}\rho - \frac{c}{\beta}\right) - \frac{\gamma}{\beta}\eta_q\right\} = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

无论 c,γ 取何值，当 $\xi(q,\rho)=1,\ \eta(q,\rho)=0$, (17) 式显然成立. 此时的生成元就是 (16).

现在寻找不同于 (16) 的生成元. 在 (17) 式中，由于未知函数 $\xi(q,\rho)$ 和 $\eta(q,\rho)$ 不依赖于 ρ_1, 因此 $\rho_1^i\ (i=0,1,2,3)$ 的系数恒为零. 这样可得,

$$\xi_{\rho\rho} = 0, \tag{18}$$

$$\eta_{\rho\rho} - 2\xi_{q\rho} - \frac{2\gamma}{\beta}\xi_\rho = 0, \tag{19}$$

$$(2\eta_{q\rho} - \xi_{qq}) - 3\xi_\rho\left(\frac{k}{\beta} + \frac{c}{\beta}\rho - \frac{1}{2\beta}\rho^2\right) - \frac{\gamma}{\beta}\xi_q = 0, \tag{20}$$

$$\eta_{qq} + (\eta_\rho - 2\xi_q)\left(\frac{k}{\beta} + \frac{c}{\beta}\rho - \frac{1}{2\beta}\rho^2\right) + \eta\left(\frac{1}{\beta}\rho - \frac{c}{\beta}\right) - \frac{\gamma}{\beta}\eta_q = 0. \tag{21}$$

由方程 (18), (19) 可得

$$\xi = a(q)\rho + b(q), \qquad \eta = \Big(a'(q) + \frac{\gamma}{\beta}a(q)\Big)\rho^2 + e(q)\rho + d(q), \tag{22}$$

其中, $a(q), b(q), e(q), d(q)$ 是待定函数. 将上式代入 (20), 为使所得新等式对所有的 ρ 均成立, 就必须有

$$a(q) = 0, \qquad \xi = b(q), \qquad \eta = e(q)\rho + d(q). \tag{23}$$

此时 (20) 式化简为

$$2e'(q) - b''6(q) - \frac{\gamma}{\beta}b'(q) = 0. \tag{24}$$

将 (23) 代入 (21) 得,

$$\begin{aligned} &e''(q)\rho + d''(q) + (e(q) - 2b'(q))\Big(\frac{k}{\beta} + \frac{c}{\beta}\rho - \frac{1}{2\beta}\rho^2\Big) \\ &+ (e(q)\rho + d(q))\Big(\frac{1}{\beta}\rho - \frac{c}{\beta}\Big) - \frac{\gamma}{\beta}(e'(q)\rho + d'(q)) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

由于 (25) 式中 ρ^2 系数必须为零, 因此,

$$e(q) = -2b'(q). \tag{26}$$

将其代入 (24) 得,

$$5b''(q) + \frac{\gamma}{\beta}b'(q) = 0,$$

由此解得

$$\xi = b(q) = k_1 e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q} + k_2, \tag{27}$$

其中 k_1, k_2 是任意常数. 将 (26), (27) 代入 (25) 式左方, 并使 ρ 的系数为零, 得

$$d(q) = -\frac{12k_1\gamma^3 + 50k_1c\gamma\beta}{125\beta^2}e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q}. \tag{28}$$

于是 (25) 式简化为

$$c^2 + 2k = \Big(\frac{6\gamma^2}{25\beta}\Big)^2$$

就是定理的条件 (4). 这时我们得到

$$\begin{cases} \xi(q,\rho) = k_1 e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q} + k_2, \\ \eta(q,\rho) = \dfrac{2(25\beta\rho - 6\gamma^2 - 25\beta c)k_1\gamma}{125\beta^2}e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q}, \\ \eta_1(q,\rho,\rho_1) = -\dfrac{\gamma k_1}{5\beta}\Big[\dfrac{2(25\beta\rho - 6\gamma^2 - 25\beta c)\gamma}{125\beta^2} - 3\rho_1\Big]e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q}. \end{cases} \tag{29}$$

因此对应的单参数 Lie 群的生成元就是

$$\begin{aligned} \Lambda =& \xi(q,\rho)\frac{\partial}{\partial q} + \eta(q,\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} \\ =& (k_1 e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q} + k_2)\frac{\partial}{\partial q} + \frac{2(25\beta\rho - 6\gamma^2 - 25\beta c)k_1\gamma}{125\beta^2}e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q}\frac{\partial}{\partial\rho}. \end{aligned} \tag{30}$$

如果令 $k_1 = 0,\ k_2 = 1$, 生成元 (30) 就化成 (16). 如果令 $k_1 = 1,\ k_2 = 0$, (30) 就化为

$$\Lambda_2 = e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{2(25\beta\rho - 6\gamma^2 - 25\beta c)\gamma}{125\beta^2}e^{-\frac{\gamma}{5\beta}q}\frac{\partial}{\partial \rho}. \tag{31}$$

不难计算 Lie 括号

$$[\Lambda_1, \Lambda_2] = \Lambda_1\Lambda_2 - \Lambda_2\Lambda_1 = -\frac{\gamma}{5\beta}\Lambda_2. \tag{32}$$

因此，当条件 (4) 满足时，方程 (2) 接受以 Λ_1, Λ_2 为生成元的两参数 Lie 群. 定理 1 已获证.

下面我们讨论条件 (4) 满足时方程的首次积分.

3　借助单参数 Lie 群求 Burgers-KdV 行波解方程首次积分

对高维空间若给出一组 (n 个) 单参数 Lie 变换群，它们的生成元 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 对 Lie 括号运算不封闭，或 (13) 式中 $C_{i,j}^k,\ i,j,k = 1,2,\cdots,n$ 不都是常数，或不满足反对称性，或不满足 Jacobi 等式，这组单参数 Lie 群就不能化成一个 n 参数 Lie 群. 经典的微分方程 Lie 群理论在讨论高阶方程可积性时一般要求方程接受一个多参数 Lie 群而且是可解的. 显然对给定的微分方程找出一个所接受的 n 参数 Lie 群比找出 n 个接受的单参数 Lie 群要求要强. [10,11] 针对这一问题给出了用微分方程接受的单参数 Lie 群组求首次积分的理论与方法.

研究自治系统

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{33}$$

其中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$, D 为 R^n(或 C^n) 的子域，$X_i : D \to R$ (或 C), $X_i \in C_\infty(D)$, $t \in R$ (或 C). 对应的一阶偏微分算子为

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{34}$$

定义 1　设

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{35}$$

为 n 维空间上的一个单参数 Lie 变换群 G 的无穷小生成元. 如果在该 Lie 群变换下系统 (33) 的积分曲线仍变成系统的积分曲线，就称自治系统 (33) 接受该 Lie 群. [10] 证明了

定理 2　系统 (33) 接受 Lie 群 G 的充要条件是存在函数 $A(x)$, 使得

$$[X, V] = XV - VX = A(x)X. \tag{36}$$

注　定义 1 给出的系统接受 Lie 群的要求较经典理论中方程接受 Lie 群的要求要弱，因为经典理论要求方程在 Lie 变换下不变，而在定义 1 要求 Lie 变换下系统 (33) 可能变成一个右端差一比例系数 (该系数可以是函数) 的系统.

定理 3 设 V 是系统 (33) 接受的单参数 Lie 群的生成元, $\Omega(x)$ 是系统 (33) 的首次积分, 若 $V\Omega = f(x)$, 则 $f(x)$ 仍是系统的首次积分或常数.

定义 2 若

$$V_i = V_{i,1}(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + V_{i,2}(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + V_{i,n}(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{37}$$

是系统 (33) 所接受的 $n-1$ 个单参数 Lie 群的生成元, 而且满足

$$\det \begin{pmatrix} X_1(x) & X_2(x) & \cdots & X_n(x) \\ V_{1,1}(x) & V_{1,2}(x) & \cdots & V_{1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{n-1,1}(x) & V_{n-1,2}(x) & \cdots & V_{n-1,n}(x) \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \forall\, x \in D, \tag{38}$$

就称系统 (33) 与所接受的 $n-1$ 个单参数 Lie 群相互独立.

[10] 还证明了

定理 4 若系统 (33) 与所接受的 $n-1$ 个单参数 Lie 群生成元相互独立, 则有

$$[V_i, V_j] = \sum_{k=1}^{n-1} C_{i,j}^k(x) V_k + C_{i,j}^0(x) X, \tag{39}$$

其中 $C_{i,j}^k(x)$ $(i,j,k = 1, 2, \cdots, n-1)$ 是系统的首次积分或常数, 而 $C_{i,j}^0(x)$ 可以是任意函数 (按 [10], 诸 $C_{i,j}^k(x)$ 称为一个相应模 (module) 结构的结构系数).

定理 5 若系统 (33) 与所接受的 $n-1$ 个单参数 Lie 群生成元相互独立, 则任何单参数 Lie 群为系统 (33) 所接受的充要条件为该群的生成元 V 均可表示成

$$V = a(x)X + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) V^i,$$

其中 $a_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$ 都是系统的首次积分或常数, $a(x)$ 为任一函数.

定理 4 表明若系统 (33) 接受的 $n-1$ 个单参数 Lie 群如果不能化成 $n-1$ 参数的 Lie 群, 这对求系统的首次积分反而有利. 因为如果结构系数 $C_{i,j}^k(x)$, $i,j,k = 1, 2, \cdots, n$ 中存在不是常数的, 则通过计算 Lie 括号 (39) 就可直接得到系统的首次积分. 如果结构系数 $C_{i,j}^k(x)$, $i,j,k = 1, 2, \cdots, n$ 都是常数 (此时 $(V_1, V_2, \cdots, V_{n-1})$ 不一定能生成 $n-1$ 参数的 Lie 群, 因为 (39) 式中的 $C_{i,j}^0(x)$ 未必全是零), [11] 则给出了在此条件下求一个首次积分的方法, 即

定理 6 假设系统 (33) 与接受的 $n-1$ 个单参数 Lie 群相互独立, 而且 (39) 式中的结构系数 $C_{i,j}^k(x)$, $i,j,k = 1, 2, \cdots, n$ 都是常数, 如果线性齐次方程组

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{i,j}^k b_k = 0, \qquad i,j = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{40}$$

存在一组非零解 $(b_1, b_2, \cdots, b_{n-1})$, 则可通过求解非齐次方程组

$$\begin{pmatrix} X_1(x) & X_2(x) & \cdots & X_n(x) \\ V_{1,1}(x) & V_{1,2}(x) & \cdots & V_{1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{n-1,1}(x) & V_{n-1,2}(x) & \cdots & V_{n-1,n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \tag{41}$$

解出 $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$, 而系统 (33) 的一个首次积分 $\Omega(x)$ 就可通过以下的道路积分 (积分与路径无关) 给出

$$\Omega(x) = \int_{x_0}^{x} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n. \tag{42}$$

二阶常微分方程 (14) 可以化成如下的三阶自治系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = F(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \tag{43}$$

其中变量 x_1, x_2, x_3 分别对应方程 (14) 中的变量 q, ρ, ρ_1. 可直接检验

定理 7 如果按经典理论方程 (14) 接受生成元为 (9) 的 Lie 群，则对应的系统 (43) 按定义 1 接受生成元为

$$V = \xi(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \eta(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_1(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{44}$$

的 Lie 群，其中函数 η_1 由 (10) 式给出.

下面将以上的一般性结果分别用到条件 (4) 下的方程 (2). 二阶 Burgers-KdV 行波解方程 (4) 对应三阶自治系统为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{k}{\beta} + \dfrac{c}{\beta}x_2 - \dfrac{1}{2\beta}x_2^2 + \dfrac{\gamma}{\beta}x_3, \end{cases} \tag{45}$$

其中变量 x_1, x_2, x_3 分别对应方程 (2) 中的变量 θ, u, u_θ. 对应系统的偏微分算子为

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + \Big(\frac{k}{\beta} + \frac{c}{\beta}x_2 - \frac{1}{2\beta}x_2^2 + \frac{\gamma}{\beta}x_3\Big)\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{46}$$

根据定理 1 和定理 7, 自治系统 (45) 接受两个单参数 Lie 群，它们的生成元分别为

$$\begin{aligned}V_1 =&\frac{\partial}{\partial x_1},\\ V_2 =&e^{-\frac{\gamma}{5\beta}x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{2(25\beta x_2-6\gamma^2-25\beta c)\gamma}{125\beta^2}e^{-\frac{\gamma}{5\beta}x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\\ &-\frac{\gamma}{5\beta}\Big[\frac{2(25\beta x_2-6\gamma^2-25\beta c)\gamma}{125\beta^2}-3x_3\Big]e^{-\frac{\gamma}{5\beta}x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}.\end{aligned}$$

不难算出

$$[V_1,V_2]=-\frac{\gamma}{5\beta}V_2.$$

由此得到相应的结构系数为

$$C_{1,2}^1=-C_{2,1}^1=0,\qquad C_{1,2}^2=-C_{2,1}^2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

对应于定理 6 中方程组 (40) 的非零解为 $b_1=1,\ b_2=0$. 再由对应的方程组 (41) 解得：

$$\begin{cases} f_1=1,\\ f_2=\dfrac{-5(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)(x_2+\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)+4\gamma x_3}{6\gamma[x_3^2-\frac{4\gamma}{5\beta}x_3(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)+\frac{1}{3\beta}(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)^2(x_2+\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)]},\\ f_3=\dfrac{5\beta[-x_3+\frac{2\gamma}{25\beta}(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)]}{3\gamma[x_3^2-\frac{4\gamma}{5\beta}x_3(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)+\frac{1}{3\beta}(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)^2(x_2+\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c)]}.\end{cases}\tag{47}$$

计算相应的道路积分 (42), 我们可以得到相应自治系统的一个首次积分

$$\Omega=x_1-\frac{5\beta}{6\gamma}\ln\Big[x_3^2-\frac{4\gamma}{5\beta}x_3\Big(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)+\frac{1}{3\beta}\Big(x_2+\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)\Big(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)^2\Big].$$

该首次积分也可以转化成

$$\Omega_1=e^{\frac{\gamma}{5\beta}x_1}\Big[x_3^2-\frac{4\gamma}{5\beta}x_3\Big(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)+\frac{1}{3\beta}\Big(x_2+\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)\Big(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{6}}.\tag{48}$$

为求出系统的另一独立于 (48) 的首次积分，我们根据定理 5 构造系统所接受的另一 Lie 群的生成元

$$\begin{aligned}V_2^* =&\Omega_1V_2=r(x_2,x_3)\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{2(25\beta x_2-6\gamma^2-25\beta c)\gamma}{125\beta^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\\ &-\frac{\gamma}{5\beta}\Big(\frac{2(25\beta x_2-6\gamma^2-25\beta c)\gamma}{125\beta^2}-3x_3\Big)\frac{\partial}{\partial x_3}\Big].\end{aligned}\tag{49}$$

其中，

$$r(x_2,x_3)=\Big[x_3^2-\frac{4\gamma}{5\beta}x_3\Big(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)+\frac{1}{3\beta}\Big(x_2+\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)\Big(x_2-\frac{6\gamma^2}{25\beta}-c\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{6}}.$$

显然， X, V_1, V_2^* 互相独立，而且

$$[V_1, V_2^*] = 0.$$

因此

$$C_{1,2}^1 = -C_{2,1}^1 = 0, \qquad C_{1,2}^2 = -C_{2,1}^2 = 0.$$

仍按定理 6, 求出

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 1,$$
$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = \dfrac{-5}{4\gamma}\Big[\Big(x_2 - \dfrac{6\gamma^2}{25\beta} - c\Big)\Big(x_2 - \dfrac{6\gamma^2}{25\beta} + c\Big) + 2\gamma x_3\Big] r^5(x_2, x_3), \\ f_3 = \dfrac{5\beta}{3\gamma} x_3 r^5(x_2, x_3), \end{cases}$$

按道路积分，得到另一首次积分

$$\Omega_2 = \int \frac{-5}{4\gamma}\Big[\Big(x_2 - \frac{6\gamma^2}{25\beta} - c\Big)\Big(x_2 - \frac{6\gamma^2}{25\beta} + c\Big) + 2\gamma x_3\Big] r^5(x_2, x_3) dx_2 + \frac{5\beta}{3\gamma} x_3 r^5(x_2, x_3) dx_3. \quad (50)$$

这一首次积分不是初等函数.

综上， Burgers-KdV 方程无界的精确行波解可以由以下两个首次积分得到：

$$\begin{cases} \Omega_1(q, \rho, \rho_1) = c_1, \\ \Omega_2(\rho, \rho_1) = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数.

我们注意到，方程无界的精确行波解也可以由 Weierstrass 椭圆函数表示．设变换

$$\begin{cases} u = \mu U + \nu, \\ T = \phi(\theta), \end{cases}$$

其中

$$\mu = -e^{\frac{2\gamma}{5\beta}\theta}, \qquad \nu = \frac{6\gamma^2}{25\beta} + c, \qquad \phi(\theta) = \frac{5\sqrt{3\beta}}{6\gamma} e^{\frac{\gamma}{5\beta}\theta},$$

则 (2) 可以简化为：

$$\frac{d^2U}{dT^2} = 6U^2 + S(T), \quad (51)$$

其中

$$S(T) = -\frac{625\beta^2}{24\gamma^4 T^4}\Big(2k + c^2 - \frac{36\gamma^4}{625\beta^2}\Big). \quad (52)$$

很显然，当且仅当满足条件 (4) 时， (52) 可简化为 Painlevé 方程

$$\frac{d^2U}{dT^2} = 6U^2. \quad (53)$$

方程 (53) 的通解为

$$U = \wp(T + c_1, 0, c_2),$$

其中 c_1 和 c_2 是常数，且 $\wp(T, g_2, g_3)$ 是 Weierstrass 椭圆函数,

$$T = \int_{\infty}^{U} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

因此，对任意给定的参数 γ, β 行波速度 c, 我们可以得到 (1) 的精确行波解,

$$u(x,t) = c + \frac{6\gamma^2}{25\beta} - e^{\frac{2\gamma\theta}{5\beta}} \wp\Big(\frac{5\sqrt{3\beta}}{6\gamma} e^{\frac{\gamma\theta}{5\beta}} + c_1, 0, c_2\Big), \qquad \theta = x - ct, \tag{54}$$

当 $c_2 = 0$, 恰好是有界解 (5), 当 $c_2 \neq 0$ 对应解 (54) 是无界的．在 [15–17] 也得到了一些类似的结果.

参 考 文 献

[1] 谷超豪．Bäcklund 变换，孤立子理论与应用．杭州：浙江科学技术出版社， 1990
(Gu C H. Bäcklund Transformation, Solition Theory and Application. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House, 1990)

[2] 李翊神．反散射方法，孤立子理论与应用．杭州：浙江科学技术出版社， 1990
(Li Y K. Inverse Scattering Method, Solition Theory and Application. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House, 1990)

[3] Xiong S L. An Analytic Solution of Burgers-KdV Equation, *Chinese Sci. Bull.* 1989, 34: 1158–1162

[4] Ma W X. An Exact Solution to Two-dimensional Korteweg-de Vries-Burgers Equation. *J. Phys. A:Math. Gen.* 1993, 26: L17–L20

[5] Li Z B, Wang M L. Exact Solutions for Two Nonlinear Equations. *Advances in Mathematics*, 1997, 26(2): 127–132

[6] Guan K Y, Lei J Z. Integrability of Second Order Autonomous System. *Ann. of Diff. Eqs.*, 2002, 18: 117–135

[7] 高纪欣，雷锦志，管克英． Burgers-KdV 行波解方程的可积性条件． 北京交通大学学报, 2003, 27(3): 38-43
(Gao J X, Lei J Z, Guan K Y. Integrable Condition on Traveling Wave Solutions of Burgers-KdV Equation. *J. Northern Jiaotong Univ.*, 2003, 27(3): 38–42)

[8] Feng Z S. Burgers-Korteweg-de Vries Equation and Its Traveling Solitary Waves. *Science in China* (Mathematics), 2007, 50(3): 412–422

[9] Guan K Y, Lei J Z. Integrability of Second Order Autonomous System. *Ann. of Diff. Eqs.*, 2002, 18: 117–135

[10] Guan K Y, Liu S, Lei J Z. Lie Algebra Admitted by an Ordinary Differential Equation System. *Ann. of Diff. Eqs.*, 1998, 14(2): 131–142

[11] 刘洪伟，管克英．用两单参数李群求 3 阶自治系统的首次积分． *应用数学学报*, 2006, 29(3): 567–573
(Liu H W, Guan K Y. Searching for First Integrals of 3-th Order Autonomous System Using Two One-paramter Lie Groups. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2006, 29(3): 567–573)

[12] Guan K Y. The Module Structure of the Infinite-dimensional Lie Algebra Attached to a Vector Field. *Lie Groups: New Research*, 2009, 4

[13] Peter J Olver. Application of Lie Groups to Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1986

[14] Bluman G W, Kumei S. Symmetrics and Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1989

[15] Feng Z S. A Note on "Explicit Exact Solutions to the Compound Burgers-Korteweg-de Vries Equation". *Phys. Lett. A*, 2003, 312: 65–70

[16] Feng Z S. Exact Solutions in Terms of Elliptic Functions for the Burgers-Korteweg-de Vries Equation. *Wave Motion*, 2002, 38 (2): 109–115

[17] Feng Z S. On Travelling Wave Solutions of the Burgers-Korteweg-de Vries Equation. *Nonlinearity*, 2007, 20: 343–356

[18] 刘式达，刘式适．孤波和湍流．上海：上海科技教育出版社， 1994
(Liu S D, Liu S S. Olitory Wave and Turbulance. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publisher, 1994

[19] Glubev V V. Lectures on the Analytic Theory of Differential Equations. Moscow-Leningrad, Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1950

[20] Singer M. Liouvillian First Integrals of Differential Equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1992, 333: 673–688

[21] 屠规彰． Kac-Moody 代数与可积系，孤立子理论与应用．杭州：浙江科学技术出版社， 1990
(Tu G Z. Kac-Moody Algebra and Integrable System, Solition Theory and Application. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House, 1990)

The Lie Group Method in the Study of Integrability of the Travelling Wave of Burgers-KdV Equation

LIU Minghui

(*Department of Mathematics, School of Science, Beijing Jiaotong University Beijing* 100044)

(*E-mail: mhliu@bjtu.edu.cn*)

GUAN Keying

(*Department of Mathematics, School of Science, Beijing Jiaotong University Beijing* 100044)

(*E-mail: kyguan@yahoo.com*)

Abstract For Burgers-KdV travelling wave equation, which satisfies secons nonlinear order ordinary differntial equation, We will apply the classical Lie group theory to show that the corresponding travelling wave equation admits a double parameter Lie group if and only if parameter is satisfied in particular case. Under this condition, based on a method different to the traditional one, its two independent first integrals are given.

Key words Burgers-KdV travelling wave equation; Lie group; first integral

MR(2000) Subject Classification 34A05; 34A34; 22E70

Chinese Library Classification O175