

文章编号: 1003-207(2013)04-0008-09

# 基于 Vidale-Wolfe 模型的多市场广告 预算分配决策模型

张 鹏<sup>1</sup>, 王兴元<sup>2</sup>

(1. 济南大学管理学院, 山东 济南 250002; 2. 山东大学管理学院, 山东 济南 250100)

**摘 要:** 广告决策问题很长时间以来都是营销经理和学者们关注的热点。随着社会经济发展, 越来越多的企业面对多个市场。如何在多个市场、广告总预算固定的状况下, 合理分配各个市场广告预算以收到最优广告效果, 是一个企业关心的较为重要的问题。经过比较, 选择 Vidale-Wolfe 模型作为广告反应模型, 在此基础上建立了多市场广告预算分配决策模型。考虑到一些营销策略对某些市场有特殊销售速率要求, 该模型分为无特殊销售速率维持要求的多市场广告预算分配决策模型和有特殊销售速率维持要求的多市场广告预算分配决策模型两类, 后者探讨了销售速率变化与达到指定销售速率两种要求下的广告预算最优分配问题, 构建了优化模型, 提出了模型参数取值与模型求解方法, 最后给出了一个算例。

**关键词:** 多市场; 广告预算分配; 决策模型; Vidale-Wolfe 模型; 广告优化

**中图分类号:** F224      **文献标识码:** A

## 1 引言

广告是一种非常重要的促销方法, 但实际上人们对广告的认识并不精细, 有很多问题困扰广告经理, 其中广告预算最优分配问题就是长期以来受到关注的核心问题之一。

相关研究大致可以分为广告反应模型研究和广告决策模型研究两大类, 前者的研究内容包括跟踪和评估广告效果、诊断市场变化; 后者往往建立在前者基础上, 主要内容包括年度预算、地理分配、时间时机分配、广告媒体选择和广告稿制定等<sup>[1-4]</sup>。广告反应模型方面, 具有较高影响力的主要有 Vidale-Wolfe 模型<sup>[5]</sup>, Dorfman-Stein 模型<sup>[6]</sup>, Nerlove-Arrow 模型<sup>[7]</sup>, Sethi 模型<sup>[8, 9]</sup>等。Vidale-Wolfe 模型来源于涵盖大量多种产品和多种媒介的样本数据分析, 得到了广泛认可和应用<sup>[10]</sup>, 该模型认为广告促销活动带来的销售速率反应可以用三个参数描述: 销售衰退常量指数  $\lambda$ , 饱和水平  $M$  和反应常数  $r$ ; 并基于上述参数, 提出了描述销售速率与广告投入关系的数学模型, 其形式如式(1)所示:

$$\frac{ds(t)}{dt} = ra(t) \frac{M-s(t)}{M} - \lambda s(t) \quad (1)$$

式(1)中  $s(t)$  表示  $t$  时产品销售速率,  $a(t)$  表示  $t$  时广告费用速率。

Dorfman-Stein 模型设定单位时间内产品销售数量是产品价格和广告预算的函数, 并在此基础上探讨了如何优化产品价格和广告预算, 但并没有探讨其所设定函数的具体形式; Nerlove-Arrow 模型是对 Dorfman-Stein 模型的扩展, 该模型认为销量速率由价格、商誉以及其他一些公司不可控因素所决定, 其主要工作是探讨了多种不同环境下优化策略具备的数学条件(含广告决策模型), 同样没有探讨具体化函数形式; Sethi 于 1983 年和 2008 年先后提出经典模型和新模型, 均为 Vidale-Wolfe 模型特定条件下的变种, 前者用以解决垄断条件下广告策略优化问题, 后者用于解决新产品采用中价格与广告优化问题。

市场广告预算优化方面, 相关研究主要有三种思路: 一是基于博弈理论的探讨, 如 Viscolani 等<sup>[11]</sup>, Erickson 等<sup>[12]</sup> 设定寡头垄断市场, 利用纳什均衡理论探讨企业广告优化策略; 肖成勇等<sup>[13]</sup>, 吕芹等<sup>[14]</sup>, He 等<sup>[15]</sup> 运用博弈理论探讨供应链上下游企业间纵向合作广告优化问题。二是基于静态优化理论的探讨, 如闫涛等<sup>[16]</sup> 提出基于混合定价策略的

收稿日期: 2011-08-01; 修订日期: 2012-07-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70872062)

作者简介: 张鹏(1980-), 男(汉族), 山东济南人, 济南大学管理学院讲师, 博士, 研究方向: 管理科学与工程。

网站广告资源配置优化模型,并利用自适应免疫算法进行求解;王志平等<sup>[17]</sup>提出了基于变分不等式的网络广告资源分配超网络模型并进行了求解;Mihiotis 等<sup>[18]</sup>利用整数规划方法对电视广告分配进行了研究。三是基于动态优化理论的探讨,如 Krishnan 等<sup>[19]</sup>基于 Bass 扩散模型,对新产品广告动态优化进行了研究;Sriram 等<sup>[20]</sup>以品牌资产作为中介变量,探讨了动态市场中广告与促销预算的优化问题;Marinelli 等<sup>[21]</sup>基于扩散类型可控偏微分方程建立了企业多市场经营广告动力模型,利用该模型探讨了垄断条件下利润最大化问题;Mesak 等<sup>[22]</sup>基于扩散模型探讨了服务于客服创新的广告优化策略。在广告反应模型基础上构建广告决策模型是一种应用较多、较为成熟的解决广告优化问题基本思路<sup>[9, 23-24]</sup>。

尽管广告预算分配问题相关研究取得了较多成果,但仍然存在一些不足,主要有三点:一是基于强假设,实用性不强。比如很多研究使用了采用了博弈论方法,在市场环境、竞争对手数量、策略等方面均进行了严格假设,而现实中几乎不存在满足这些假设的市场,这也就大大限制了方法的实际应用。二是存在不确定函数关系或难以测量的变量。一些模型中利用某些函数表示特定关系,设定了函数名称并指明了函数意义但没有给出函数形式,也没有说明获得函数形式的可行方法;还有一些模型中含有难以测量的变量,这都大大限制了模型应用。三是缺少对于多市场及其广告反应差异的关注。当前企业广泛面对多异质市场已经成为普遍,多市场广告策略问题也已引起一定关注<sup>[25-26]</sup>,但目前关注广告预算分配问题的定量研究绝大多数是单一市场环境下的研究,忽视了企业面临多异质市场的实际情况。

针对现有研究不足,本文聚焦如何在广告总预算约束下,合理分配各区域市场广告预算以收到最优广告效果这一实际问题进行研究。基本思路是在广告反应模型基础上建立广告预算分配决策模型进而求解。鉴于 Vidale-Wolfe 模型函数形式明确、有大样本支持、获得广泛关注和认可,在此模型基础上可建立具有普适性的多市场广告预算分配决策模型。该模型形式明确、变量可测,通过探讨模型参数计算与模型求解方法,以克服前述现有研究的三点不足,能够较好的解决企业多市场广告预算分配问题。

## 2 多市场广告预算分配决策模型的建立

### 2.1 多市场广告预算分配问题描述

企业面对多个市场(图1),欲在这些市场上开展广告促销活动,广告总预算是一定的情况下进行最优分配。由于市场以及产品初始销售速率存在差异性,不同市场消费者对于广告的反应是不一样的,即使同一市场,在产品初始销售速率不同时,消费者广告反应也不相同,并且消费者广告反应具有非线性,因此不同广告预算分配方案将带来不同总销量(图2)。基本问题是求能够收到最优广告效果(指定时间段内总销量最多)的多市场广告预算分配方案,而进一步的一个问题是如果营销策略要求某些市场需要维持特殊销售速率时(销售速率不变、变大、变小,销售速率不低于指定值等),如何优化广告预算分配方案。

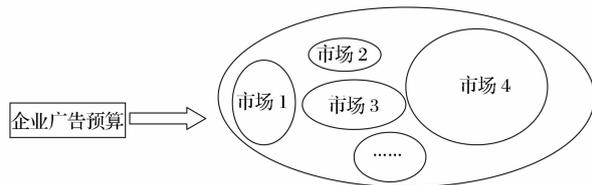


图1 广告预算分配多市场结构图

设企业面对  $k$  个市场;市场广告预算标记为  $c$ , 第  $i$  个市场为  $c_i$ , 总的广告预算为  $C$ ;准备广告时市场产品销售速率初值标记为  $\mu$ , 第  $i$  个市场为  $\mu_i$ ;结合 Vidale-Wolfe 模型,通过销售衰退常量指数、饱和水平、反应常数等的差异体现市场差异性,分别用  $\lambda$ 、 $M$ 、 $r$  表示,第  $i$  个市场这三个参数分别为  $\lambda_i$ 、 $M_i$ 、 $r_i$ ;设广告持续时间为  $\theta$ , 衡量广告效果时,市场销量统计时间从广告开始为起点,时长为  $\delta(\delta \geq \theta)$ ;市场在销量统计时间内的累积销量标记为  $S$ , 第  $i$  个市场为  $S_i$ ;很明显  $k, c, C, \mu, \lambda, M, r, \theta, \delta \geq 0$ 。则基本问题可以描述为:

$$\max \sum S_i, s. t. \sum c_i = C, c_i \geq 0 \quad (2)$$

第二个问题可以分成两部分,首先对于有特殊销售速率维持要求的市场分配广告费用;然后将剩余费用分配至没有特殊销售速率维持要求的市场,实际上这一步与基本问题一致,可以采用基本问题求解方法求解。

### 2.2 多市场广告预算分配决策模型

#### 2.2.1 无特殊销售速率维持要求的多市场广告预算分配决策模型

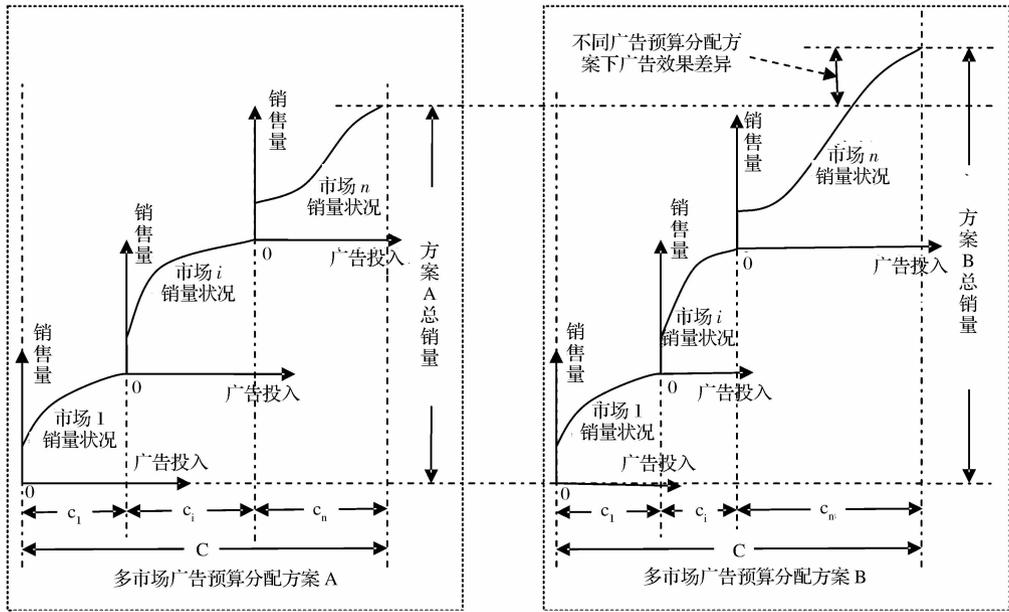


图 2 不同广告费用分配方案将带来不同总销量

在广告投放时期和广告预算固定的情况下，广告投放模式与时机的不同会导致广告效果的差异，但情况较为复杂并缺少成熟的定量模型，因此这里并不进行探讨，而是简化认为广告预算均匀的分布于广告持续时间内。这样，广告费用速率则可以常数化，即：

$$a(t) = \begin{cases} \frac{c}{\theta}, & t_0 \leq t \leq t_0 + \theta \\ 0, & t_0 + \theta < t \leq t_0 + \delta \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中  $t_0$  表示开始广告的时刻。

式(1)可以根据是否处于广告开展期间分开表示，暂不考虑市场区分标记下标  $i$ ，并将式(3)代入式(1)得到式(4)和式(5)，前者描述了广告开展期间有关变量间的关系，后者描述了广告已经完毕后有关变量间的关系：

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{rc}{\theta} - \frac{rc + \lambda M \theta}{M \theta} s(t), t_0 \leq t \leq t_0 + \theta \quad (4)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\lambda s(t), t_0 + \theta < t \leq t_0 + \delta \quad (5)$$

设企业  $t_0$  时产品销售速率为  $\mu$ ，即给定微分方

$$S = \int_{t_0}^{t_0+\theta} \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} + \left( \mu - \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} \right) e^{-\frac{rc + \lambda M \theta}{M \theta} (t-t_0)} \right) dt + \int_{t_0+\theta}^{t_0+\delta} \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} (e^{\lambda \theta} - e^{-\frac{rc}{M}}) + \mu e^{-\frac{rc}{M}} \right) e^{\lambda (t-t_0-\theta)} dt \quad (10)$$

进一步整理得：

$$S = \frac{\theta M (\mu rc - rc M + \mu \lambda M \theta + r^2 c^2 + rc \theta \lambda M - e^{-\frac{rc + \lambda M \theta}{M}} (\theta \mu \lambda M + \mu rc - rc M))}{(rc + \lambda M \theta)^2} + \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M} (e^{\lambda \theta} - e^{-\frac{rc}{M}}) + \mu e^{-\frac{rc}{M}} \right) \frac{e^{-\lambda \theta} - e^{-\lambda \delta}}{\lambda} \quad (11)$$

程初值条件  $s(t_0) = \mu$ ，求解式(4)可得：

$$s(t) = \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} + \left( \mu - \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} \right) e^{-\frac{rc + \lambda M \theta}{M \theta} (t-t_0)}, t_0 \leq t \leq t_0 + \theta \quad (6)$$

广告时长为  $\theta$ ，之后不再进行广告，根据式(6)可知  $t = t_0 + \theta$  时销售速率为：

$$s(t_0 + \theta) = \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} + \left( \mu - \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} \right) e^{-\frac{rc + \lambda M \theta}{M \theta} \theta} \quad (7)$$

将式(7)作为式(5)的初值条件求解式(5)得：

$$s(t) = \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta} (e^{\lambda \theta} - e^{-\frac{rc}{M}}) + \mu e^{-\frac{rc}{M}} \right) e^{\lambda (t-t_0-\theta)}, t_0 + \theta < t \leq t_0 + \delta \quad (8)$$

由于式(6)和式(8)中各个参数以及自变量取值均不为负，显然两式中  $s(t) \geq 0$ ，即在  $t_0 \rightarrow t_0 + \delta$  时间段内  $s(t)$  值不会为负；可以通过销售速率变量  $s(t)$  在时间段  $t_0 \rightarrow t_0 + \delta$  的积分获得该时间段(也即统计时间内)市场累计销量，即：

$$S = \int_{t_0}^{t_0+\delta} s(t) dt \quad (9)$$

将式(6)、式(8)代入式(9)得：

考虑市场标记  $i$ , 市场  $i$  在销量统计时间内的累积销量为:

$$S_i = \frac{\theta M_i (\mu_i r_i c_i - r_i c_i M_i + \mu_i \lambda_i M_i \theta + r_i^2 c_i^2 + r_i c_i \theta \lambda_i M_i - e^{-\frac{r_i c_i + \lambda_i M_i \theta}{M_i}} (\theta \mu_i \lambda_i M_i + \mu_i r_i c_i - r_i c_i M_i))}{(r_i c_i + \theta \lambda_i M_i)^2} + (\frac{M_i r_i c_i}{r_i c_i + \theta \lambda_i M_i} (e^{\lambda_i \theta} - e^{-\frac{r_i c_i}{M_i}}) + \mu e^{-\frac{r_i c_i}{M_i}}) \frac{e^{-\lambda_i \theta} - e^{-\lambda_i \delta}}{\lambda_i} \tag{12}$$

综合式(2), 式(12)可得到无特殊销售速率维持要求的多市场广告预算分配决策模型, 从而得到:

**定理 1** 规划(13)的解即为无特殊销售速率维持要求时多市场广告预算分配优化方案。

$$\begin{aligned} & \max \sum S_i \\ & = \max \sum_{i=1}^k \frac{\theta M_i (\mu_i r_i c_i - r_i c_i M_i + \mu_i \lambda_i M_i \theta + r_i^2 c_i^2 + r_i c_i \theta \lambda_i M_i - e^{-\frac{r_i c_i + \lambda_i M_i \theta}{M_i}} (\theta \mu_i \lambda_i M_i + \mu_i r_i c_i - r_i c_i M_i))}{(r_i c_i + \theta \lambda_i M_i)^2} \\ & + (\frac{M_i r_i c_i}{r_i c_i + \theta \lambda_i M_i} (e^{\lambda_i \theta} - e^{-\frac{r_i c_i}{M_i}}) + \mu e^{-\frac{r_i c_i}{M_i}}) \frac{e^{-\lambda_i \theta} - e^{-\lambda_i \delta}}{\lambda_i} \\ & \text{s. t. } \sum c_i = C, c_i \geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

### 2.2.2 有特殊销售速率维持要求的多市场广告预算分配决策模型

(1) 对于营销要求为销售速率保持不变、变小和变大的探讨

一般来说, 广告对产品销售速率都能产生积极效果, 可以分成三种: 产品销售速率提高; 产品销售速率降低但相比以前降低幅度变小; 产品销售速率不变。制定广告决策时, 对于广告效果的要求常常出现上面情形, 比如对于市场主导者往往希望能够保持现状而不会追求过高的市场份额, 对于夕阳产品可以接受销售速率下滑。这里对如何合理设置特殊市场广告预算以使销售速率保持不变、变小和变大进行探讨。

当无广告投入时, 由式(5)可知, 只要销售速率不为零, 销售速率就会一直变小, 因此不存在销售速率变大或销售速率不变的情形。单纯从广告因素考虑, 要想使销售速率保持不变或变大, 必须进行投入, 接下来就有广告投入时进行分析。

对式(6)求导数有:

$$\frac{d}{dt} s(t) = - (\mu - \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta}) \frac{rc + \lambda M \theta}{M \theta} e^{-\frac{(rc + \lambda M \theta)}{M \theta} (t - t_0)} \tag{14}$$

由式(14)可以看出, 在有投入( $c > 0$ )的情况下, 当市场反应常数与销售衰退常量指数同时为零  $r = 0$  且  $\lambda = 0$  时,  $\frac{d}{dt} s(t) = 0$ , 即销售速率会保持不变, 否则:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} s(t) > 0 \Leftrightarrow -(\mu - \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta}) > 0 \\ \frac{d}{dt} s(t) = 0 \Leftrightarrow -(\mu - \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta}) = 0 \\ \frac{d}{dt} s(t) < 0 \Leftrightarrow -(\mu - \frac{Mrc}{rc + \lambda M \theta}) < 0 \end{cases} \tag{15}$$

由于式(15)中各个变量均大于等于 0, 故容易解得:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} s(t) < 0 \Leftrightarrow c < \frac{\mu \lambda M \theta}{r(M - \mu)} \\ \frac{d}{dt} s(t) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\mu \lambda M \theta}{r(M - \mu)} \\ \frac{d}{dt} s(t) > 0 \Leftrightarrow c > \frac{\mu \lambda M \theta}{r(M - \mu)} \end{cases} \tag{16}$$

从而得到:

**定理 2** 当广告费用投入  $c < \frac{\mu \lambda M \theta}{r(M - \mu)}$  时产品销量将变小,  $c = \frac{\mu \lambda M \theta}{r(M - \mu)}$  时产品销量将不变,  $c > \frac{\mu \lambda M \theta}{r(M - \mu)}$  时产品销量将变大。

(2) 对于营销要求为广告结束后一段时间  $t^*$  销售速率不低于指定值  $s^*$  的探讨

需要说明的是广告后销售速率不低于指定值  $s^*$  是这种情况在  $t^* = 0$  的一种特例。此时又可以分为三种情况:

① 目前销售速率远高于指定值  $s^*$ , 无需投入广告也能保证一段时间  $t^*$  后销售速率不低于指定值  $s^*$ 。此时式(1)可以化为:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\lambda s(t) \tag{17}$$

设起始时刻为  $t_0$ , 则有:

$$s(t_0 + t^*) = s^* \tag{18}$$

以此式作为式(17)的初值条件求解得:

$$s(t) = s^* e^{-\lambda(t-t^*)-t_0} \tag{19}$$

此时对应的起始时刻  $t_0$  销售速率应为:

$$\mu^* = s(t_0) = s^* e^{\lambda t^*} \tag{20}$$

在初值  $s(t_0) = \mu$  条件下求解式(17)可得:

$$s(t) = \mu e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{21}$$

对于任意  $\mu \geq \mu^*$ , 均有

$$s(t_0 + t^*) = \mu e^{-\lambda t^*} \geq \mu^* e^{-\lambda t^*} = (s^* e^{\lambda t^*}) e^{-\lambda t^*} = s^* \tag{22}$$

从而得到:

**定理 3** 当市场销售速率初值  $\mu \geq s^* e^{\lambda t^*}$  时, 无需投入广告费用也能保证时段  $t^*$  后销售速率不低于指定值  $s^*$ 。

②如果不投入广告将无法达到设定销售速率目标时, 需要考虑投入广告, 但应该注意如果制定目标过高, 通过广告投入不可能实现目标。

由式(8)可得广告开始后  $t^*$  时间的销售速率(此时变量  $t$  没有销售速率统计时间  $\delta$  的限制):

$$s(t_0 + t^*) = \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M\theta} (e^{\lambda\theta} - e^{-\frac{rc}{M}}) + \mu e^{-\frac{rc}{M}} \right) e^{-\lambda t^*}, t^* \geq \theta \tag{23}$$

设广告投入  $c$  与  $t^*$  时间后销售速率  $s$  的关系为  $f$ , 即:

$$f(c) = s(t_0 + t^*) = \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M\theta} (e^{\lambda\theta} - e^{-\frac{rc}{M}}) + \mu e^{-\frac{rc}{M}} \right) e^{-\lambda t^*}, t^* \geq \theta \tag{24}$$

显然有:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} f(c) = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M\theta} (e^{\lambda\theta} - e^{-\frac{rc}{M}}) + \mu e^{-\frac{rc}{M}} \right) e^{-\lambda t^*} = Me^{\lambda(\theta-t^*)}, t^* \geq \theta \tag{25}$$

从而得到:

**定理 4** 当欲达成的营销目标为时段  $t^*$  后销量速率  $s^* \geq Me^{\lambda(\theta-t^*)}$  时, 无论分配多少广告费用, 该目标都不可能实现。

③前面讨论了目前销售速率过高而无需广告以及目标太高而不可达成的情况, 这里讨论其余情况, 即目前销售速率不够高 ( $\mu < s^* e^{\lambda t^*}$ ) 并且目标可以达成 ( $s^* < Me^{\lambda(\theta-t^*)}$ ) 的情况, 此时如果不投入的话一段时间  $t^*$  后销售速率将低于指定值  $s^*$ , 而通过一定的投入能够达到设定销售速率目标。

根据式(24)函数, 令

$$f(c) = s^* \tag{27}$$

即可求得所需的广告投入。

从而得到:

**定理 5** 当同时满足  $\mu < s^* e^{\lambda t^*}$ 、 $s^* < Me^{\lambda(\theta-t^*)}$  时, 方程  $f(c) = \left( \frac{Mrc}{rc + \lambda M\theta} (e^{\lambda\theta} - e^{-\frac{rc}{M}}) + \mu e^{-\frac{rc}{M}} \right) e^{-\lambda t^*} = s^*$  的解  $c$  即为欲达成一段时间  $t^*$  后销售速率为  $s^*$  营销目标所需的广告费用投入。

定理 5 中的方程较难求解析解, 在实际应用中并没有必要获取其解析解, 获得数值解即能够满足要求, 因此可以简单地通过二分法、牛顿切线法等获得满意解。

(3)前面(1)(2)综合情形下的多市场广告预算分配决策模型

当一些营销策略对某些市场有特殊销售速率要求时, 应该先对这些市场按特殊营销要求分配广告预算, 再将剩余广告预算利用无特殊销售速率维持要求的多市场广告预算分配决策模型在其他市场间进行分配。

### 3 多市场广告预算分配决策模型参数求解

多市场广告预算分配决策模型共涉及 8 个变量, 这些变量及其值的获取说明如下: 如果马上开展广告, 那么产品销售速率初值  $\mu_i$  可以由当前销售记录获得, 如果是在一段时间后的将来进行广告, 那么有两种方法获得  $\mu_i$ : 一是利用时间序列分析等方法预测届时销售速率初值, 二是取当前时间和销售速率, 根据从目前至广告开始期间是否有过去广告选用式(6)、式(8)中合适的形式, 计算届时销售速率初值; 广告总预算  $C$ 、广告持续时间  $\theta$  以及广告效果计算时长  $\delta$  可以根据广告计划、广告目标确定;  $c_i$  是待优化变量。需要指出的是, 在变量取值时, 指标量纲应注意保持一致, 如求解  $M_i$ ,  $r_i$ ,  $\lambda_i$  等参数过程中, 时间指标量纲应该与  $\theta$ ,  $\delta$  一致; 该优化模型解析解获取较为困难, 在求解上可以通过粒子群算法、遗传算法等等一些优化算法获得数值解, 以找到较优解服务于广告决策。

销售衰退常量指数  $\lambda_i$ 、饱和水平  $M_i$  和反应常数  $r_i$  是市场属性, 不同的市场其值不同, 因此需要对于每个市场进行单独测算。

(1)  $\lambda$  的求解

根据式(5), 设无广告情况下  $t^*$  时销售速率为  $s^*$ , 即考虑初值条件  $s(t^*) = s^*$ , 那么销售速率变化可以描述为:

$$s(t) = s^* e^{-\lambda(t-t^*)} \tag{28}$$

整理可得:

$$\lambda = \frac{\ln s^* - \ln s(t)}{(t - t^*)} \quad (29)$$

选定  $t^*$  以及  $t$ , 相应的产品销售速率初值  $s^*$  以及产品销售速率  $s(t)$  可以通过历史资料获得, 当历史资料缺失或数据较少不太满足需求时, 可以采用实验调查法获得, 因此可以多次选定  $t_0$  和  $t$ , 用样本均值估计得到  $\lambda$ , 即:

$$\lambda^j = \frac{\ln s^{*j} - \ln s(t^j)}{(t^j - t^{*j})} \quad (30)$$

$$\lambda = \bar{\lambda^j} \quad (31)$$

(2)  $M$  的求解

$M$  表示市场饱和水平, 是营销中较为关注的一个指标, 经验丰富的营销人员对市场饱和水平往往具有较为准确的把握, 如果缺少市场经验, 也可以通过调查获取这些信息, 因此  $M$  的求解至少包括经验判断和市场调查分析两种方法, 对这两种方法这里不再赘述。此外, 市场饱和水平  $M$  连同反应常数  $r$  也可以通过回归分析获得。

由式(3)、式(4)可得, 企业进行广告期间:

$$\frac{1}{s(t)} = \frac{1}{r} \frac{(\frac{ds(t)}{dt} + \lambda s(t))\theta}{cs(t)} + \frac{1}{M} \quad (32)$$

令  $y = \frac{1}{s(t)}, x = \frac{(\frac{ds(t)}{dt} + \lambda s(t))\theta}{cs(t)}, w = \frac{1}{r}, v = \frac{1}{M}$ , 则式(32)可以化为:

$$y = wx + v \quad (33)$$

由于销售速率  $s(t)$ 、过去广告投入  $c$ 、过去广告时间  $\theta$  均可以通过销售记录(或实验调查法)获得; 销售速率的变化  $ds(t)/dt$  可以依据销售记录通过  $\Delta s(t)/\Delta t$  的方式获得;  $\lambda$  求解方法已经给出, 故可以得到  $x$  和  $y$  的统计资料, 通过一元线性回归方法可以求得式(33)中  $w$  和  $v$ , 进而求得:

$$M = \frac{1}{v} \quad (34)$$

$$r = \frac{1}{w} \quad (35)$$

(3)  $r$  的求解

$M$  和  $r$  同时解的方法上面已经给出, 如果先单独求得  $M$ , 可以通过下面方式获得  $r$ :

变化式(32)可得:

$$r = \frac{M\theta s(t)(\frac{ds(t)}{dt} + \lambda s(t))}{cs(t)(M - s(t))} \quad (36)$$

式(36)中等号右边  $M$  已经求得, 其余各部分取值方法同 2) 所述, 从而可以利用样本均值估计得到

$r$ , 即:

$$r^j = \frac{M\theta^j s(t^j)(\frac{ds(t^j)}{dt} + \lambda s(t^j))}{c^j s(t^j)(M - s(t^j))} \quad (37)$$

$$r = \bar{r^j} \quad (38)$$

### 4 多市场广告预算分配决策模型算例

鉴于 Vidale-Wolfe 模型采用的微分方程形式体现了经济系统中类似动力系统的一般特征, 已被广泛扩展应用于多种行业、商业、经济相关问题<sup>[27]</sup>, 而且 Vidale-Wolfe 模型有关研究所用样本没有特殊行业或企业背景, 并已有涉及如电力销售<sup>[28]</sup>, 水果销售<sup>[29]</sup>, 饮料销售<sup>[30]</sup>等多种领域的应用, 因此, 本文提出的基于 Vidale-Wolfe 模型的广告预算分配模型也具有较好普适性。本文算例是所建模型的使用示范。

设当前时间为 12 月底, 企业欲 1—3 月在 A—F 六块市场开展广告促销活动, 总预算为 200 万元, 目标是:

- (1) 广告期间 A 市场销售速率保持不变;
  - (2) 广告结束再一个月后(4 月底 5 月初) B 市场销售速率仍能达到 25 万件/月;
  - (3) 广告结束后 C 市场销售速率不低于 30 万件/月;
  - (4) 1—6 月 D、E、F 市场总销量最大化;
- 求最优广告预算分配方案。

求解过程如下:

(1) 设定单位, 取销量单位为万件, 费用单位为万元, 时间单位为月; 确定有关参数, 由题意可得  $C = 200, \theta = 3, \delta = 6$ , 可以依据第 3 部分所述方法确定各个市场销量速率初值  $\mu_i$  销售衰退常量指数、饱和水平、反应常数(即  $\lambda_i, M_i$  和  $r_i$ ), 作为一个算例, 这里假设各参数值如表 1 所示:

表 1 各个市场销售衰退常量指数  $\lambda$ 、饱和水平  $M$ 、反应常数  $r$  和销售速率初值  $\mu$

|               | $\lambda_i$ | $M_i$ | $r_i$ | $\mu_i$ |
|---------------|-------------|-------|-------|---------|
| A 市场( $i=1$ ) | 0.25        | 800   | 0.50  | 30      |
| B 市场( $i=2$ ) | 0.20        | 1000  | 0.45  | 20      |
| C 市场( $i=3$ ) | 0.15        | 1200  | 0.35  | 50      |
| D 市场( $i=4$ ) | 0.30        | 500   | 0.40  | 10      |
| E 市场( $i=5$ ) | 0.25        | 1500  | 0.36  | 10      |
| F 市场( $i=6$ ) | 0.25        | 1000  | 0.38  | 60      |

(2) 首先利用 2.2.2 模型求解有特殊销量要求的 A、B、C 市场上广告预算分配方案。

A 市场: 根据定理 2 可得需要投入的广告费用:

$$c_1 = \frac{\mu_1 \lambda_1 M_1 \theta}{r_1 (M_1 - \mu_1)}$$

$$= \frac{30 \times 0.25 \times 800 \times 3}{0.5 \times (800 - 30)} = 46.75 \text{ 万元} \quad (39)$$

B 市场:发现满足定理 5 条件,如式(40)、式(41)所示:

$$\mu_2 = 20 < s_2^* e^{\lambda_2 t_2^*} = 25 \times e^{0.2 \times 4} = 55.64 \quad (40)$$

$$s_2^* = 25 < M_2 e^{\lambda_2 (\theta_2 - t_2^*)} = 1000 e^{0.20 \times (3-4)} = 818.73 \quad (41)$$

因此可以利用定理 5 求解,利用二分法求得到应该投入该市场的广告费用,如式(42)所示:

$$c_2 = 59.36 \text{ 万元} \quad (42)$$

C 市场:由于满足定理 3 要求,即:

$$S_4 = \frac{609.85 e^{-0.0008c_4} (196c_4 - 4500) + 240c_4^2 - 24000c_4 + 6750000}{(0.4c_4 + 450)^2} + \frac{160.85c_4 (2.46 - e^{-0.0008c_4})}{0.4c_4 + 450}$$

$$+ 8.04 e^{-0.0008c_4} \quad (46)$$

$$S_5 = \frac{2125.65 e^{-0.00024c_5} (536.4c_5 - 11250) + 583.2c_5^2 - 591300c_5 + 50625000}{(0.36c_5 + 1125)^2}$$

$$+ \frac{538.35c_5 (2.12 - e^{-0.00024c_5})}{0.36c_5 + 1125} + 9.97 e^{-0.00024c_5} \quad (47)$$

$$S_6 = \frac{1417.10 e^{-0.00038c_6} (357.2c_6 - 45000) + 433.2c_6^2 - 216600c_6 + 135000000}{(0.38c_6 + 750)^2}$$

$$+ \frac{378.84c_6 (2.12 - e^{-0.00038c_6})}{0.38c_6 + 750} + 59.82 e^{-0.00038c_6} \quad (48)$$

优化问题为:

$$\max \sum_{i=4}^6 S_i, s. t. \sum c_i = C, c_i \geq 0 \quad (49)$$

式(49)为一含有多个变量的 NLP 问题,求其解析解是非常困难而且在实际应用中并非必要,因此宜利用粒子群算法<sup>[31]</sup>等优化算法直接求其数值解。解得:

$$\begin{cases} c_4 = 13.63 \text{ 万元} \\ c_4 = 17.18 \text{ 万元} \\ c_6 = 63.08 \text{ 万元} \end{cases} \quad (50)$$

时取得最大值  $\max = 335.66$ 。即这样分配 200 万元广告预算能够满足营销目标:A 市场 46.75 万元,B 市场 59.36 万元,C 市场 0 万元,D 市场 13.63 万元,E 市场 17.18 万元,F 市场 63.08 万元。

### 5 结语

本文探讨了在多个市场、广告总预算固定的条件下如何合理分配各个市场广告费用以获得最优广告效果的问题。基于 Vidale-Wolfe 广告反应模型建立了多市场广告预算分配决策模型。考虑到一些

$$\mu_3 = 50 \geq s_3^* e^{\lambda_3 t_3^*} = 30 e^{0.15 \times 3} = 47.05 \quad (43)$$

因此该市场无需进行广告促销也能达到销售速率目标,即:

$$c_3 = 0 \text{ 万元} \quad (44)$$

(3)在解决有特殊要求市场的广告预算分配问题后,再利用定理 1 解决另外三块市场上广告预算分配问题。可用在 A、B、C 三块市场上的广告预算为:

$$c_4 + c_5 + c_6 = 200 - c_1 - c_2 - c_3$$

$$= 200 - 46.75 - 59.36 - 0 = 93.89 \text{ 万元} \quad (45)$$

代入有关数据可知 D、E、F 三块市场在投入分别为  $c_4, c_5, c_6$  的条件下,在销量统计时间内的累积销量分别为:

营销策略对某些市场有特殊销售速率要求,该模型分为无特殊销量维持要求的多市场广告预算分配决策模型和有特殊销量维持要求的多市场广告预算分配决策模型两类。无特殊销量维持要求的多市场广告预算分配决策模型通过销售衰退常量指数,饱和水平和反应常数把握市场异质性,依据所有市场产品销售率总和最优建立。

有特殊销量维持要求的多市场广告预算分配决策模型建立在无特殊销量维持要求的多市场广告预算分配决策模型基础上,体现为对特殊市场按特殊营销要求分配广告预算后,再将剩余广告预算利用前者方法分配。欲使销量保持不变,应该投入广告预算  $(\mu \lambda M \theta) / (r(M - \mu))$ ,投入高于此值销量会有所提高,低于此值销量会有所降低;如果目标为销量达到某个指定值,则又分为三种情况,(1)当  $\mu \geq s^* e^{\lambda t^*}$  时,无需投入也可以达到目标。(2)当  $s^* \geq M e^{\lambda(\theta - t^*)}$  时,无论投入多少广告费用都不会达到目标。(3)不满足前面两种情况时,方程(31)的解即为所求,该方程解析解不易获得,但可以利用二分法等

获得数值解,数值解能够满足现实需求。为了能够服务于现实应用,进一步探讨了模型参数获取与求解以及模型求解。最后,鉴于本文模型具有较好的普适性,给出了一个算例说明了模型应用。

### 参考文献:

- [1] Sethi S P. Dynamic optimal control models in advertising: a survey [J]. *SIAM review*, 1977, 19(4): 685—725.
- [2] Little J D C. Aggregate advertising models: The state of the art [J]. *Operations Research*, 1979, 27(4): 629—667.
- [3] Feichtinger G, Hartl R F, Sethi S P. Dynamic optimal control models in advertising: recent developments [J]. *Management Science*, 1994, 40(2): 195—226.
- [4] Wierenga B. *Handbook of Marketing Decision Models* [M]//Danaher P J. *Advertising Models* New York: Springer-Verlag New York Inc, 2008:81—106.
- [5] Vidale M L, Wolfe H B. An operations-research study of sales response to advertising [J]. *Operations Research*, 1957, 5(3): 370—381.
- [6] Dorfman R, Steiner P O. Optimal advertising and optimal quality [J]. *The American Economic Review*, 1954, 44(5): 826—836.
- [7] Nerlove M, Arrow K J. Optimal advertising policy under dynamic conditions [J]. *Economica*, 1962, 29(114):129—142.
- [8] Sethi S P. Deterministic and stochastic optimization of a dynamic advertising model [J]. *Optimal control applications and methods*, 1983, 4(2): 179—184.
- [9] Sethi S P, Prasad A, He X. Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model [J]. *Journal of Optimization Theory & Applications*, 2008, 139(2): 351—360.
- [10] Freimer M, Horsky D. Periodic advertising pulsing in a competitive market [J]. *Marketing Science*, 2012, 31(4):637—648.
- [11] Viscolani B, Zaccour G. Advertising strategies in a differential game with negative competitor's interference [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, 140(1): 153—170.
- [12] Erickson G M. An oligopoly model of dynamic advertising competition [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 197(1): 374—388.
- [13] 肖成勇, 王谦. 两层广告博弈中供应商的一种批发价协调策略 [J]. *系统科学与数学*, 2011, 13(11): 1504—1510.
- [14] 吕芹, 霍佳震. 基于制造商和零售商自有品牌竞争的供应链广告决策 [J]. *中国管理科学*, 2011, 19(1): 48—54.
- [15] He Xiuli, Krishnamoorthy A, Prasad A, et al. Retail competition and cooperative advertising [J]. *Operations Research Letters*, 2011, 39(1): 11—16.
- [16] 闫涛, 闫继涛. 基于自适应免疫算法的网站广告分配优化 [J]. *计算机工程与科学*, 2012, 34(1): 183—186.
- [17] 王志平, 周生宝, 郭俊芳, 等. 基于变分不等式的网络广告资源分配的超网络模型 [J]. *大连海事大学学报*, 2007, (4): 69—72.
- [18] Mihiotis A, Tsakiris I. A mathematical programming study of advertising allocation problem [J]. *Applied mathematics and computation*, 2004, 148(2): 373—379.
- [19] Krishnan T V, Jain D C. Optimal dynamic advertising policy for new products [J]. *Management Science*, 2006, 52(12): 1957—1969.
- [20] Sriram S, Kalwani M U. Optimal advertising and promotion budgets in dynamic markets with brand equity as a mediating variable [J]. *Management Science*, 2007, 53(1): 46—60.
- [21] Marinelli C, Savin S. Optimal distributed dynamic advertising [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2008, 137(3): 569—591.
- [22] Mesak H I, Bari A, Babin B J, et al. Optimum advertising policy over time for subscriber service innovations in the presence of service cost learning and customers' disadoption [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 211(3): 642—649.
- [23] Sasieni M W. Optimal advertising expenditure [J]. *Management Science*, 1971, 18(4): 64—72.
- [24] Krishnamoorthy A, Prasad A, Sethi S P. Optimal pricing and advertising in a durable-good duopoly [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 200(2): 486—497.
- [25] Dubé J P, Manchanda P. Differences in dynamic brand competition across markets: An empirical analysis [J]. *Marketing Science*, 2005, 24(1): 81—95.
- [26] Bronnenberg B J, Mahajan V. Unobserved retailer behavior in multimarket data: Joint spatial dependence in market shares and promotion variables [J]. *Marketing Science*, 2001, 20(3): 284—299.
- [27] Huang Jian, Leng Mingming, Liang Liping. Recent developments in dynamic advertising research [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 220(3): 591—609.
- [28] Liu Dengpan, Kumar S, Mookerjee V S. Advertising

- strategies in electronic retailing: A differential games approach [J]. *Information Systems Research*, 2012, 23(3): 903–917.
- [29] Hochman E, Regev U, Ward R W. Optimal advertising signals in the Florida citrus industry: a research application [J]. *American Journal of Agricultural Economics*, 1974, 56(4): 697–705.
- [30] Chintagunta P K, Vilcassim N J. An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly [J]. *Management Science*, 1992, 38(9): 1230–1244.
- [31] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization [C]. *International Conference on Neural Networks*, Perth, Nov 27-Dec 01, 1995, 4: 1942–1948.

### A Decision Model for Multi-market Advertising Budget Allocation Based on Vidale-Wolfe Model

ZHANG Peng<sup>1</sup>, WANG Xing-yuan<sup>2</sup>

(1. School of Management, University of Jinan, Jinan 250002, China;

2. School of Management, Shandong University, Jinan 250100, China)

**Abstract:** Advertising decision problem has been a hotspot concerned by marketing managers and scholars for a long time. More and more enterprises are facing multi-market with the development of society and economy and it becomes a more important problem for enterprises that how to allocate advertising budget to get the best advertising effect in condition of multi-market and fixed total advertising budget. Vidale-Wolfe model is selected as the advertising response model, based on which the decision model for multi-market advertising budget allocation is proposed. As some marketing strategy requires special sales rate demands in some markets. The proposed model consists of two parts: the latter cares about how to keep certain sales rate, while the former does not. The optimization model is constructed. The method to get arguments value and how to solve the model are discussed. An example is given at last.

**Key words:** multi-market; advertising budget allocation; decision model; Vidale-Wolfe model; optimal advertising