第 34 卷 第 5 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 34 No. 5
2011 年 9 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Sep., 2011

双变量 LMEs 一种异类约束最小二乘解的 MCG 算法*

刘晓敏 张凯院

(西北工业大学应用数学系，西安 710072)

(E-mail: xiaoming0521@163.com)

摘 要 借鉴求线性矩阵方程组 (LMEs) 同类约束最小二乘解的修正共轭梯度法，建立了求双变量 LMEs 的一种异类约束最小二乘解的修正共轭梯度法，并证明了该算法的收敛性. 在不考虑舍入误差的情况下，利用该算法不仅可在有限步计算后得到 LMEs 的一组异类约束最小二乘解，而且选取特殊初始矩阵时，可求得 LMEs 的极小范数异类约束最小二乘解. 另外，还可求得指定矩阵在该 LMEs 的异类约束最小二乘解集合中的最佳逼近. 算例表明，该算法是有效的.

关键词 线性矩阵方程组；异类约束最小二乘解；修正共轭梯度法；最佳逼近

MR(2000) 主题分类 65F10; 15A24

中图分类 0241.6

1 引言

用 $R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 实矩阵集合，$A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积，$\overline{\mathrm{vec}}(A)$ 表示将矩阵 A 按行拉直构成的列向量. 定义 $m\times n$ 实矩阵 A 与 B 的内积 $[A,B]=\mathrm{tr}\,(A^TB)$, 由此导出矩阵的 Frobenius 范数 $\|A\|=\sqrt{[A,A]}$. 记 n 阶实对称矩阵集合为 Ω_1 . 设 $P\in R^{n\times n}$ 满足 $P^T=P, P^2=I_n$, 若 $X\in R^{n\times n}$ 满足 $PXP=X$, 则称 X 为关于矩阵 P 的自反矩阵，记关于矩阵 P 的自反矩阵的集合为 Ω_5; 当 $X_1\in\Omega_1$, $X_2\in\Omega_5$ 时，记作 $(X_1,X_2)\in\Omega_{1-5}$, 称之为约束 1–5 矩阵.

线性矩阵方程 (LME) 和线性矩阵方程组 (LMEs) 的求解问题在解决电学、结构动力学、振动理论、自动控制理论等许多领域都有重要应用. 比如， 1987 年， Woude 提出了如下问题 [1]: 给定一个复合线性系统，它有两个外部输入、一个外部输出、一个控制输入及一个测量输出，求一动态输出反馈补偿器使它形成的测量输出抵消外部输入

本文 2010 年 10 月 28 日收到. 2011 年 5 月 9 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11071196) 资助项目.

对输出的影响，该问题的数学模型就是求解 LMEs $A_1XB_1=D_1$，$A_2XB_2=D_2$．在解决上述问题时，通常是通过有限差分或者有限元方法对微分方程进行离散化，由于涉及的数据不够完整或需要对已有数据进行修正，要求未知矩阵满足特定的约束条件，这就归结或转化为求 LME(s) 的约束解问题．比如，在结构动力模型修正的问题中需要求 LME $XA+YB+ZC=W$ 的约束解及其最佳逼近；在矩阵束的奇异值分解问题中需要求广义 Sylvester LMEs $AX-YB=E$, $CX-YD=F$ 的约束解．由于 LME(s) 的系数矩阵及其右端矩阵的元素通常来自测量或实验数据，不能保证其有约束解．所以研究 LME(s) 的约束最小二乘解的算法具有重要的意义．

目前，针对解矩阵属于同类矩阵集合的情形 (同类约束解)，中外学者已用奇异值分解、标准相关分解、迭代算法等给出了求 LME 或 LMEs 的解 [2−5] 或最小二乘解 [6−8] 的方法，并解决了给定矩阵的最佳逼近问题．张凯院等 [9] 又针对解矩阵属于不同类矩阵集合的情形 (异类约束解)，给出了求多变量 LME 的异类约束解的修正共轭梯度法 (MCG 算法)．迄今为止，对于 LME(s) 约束最小二乘解的迭代算法研究都是同类约束问题，而对异类约束最小二乘解的研究结果尚未见到．本文通过构造等价的 LMEs，并修改共轭梯度法 (CG) 的下降方向及其有关系数，建立求双矩阵变量 LMEs ($A_i,C_i\in R^{m\times n}$, $B_i,D_i\in R^{n\times l}$, $F_j\in R^{m\times l}$).

$$\begin{cases} A_1X_1B_1+A_2X_2B_2=F_1, \\ C_1X_1D_1+C_2X_2D_2=F_2 \end{cases} \tag{1}$$

的约束 1–5 最小二乘解的迭代算法，并讨论迭代算法的有限步收敛性问题．具体讨论以下问题．为了书写简洁，引进以下记号：

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},\qquad X^{(k)}=\begin{pmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \end{pmatrix},\qquad \widehat{X}=\begin{pmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \end{pmatrix},\qquad X^*=\begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

问题 I　给定 $A_i,C_i\in R^{m\times n}$, $B_i,D_i\in R^{n\times l}$, $F_j\in R^{m\times l}$, 求 $(X_1,X_2)\in\Omega_{1-5}$, 使得

$$\left\|\begin{pmatrix} A_1X_1B_1+A_2X_2B_2 \\ C_1X_1D_1+C_2X_2D_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\right\|=\min \tag{2}$$

问题 II　用 S_E 表示问题 I 的解集合，任意给定 $X_i^{(0)}\in R^{n\times n}$, 求 $(\widehat{X}_1,\widehat{X}_2)\in S_E$, 使得

$$\|\widehat{X}-X^{(0)}\|=\min\{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}^{(0)}\|\,|(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)\in \mathrm{S_E}\}.$$

2　问题 I 的等价转化

$$l_1(X)=A_1X_1B_1+A_2X_2B_2,\qquad m_1(X)=B_1^TX_1A_1^T+B_2^TPX_2^TPA_2^T,$$

$$l_2(X)=C_1X_1D_1+C_2X_2D_2,\qquad m_2(X)=D_1^TX_1C_1^T+D_2^TPX_2^TPC_2^T,$$

$$g(X_1,X_2)=\begin{pmatrix} A_1^Tl_1(X)B_1^T+C_1^Tl_2(X)D_1^T+B_1m_1(X)A_1+D_1m_2(X)C_1 \\ A_2^Tl_1(X)B_2^T+C_2^Tl_2(X)D_2^T+PA_2^T(m_1(X))^TB_2^TP+PC_2^T(m_2(X))^TD_2^TP \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} A_1^TF_1B_1^T+C_1^TF_2D_1^T+B_1F_1^TA_1+D_1F_2^TC_1 \\ A_2^TF_1B_2^T+C_2^TF_2D_2^T+PA_2^TF_1B_2^TP+PC_2^TF_2D_2^TP \end{pmatrix}$$

定理 1 求解问题 I 等价于求 LMEs

$$g(X_1,X_2)=Q \tag{3}$$

的约束 1–5 解，且 LMEs(3) 一定有约束 1–5 解.

证 当 $(X_1,X_2)\in\Omega_{1-5}$ 时，有 $X_1=X_1^T$，$X_2=PX_2P$．因此，求 $(X_1,X_2)\in\Omega_{1-5}$ 使得式 (2) 成立，等价于求 $(X_1,X_2)\in\Omega_{1-5}$ 使得

$$\left\|\begin{pmatrix} A_1X_1B_1+A_2X_2B_2 \\ C_1X_1D_1+C_2X_2D_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\right\|^2+\left\|\begin{pmatrix} A_1X_1^TB_1+A_2PX_2PB_2 \\ C_1X_1^TD_1+C_2PX_2PD_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\right\|^2$$
$$=\min. \tag{4}$$

下面证明求极小值问题 (4) 的解等价于求 LMEs(3) 的约束 1–5 解．记

$$M=\begin{pmatrix} A_1\otimes B_1^T & A_2\otimes B_2^T \\ C_1\otimes D_1^T & C_2\otimes D_2^T \\ (A_1\otimes B_1^T)T_{n,n} & A_2P\otimes B_2^TP \\ (C_1\otimes D_1^T)T_{n,n} & C_2P\otimes D_2^TP \end{pmatrix},\qquad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},\qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

其中 $T_{m,n}$ 表示满足 $\overline{\mathrm{vec}}(A_{m\times n}^T)=T_{m,n}\overline{\mathrm{vec}}(A_{m\times n})$ 的列交换矩阵 [11], $x_i=\overline{\mathrm{vec}}(X_i)$，$f_i=\overline{\mathrm{vec}}(F_i)$, 并约定矩阵的乘法运算优先于矩阵的 Kronecker 积运算．考虑 LMEs

$$\begin{cases} A_1X_1B_1+A_2X_2B_2=F_1, \qquad A_1X_1^TB_1+A_2PX_2PB_2=F_1 \\ C_1X_1D_1+C_2X_2D_2=F_2, \qquad C_1X_1^TD_1+C_2PX_2PD_2=F_2. \end{cases} \tag{5}$$

易见求极小值问题 (4) 的解等价于求 LMEs(5) 的最小二乘解．将 LMEs(5) 按行拉直可得方程组 $Mx=f$, 它的正规方程组为 $M^TMx=M^Tf$, 写成矩阵形式就是 LMEs(3)．

综上所述，求解问题 I 等价于求 LMEs(3) 的约束 1–5 解．下面证明 LMEs(3) 一定有约束 1–5 解．因为正规方程组 $M^TMx=M^Tf$ 有解，所以 LMEs(3) 有解，设 $\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2$ 是它的一组解 (未必是约束 1–5 矩阵), 那么

$$g(\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2)=Q. \tag{6}$$

令

$$u_1(\widetilde{X}_1)=\frac{1}{2}(\widetilde{X}_1+\widetilde{X}_1^T),\qquad u_2(\widetilde{X}_2)=\frac{1}{2}(\widetilde{X}_2+P\widetilde{X}_2P),$$
$$v_1(\widetilde{X}_1)=\frac{1}{2}(\widetilde{X}_1-\widetilde{X}_1^T),\qquad v_2(\widetilde{X}_2)=\frac{1}{2}(\widetilde{X}_2-P\widetilde{X}_2P),$$

则 $(u_1(\widetilde{X}_1),u_2(\widetilde{X}_2))\in\Omega_{1-5}$, 且有

$$\widetilde{X}_1=u_1(\widetilde{X}_1)+v_1(\widetilde{X}_1),\widetilde{X}_2=u_2(\widetilde{X}_2)+v_2(\widetilde{X}_2)$$

将上式代入式 (6), 可得 $g(u_1(\widetilde{X}_1),u_2(\widetilde{X}_2))=Q$, 这表明 LMEs(3) 有约束 1–5 解．证毕.

3 求解问题 I 的 MCG 算法

参照 [5,9,10], 建立求 LMEs(3) 的约束 1–5 解的 MCG 算法, 也就是求 LMEs(1) 的约束 1–5 最小二乘解的 MCG 算法 (MCG1–5 算法) 如下：

第 1 步：任意给定初始矩阵 $(X_1^{(1)},X_2^{(1)})\in\Omega_{1-5}$, 置 $k:=1$, 计算

$$R_1=Q-g(X_1^{(1)},X_2^{(1)})\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}R_1^{(1)}\\R_2^{(1)}\end{pmatrix},\qquad \widetilde{R}_1=g(R_1^{(1)},R_2^{(1)})\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\widetilde{R}_1^{(1)}\\\widetilde{R}_2^{(1)}\end{pmatrix},$$

$$Z_1=\widetilde{R}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\widetilde{R}_1^{(1)}+(\widetilde{R}_1^{(1)})^T\\\widetilde{R}_2^{(1)}+P\widetilde{R}_2^{(1)}P\end{pmatrix}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}P_1^{(1)}\\P_2^{(1)}\end{pmatrix}.$$

第 2 步：若 $R_k=O$, 停止；否则，计算

$$\alpha_k=\frac{\|R_k\|^2}{\|Z_k\|^2},\qquad X^{(k+1)}=X^{(k)}+\alpha_kZ_k.$$

第 3 步：计算

$$R_{k+1}=Q-g(X_1^{(k+1)},X_2^{(k+1)})\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}R_1^{(k+1)}\\R_2^{(k+1)}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}_{k+1}=g(R_1^{(k+1)},R_2^{(k+1)})\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\widetilde{R}_1^{(k+1)}\\\widetilde{R}_2^{(k+1)}\end{pmatrix},$$

$$\beta_{k+1}=-\frac{[\widetilde{R}_{k+1},Z_k]}{\|Z_k\|^2},\qquad Z_{k+1}=\widetilde{R}_{k+1}+\beta_{k+1}Z_k\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}P_1^{(k+1)}\\P_2^{(k+1)}\end{pmatrix}.$$

第 4 步：置 $k:=k+1$, 转第 2 步.

易见， MCG1–5 算法中的矩阵满足 $(X_1^{(k)},X_2^{(k)})\in\Omega_{1-5}$, $(P_1^{(k)},P_2^{(k)})\in\Omega_{1-5}$ ．需要指出： MCG1–5 算法中 β_{k+1} 的选取不是唯一的 [10]. 下面讨论 MCG1–5 算法的性质，并证明其有限步收敛性.

引理 1 对任意 $(X_1,X_2)\in\Omega_{1-5}$, $(Y_1,Y_2)\in\Omega_{1-5}$, 有

$$[Y,g(X_1,X_2)]=[g(Y_1,Y_2),X].$$

证 由内积运算的交换律以及迹的性质可以验证.

性质 1 设 (X_1^*,X_2^*) 是问题 I 的解，那么对任意的初始矩阵 $(X_1^{(1)},X_2^{(1)})\in\Omega_{1-5}$, MCG1–5 算法中的矩阵 $X^{(i)}$, R_i 和 $\widetilde{R}_i$ 满足

$$[\widetilde{R}_i,X^*-X^{(i)}]=\|R_i\|^2,\qquad i=1,2,\cdots.\tag{7}$$

证 因为 (X_1^*,X_2^*) 是 LMEs(3) 的解，所以 $g(X_1^*,X_2^*)=Q$ ．由引理 1 可得

$$[\widetilde{R}_i,X^*-X^{(i)}]=[R_i,g(X_1^*-X_1^{(i)},X_2^*-X_2^{(i)})]=\|R_i\|^2,\qquad i=1,2,\cdots.$$

证毕.

性质 2 设 (X_1^*, X_2^*) 是问题 I 的解，那么对任意的初始矩阵 $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}) \in \Omega_{1-5}$, MCG1–5 算法中的矩阵 $X^{(i)}$, R_i 和 Z_i 满足

$$[Z_i, X^* - X^{(i)}] = \|R_i\|^2, \qquad i = 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

证 采用数学归纳法. 对于 $i = 1$, 由性质 1 可得

$$[Z_1, X^* - X^{(1)}] = [\widetilde{R}_1, X^* - X^{(1)}] = \|R_1\|^2.$$

假设 $i = s$ $(s \geqslant 1)$ 时，式 (8) 成立，则当 $i = s+1$ 时，有

$$\begin{aligned}[Z_{s+1}, X^* - X^{(s+1)}] =&[\widetilde{R}_{s+1}, X^* - X^{(s+1)}] + \beta_{k+1}[Z_s, X^* - X^{(s+1)}]\\ =&\|R_{s+1}\|^2 + \beta_{k+1}[Z_s, X^* - X^{(s)} - \alpha_s Z_s]\\ =&\|R_{s+1}\|^2 + \beta_{k+1}\Big(\|R_s\|^2 - \frac{\|R_s\|^2}{\|Z_s\|^2}[Z_s, Z_s]\Big)\\ =&\|R_{s+1}\|^2.\end{aligned}$$

由数学归纳法原理知，对于任何正整数 i, 式 (8) 成立. 证毕.

性质 3 对 MCG1–5 算法中的矩阵 R_i 和 Z_i, 若存在正整数 k, 使得 $R_i \neq O$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 那么 $[R_i, R_j] = 0$, $[Z_i, Z_j] = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, k)$.

证 根据内积运算的交换律，只需对 $1 \leq i < j \leq k$ 证明结论成立. 当 $k = 2$ 时，由引理 1 及 MCG1–5 算法，有

$$\begin{aligned}&[R_1, R_2] = [R_1, R_1 - \alpha_1 g(P_1^{(1)}, P_2^{(1)})] = \|R_1\|^2 - \alpha_1[R_1, g(P_1^{(1)}, P_2^{(1)})]\\ =&\|R_1\|^2 - \alpha_1[g(R_1^{(1)}, R_2^{(1)}), Z_1] = \|R_1\|^2 - \frac{\|R_1\|^2}{\|Z_1\|^2}[\widetilde{R}_1, Z_1] = 0\\ &[Z_1, Z_2] = [Z_1, \widetilde{R}_2 + \beta_2 Z_1] = [Z_1, \widetilde{R}_2] - \frac{[\widetilde{R}_2, Z_1]}{\|Z_1\|^2}[Z_1, Z_1] = 0.\end{aligned}$$

假设 $k = s$ $(s \geqslant 2)$ 时结论成立，则当 $k = s+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&[R_s, R_{s+1}] = [R_s, R_s] - \alpha_s[R_s, g(P_1^{(s)}, P_2^{(s)})] = \|R_s\|^2 - \alpha_s[\widetilde{R}_s, Z_s]\\ =&\|R_s\|^2 - \frac{\|R_s\|^2}{\|Z_s\|^2}[Z_s - \beta_s Z_{s-1}, Z_s] = 0,\\ &[Z_s, Z_{s+1}] = [Z_s, \widetilde{R}_{s+1} + \beta_{s+1} Z_s] = [Z_s, \widetilde{R}_{s+1}] - \frac{[\widetilde{R}_{s+1}, Z_s]}{\|Z_s\|^2}[Z_s, Z_s] = 0.\end{aligned}$$

容易验证 $[R_{s+1}, R_1] = 0$. 当 $j = 2, 3, \cdots, s-1$ 时，有

$$\begin{aligned}[R_{s+1}, R_j] =&[R_s, R_j] - \alpha_s[g(P_1^{(s)}, P_2^{(s)}), R_j] = 0 - \alpha_s[Z_s, g(R_1^{(j)}, R_2^{(j)})]\\ =&-\alpha_s[Z_s, \widetilde{R}_j] = -\alpha_s[Z_s, Z_j - \beta_j Z_{j-1}] = 0.\end{aligned}$$

当 $j=1,2,\cdots,s-1$ 时，有

$$\begin{aligned}&[Z_{s+1},Z_j]=[\widetilde{R}_{s+1}+\beta_s Z_s,Z_j]=[g(R_1^{(s+1)},R_2^{(s+1)}),Z_j]+\beta_s[Z_s,Z_j]\\=&[R_{s+1},g(P_1^{(j)},P_2^{(j)})]=\left[R_{s+1},\frac{1}{\alpha j}(R_j-R_{j+1})\right]=0.\end{aligned}$$

故 $k=s+1$ 时结论成立．根据数学归纳法原理，结论得证．证毕．

定理 2 对任意初始矩阵 $(X_1^{(1)},X_2^{(1)})\in\Omega_{1-5}$, 问题 I 的解可在有限步计算后得到．

证　若 $R_i\neq O$ $(i=1,2,\cdots,2n^2)$, 由性质 2 知 $Z_i\neq O$ $(i=1,2,\cdots,2n^2)$, 从而由 MCG1–5 算法可以求得 $X^{(2n^2+1)}$ 及 R_{2n^2+1}．由性质 3 知

$$[R_{2n^2+1},R_i]=0,\quad [R_i,R_j]=0,\qquad i\neq j;\ \ i,j=1,2,\cdots,2n^2.$$

因此， $R_1,R_2,\cdots,R_{2n^2}$ 构成矩阵空间 $R^{2n\times n}$ 的一组基，从而 $R_{2n^2+1}=O$, 即 $X^{(2n^2+1)}$ 为问题 I 的一组解．证毕．

引理 2[10]　设 $A\in R^{m\times n}$, $b\in R^m$, 线性方程组 $Ax=b$ 有解，则 $Ax=b$ 的极小范数解唯一，且极小范数解在 $R(A^T)$ 中，而在 $R(A^T)$ 中只有 $Ax=b$ 的一个解．

定理 3 LMEs(3) 总是有解的，若选取初始矩阵 $(X_1^{(1)},X_2^{(1)})$ 满足

$$X^{(1)}=g(H_1,H_2)((H_1,H_2)\in\Omega_{1-5}),\tag{9}$$

则在有限步计算后得到 LMEs(3) 的唯一极小范数约束 1–5 解，也就是 LMEs(1) 的唯一极小范数约束 1–5 最小二乘解．

证　由 MCG1–5 算法和定理 1 知，若按式 (9) 选取初始矩阵，则在有限步计算后可得问题 I 的解 X^*, 且可表示为

$$X^*=g(W_1,W_2),\qquad ((W_1,W_2)\in\Omega_{1-5}).\tag{10}$$

下面证明 X^* 是问题 I 的唯一极小范数约束 1–5 解．记 $\overline{\mathrm{vec}}(W_i)=w_i$, 将式 (10) 按行拉直可得

$$x^*\overset{\mathrm{def}}{=}\overline{\mathrm{vec}}(X^*)=M^TM\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\in R(M^TM)=R((M^TM)^T).$$

因为 X^* 是 LMEs(3) 的解，所以 x^* 是 $M^TMx=M^Tf$ 的解．由引理 2 知， x^* 是它的唯一极小范数解．由于拉直映射是同构的，从而 X^* 是 LMEs(3) 的唯一极小范数解，即 LMEs(1) 的唯一极小范数约束 1–5 最小二乘解．证毕．

4　问题 II 的解

由于问题 I 的解集合 S_E 非空，取 $(X_1,X_2)\in S_E$, 由对称矩阵与反对称矩阵的正交性、自反矩阵与反自反矩阵的正交性，可得

$$\|X-X^{(0)}\|^2=\left\|\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}X_1^{(0)}+(X_1^{(0)})^T\\X_2^{(0)}+PX_2^{(0)}P\end{pmatrix}\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}X_1^{(0)}-(X_1^{(0)})^T\\X_2^{(0)}-PX_2^{(0)}P\end{pmatrix}\right\|^2.$$

上式等号右端第二项为固定值. 由此可得：求解问题 II 等价于求 $(\widehat{X}_1, \widehat{X}_2) \in S_E$ 使得

$$\begin{aligned}&\left\|\begin{pmatrix}\widehat{X}_1\\ \widehat{X}_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}X_1^{(0)} + (X_1^{(0)})^T\\ X_2^{(0)} + PX_2^{(0)}P\end{pmatrix}\right\|\\ =&\min_{(X_1,X_2)\in S_E}\left\{\left\|\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}X_1^{(0)} + (X_1^{(0)})^T\\ X_2^{(0)} + PX_2^{(0)}P\end{pmatrix}\right\|\right\}.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}&\widetilde{X}_1 = X_1 - \frac{1}{2}(X_1^{(0)} + (X_1^{(0)})^T), \qquad \widetilde{X}_2 = X_2 - \frac{1}{2}(X_2^{(0)} + PX_2^{(0)}P),\\ &\widetilde{F}_1 = F_1 - \frac{1}{2}A_1(X_1^{(0)} + (X_1^{(0)})^T)B_1 - \frac{1}{2}A_2(X_2^{(0)} + PX_2^{(0)}P)B_2,\\ &\widetilde{F}_2 = F_2 - \frac{1}{2}C_1(X_1^{(0)} + (X_1^{(0)})^T)D_1 - \frac{1}{2}C_2(X_2^{(0)} + PX_2^{(0)}P)D_2.\end{aligned}$$

那么， LMEs(3) 等价于 LMEs,

$$g(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2) = \begin{pmatrix}A_1^T\widetilde{F}_1B_1^T + C_1^T\widetilde{F}_2D_1^T + B_1\widetilde{F}_1^TA_1 + D_1\widetilde{F}_2^TC_1\\ A_2^T\widetilde{F}_1B_2^T + C_2^T\widetilde{F}_2D_2^T + PA_2^T\widetilde{F}_1B_2^TP + PC_2^T\widetilde{F}_2D_2^TP\end{pmatrix}. \tag{11}$$

那么，求解问题 II 等价于求 LMEs(11) 的极小范数约束 1–5 解 $(\widetilde{X}_1^*, \widetilde{X}_2^*)$.

将 MCG1–5 算法用于 LMEs(11), 并按式 (9) 取初始矩阵 $(\widetilde{X}_1^{(1)}, \widetilde{X}_2^{(1)})$, 可求得唯一极小范数约束 1–5 最小二乘解 $(\widetilde{X}_1^*, \widetilde{X}_2^*)$, 从而可得问题 II 的解

$$\begin{pmatrix}\widehat{X}_1\\ \widehat{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widetilde{X}_1^*\\ \widetilde{X}_2^*\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}X_1^{(0)} + (X_1^{(0)})^T\\ X_2^{(0)} + PX_2^{(0)}P\end{pmatrix}. \tag{12}$$

5 数值算例

例 1 用 MCG1–5 算法 (Matlab7.0 软件 -CPU2.00GHz 微机) 求 LMEs(1) 的约束 1–5 最小二乘解和极小范数约束 1–5 最小二乘解, 并在解集合 S_E 中求给定矩阵 $X_1^{(0)}, X_2^{(0)} \in R^{n\times n}$ 的最佳逼近矩阵，其中

$$A_1 = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 6 & 9\\ -1 & 0 & -2 & -3\\ 1 & -5 & -2 & 8\end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0\\ -1 & 3 & -4 & 0 & 6\end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -5 & 2 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 8 & 0\end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$C_1 = 2A_1, \quad C_2 = -A_2, \quad D_1 = 3B_1, \quad D_2 = B_2, \quad F_1 = A_1B_2, \quad F_2 = A_2B_1,$

$X_1^{(0)} = \text{hankel (1:4)}, \qquad X_2^{(0)} = \text{toeplitz(1:4)}, \qquad$ 终止准则 $\varepsilon = 10^{-9}$.

(1)　求 LMEs(1) 的约束 1–5 最小二乘解：选取初始矩阵 $X_1^{(1)}=2I$，$X_2^{(1)}=I$ 满足 $(X_1^{(1)},X_2^{(1)})\in\Omega_{1-5}$，由 MCG1–5 算法求得 LMEs(1) 的约束 1–5 最小二乘解为

$$X_1^{(17)}=\begin{pmatrix}2.0576 & -0.0681 & -0.0524 & 0.5661\\ -0.0681 & 1.4973 & -0.8373 & 0.1670\\ -0.0524 & -0.8373 & 0.6595 & -0.0776\\ 0.5661 & 0.1670 & -0.0776 & 0.4813\end{pmatrix},$$

$$X_2^{(17)}=\begin{pmatrix}0.3243 & 0.0424 & -0.2248 & -0.4238\\ 0.0424 & 0.3243 & 0.2248 & -0.4238\\ 0.1138 & -0.1138 & 0.0464 & 0\\ 0.3533 & 0.3533 & 0 & 0.0634\end{pmatrix},$$

$$\|R_{17}\|=9.8772e-10,\qquad t=0.0105s,$$

$$\left\|\begin{pmatrix}A_1X_1^{(17)}B_1+A_2X_2^{(17)}B_2\\ C_1X_1^{(17)}D_1+C_2X_2^{(17)}D_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}\right\|=52.9414.$$

易见，LMEs(1) 没有约束 1–5 解，而 $(X_1^{(17)},X_2^{(17)})$ 是其一组约束 1–5 最小二乘解.

(2)　求 LMEs(1) 的极小范数约束 1–5 最小二乘解: 选取初始矩阵 $X_1^{(1)}=X_2^{(1)}=O$ (在式 (11) 中取 $H_1=H_2=O$), 由 MCG1–5 算法求得 LMEs(1) 的唯一极小范数约束 1–5 最小二乘解为

$$X_1^{(19)}=\begin{pmatrix}0.2132 & 0.2096 & 0.4216 & 0.1727\\ 0.2096 & -0.0142 & -0.0237 & 0.2568\\ 0.4216 & -0.0237 & -0.0318 & 0.0518\\ 0.1727 & 0.2568 & 0.0518 & 0.2846\end{pmatrix},$$

$$X_2^{(19)}=\begin{pmatrix}0.0212 & 0.1036 & -0.0426 & -0.4238\\ 0.1036 & 0.0212 & 0.0426 & -0.4238\\ -0.0790 & 0.0790 & 0.2392 & 0\\ 0.2044 & 0.2044 & 0 & 0.0624\end{pmatrix},$$
$$R_{19}\|=1.2226e-10,\qquad t=0.9562s.$$

解矩阵的范数为 1.1454, 而 (1) 中解矩阵的范数为 3.1977 .

(3) 求给定矩阵 $X_1^{(0)},X_2^{(0)}\in R^{n\times n}$ 的最佳逼近矩阵: 选取初始矩阵 $\widetilde{X}_1^{(1)}=\widetilde{X}_2^{(1)}=O$, 用 MCG1–5 算法可求得 LMEs(11) 的极小范数约束 1–5 解 $(\widetilde{X}_1^{(18)},\widetilde{X}_2^{(18)})$, $t=1.0165$s, 实际误差为 $\|R_{18}\|=6.5128e-10$. 由式 (12) 可求得 $(X_1^{(0)},X_2^{(0)})$ 在 S_E 中的最佳逼近矩阵

为

$$\widehat{X}_1=\begin{pmatrix}-0.3413 & 0.3740 & -0.0622 & 2.5879\\ 0.3740 & 1.8610 & 2.1016 & -1.0778\\ -0.0622 & 2.1016 & -3.0374 & -0.1549\\ 2.5879 & -1.0778 & -0.1549 & 1.4922\end{pmatrix},$$

$$\widehat{X}_2=\begin{pmatrix}1.1671 & 1.3740 & 0.0196 & -0.4238\\ 1.3740 & 1.1671 & -0.0196 & -0.4238\\ 0.9911 & -0.9911 & 0.8309 & 0\\ 0.4943 & 0.4943 & 0 & 0.0634\end{pmatrix}.$$

例 2 用 MCG1–5 算法求 LMEs(1) 的约束 1–5 最小二乘解, 其中 A_i, B_i, C_i, D_i 和终止准则同例 1, 而 $F_1=A_1B_1+A_2B_2$, $F_2=C_1D_1+C_2D_2$, 选取初始矩阵 $X_1^{(1)}=2I$, $X_2^{(1)}=I$ 满足 $(X_1^{(1)},X_2^{(1)})\in\Omega_{1-5}$, 由 MCG1–5 算法求得 LMEs(1) 的约束 1–5 最小二乘解为

$$X_1^{(19)}=\begin{pmatrix}1.9222 & -0.1389 & -0.2370 & 0.1967\\ -0.1389 & 1.7558 & -0.4071 & 0.0449\\ -0.2370 & -0.4071 & 1.3487 & -0.0647\\ 0.1967 & 0.0449 & -0.0647 & 1.0983\end{pmatrix},$$

$$X_2^{(19)}=I,\qquad \|R_{19}\|=1.8863e-10,\qquad t=0.0141s,$$

$$\left\|\begin{pmatrix}A_1X_1^{(19)}B_1+A_2X_2^{(19)}B_2\\ C_1X_1^{(19)}D_1+C_2X_2^{(19)}D_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}\right\|=9.0180e-13.$$

易见， LMEs(1) 有约束 1–5 解，而 $(X_1^{(19)},X_2^{(19)})$ 是其一组约束 1–5 解.

6 结论

本文建立了求 LMEs(1) 的约束 1–5 最小二乘解的迭代算法．对于任意选取的初始约束 1–5 矩阵，该算法都可在有限步内得到一组约束 1–5 最小二乘解．选取特殊的初始约束 1–5 矩阵时，可得到极小范数约束 1–5 最小二乘解．特别的，当 LMEs(1) 有约束 1–5 解时，该算法得到的约束 1–5 最小二乘解就是 LMEs(1) 的约束 1–5 解．另外，还可求得指定矩阵在该 LMEs 的异类约束最小二乘解集合中的最佳逼近．该算法稍作修改，也可用于求多变量 LMEs 的其它异类约束最小二乘解及其最佳逼近问题.

参 考 文 献

[1] Woude V J W. Almost Non-interating Control by Measurement Feedback. *System Control Lett.*, 1987, 9(1): 7–16

[2] Dehghan Mehdi, Hajarian Masoud. Finite Iterative Algorithms for the Reflexive and Anti-reflexive Solutions of the Matrix Equation $A_1X_1B_1+C_1Y_1D_1=C$. *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, 49: 1937–1959

[3] 袁永新，张红晔，戴华．矩阵方程 $XA-YA=D$ 的广义中心对称解及其最佳逼近．高等学校计算数学学报, 2009, 31(1): 1–10

(Yuan Y X, Zhang H Y, Dai H. Generalized Centrosymmetric Solutions of the Matrix Equation $XA-YA=D$ and an Associated Optimal Approximation. *Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities*, 2009, 31(1): 1–10)

[4] Wang M H, Cheng X H, Wei M S. Iterative Algorithms for Solving the Matrix Equation $AXB+CX^TD=E$. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 187: 622–629

[5] 郑凤芹，张凯院．求多变量线性矩阵方程组自反解的迭代算法．数值计算与计算机应用, 2010, 31(1): 39–54

(Zheng F Q, Zhang K Y. An Iterative Method for the Reflexive Solutions of the Linear Matrix Equations with Several Variables. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2010, 31(1): 39–54)

[6] Hou J J, Peng Z Y, Zhang X L. An Iterative Method for the Least Squares Symmetric Solution of Matrix Equation $AXB=C$. *Numer Algor*, 2006, 42: 181–192

[7] 袁仕芳，廖安平，雷渊．矩阵方程 $AXB+CYD=F$ 的对称极小范数最小二乘解．计算数学, 2007, 29(2): 203–216

(Yuan S F, Liao A P, Lei Y. Least Squares Symmetric Solution of the Matrix Equation $AXB+CYD=F$ with the Least Norm. *Mathematica Numerica Sinica*, 2007, 29(2): 203–216)

[8] Li F L, Hu X Y, Zhang L. Least-Squares Mirrosymmetric Solution for Matrix Equations ($AX=B$, $XC=D$). *Numerical Mathematics: a Journal of Chinese Universities*, 2006, 15(3): 217–226

[9] Zhang K Y, Wu J, Xie P Y. An Iterative Method for Solving Linear Matrix Equation with Several Variables over Different Constrained Matrices. In: Jiang Erxiong, Proceedings of 9th ICMTA, Vol.2, World Academic Press, 2010: 152–155

[10] 张凯院，徐仲．数值代数 (第 2 版修订本)．北京：科学出版社， 2010: 25–27, 198–243

(Zhang K Y, Xu Z. Numeric Algebra (the Second Revised Edition). Beijing: Science Press, 2010: 25–27, 198–243)

[11] 张贤达．矩阵分析与应用．北京：清华大学出版社， 2006: 105–113

(Zhang X D . Analysis and Application of Matrix. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 105–113)

MCG Method for a Different Constrained Least Square Solution of Two-variables Linear Matrix Equations for Recurrent Event Data

Liu Xiaomin, Zhang Kaiyuan

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072)

(*E-mail: xiaoming0521@163.com*)

Abstract Based on the modified conjugate gradient method for same constrained least square solution of the linear matrix equations, a modified conjugate gradient method is constructed for different constrained least square solution of the linear matrix equations with two variables. And the convergence of this method can be proved. By this method, a different constrained least square solution can be obtained within finite iterative steps in absence of roundoff errors, and the different constrained least square solution with least-norm can be got by choosing special initial matrices. In addition, the optimal approximation matrix to any given matrix can be obtained in the set of the different constrained least square solutions. Examples show that the method is efficient.

Key words linear matrix equations; different constrained least square solution; modified conjugate gradient method; optimal approximation

MR(2000) Subject Classification 65F10; 15A24

Chinese Library Classification 0241.6