第 34 卷 第 4 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 34 No. 4
2011 年 7 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA July, 2011

一类广义隐互补问题的外梯度法

郑邦贵

(南京工业大学理学院应用数学系，南京 210009)

(E-mail: zheng_banggui@163.com)

殷洪友

(南京航空航天大学理学院，南京 210016)

摘　要　隐互补问题在自然科学中的诸多领域有着广泛的应用．本文研究了一类广义隐互补问题．本文将外梯度法应用到这类广义隐互补问题中，研究了在伪单调的条件下算法的收敛性，并证明了算法具有 R- 线性收敛性.

关键词　广义隐互补问题；外梯度法；　R- 线性收敛性

MR(2000) 主题分类　90C33

中图分类　O211.2

1　引言

投影法是求解互补问题的一类基本而重要的计算方法. 它源于 Goldstein[1] 和 Levitin-Polyak[2] 的求解凸约束优化问题的投影梯度法．然而，早期的收敛性结果要求 f 强单调和 Lipschitz 连续的．无疑，这个条件太强，而把许多实际问题排除在外．　Korpelevich [3] 利用预测 - 校正的思想将 f 强单调性降为单调性．进一步，采用广义 Armijo 搜索原则调整参数，去掉了 f Lipschitz 连续的要求．本文将外梯度法应用到一类广义隐互补问题中. 广义隐互补问题比目前所有文献中的各类互补问题具有更一般的形式，从而研究的广义隐互补问题具有更广泛的适用范围．我们首先将建立这类广义隐互补问题与不动点方程之间的等价性，接着建立这类广义隐互补问题的外梯度法，研究在伪单调的条件下算法的收敛性，并证明算法具有 R- 线性收敛性.

2　基本定义和投影性质

设 H 是一个有限维 Hilbert 空间，$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\forall x \in H$，K 是 H 中的一个凸

本文 2010 年 6 月 4 日收到．2011 年 5 月 29 日收到修改稿.

锥，函数 $f,g:D\to H$，D 是 H 中的一个闭子集．考虑如下的一类广义隐互补问题：

ICP (f,g): 求 $x^*\in D$, 使 $g(x^*)\in K$，$f(x^*)\in K^*$，$\langle f(x^*),g(x^*)\rangle=0$.

由广义隐互补问题的定义可以看出，如果 $D=K=R_n^+$ 且 $g=I$, 则广义隐互补问题退化为经典的非线性互补问题：

NCP(f): 求 $x^*\in K$, 使 $f(x^*)\in K^*,\langle f(x^*),x^*\rangle=0$.

这个问题已经被国内外很多学者讨论过．因此，本文所研究的问题具有更广泛的适用范围．

定义 1[4] 设 $x\in H$，$P_K(x)\in K$, 如果 $\|x-P_K(x)\|=\min\limits_{y\in K}\|x-y\|$, 则称 $P_K(x)$ 是 x 在 K 上的投影．

定义 2[5] 设 $x_1,x_2\in K$, 如果存在 $\alpha>0$, 满足

$$\langle f(x_2)-f(x_1),g(x_2)-g(x_1)\rangle\geq\alpha\|g(x_2)-g(x_1)\|^2,$$

则称 f 关于 g 强单调．

类似于 [4] 的 f 伪单调的定义，结合定义 2, 我们引入 f 关于 g 伪单调的定义．

定义 3 设 $x_1,x_2\in K$, 满足

$$\langle f(x_1),g(x_2)-g(x_1)\rangle\geq 0\Longrightarrow\langle f(x_2),g(x_2)-g(x_1)\rangle\geq 0,$$

则称 f 关于 g 伪单调．

定义 4[5] 设 $x_1,x_2\in K$, 如果存在 $L>0$, 满足

$$\|f(x_2)-f(x_1)\|\leq L\|g(x_2)-g(x_1)\|,$$

则称 f 关于 g-Lipschitz 连续．

性质 1[4] 设 $x_0\in R^n$，$y_0\in K$, 则 $y_0=P_k(x_0)$ 的充要条件是以下两个条件同时成立：

(1) $\langle y_0-x_0,y\rangle\geq 0,\ \forall y\in K$;

(2) $\langle y_0-x_0,y_0\rangle=0$.

性质 2[4] 设 $\forall x,\in R^n$，$P_k(x)$ 为 x 在 K 上的投影，则

$$\|P_k(x)-y\|^2\leq\|x-y\|^2-\|P_k(x)-x\|^2,\qquad\forall y\in K.$$

对于非线性互补问题 NCP (f) 可以转化为不动点问题求解．下面引理 1 是互补问题与不动点问题等价性的经典结论．

引理 1[4] (NCP(f)) 有解 x^* 的充要条件是映射 $T:R^n\to K$，$T(x)=P_k(x-\lambda f(x))$ 在 H 中有不动点 $x^*=T(x^*)$, 其中 $\lambda>0$ 为任意常数．

上述结论可推广到隐互补问题 ICP(f,g).

定理 1 (ICP(f,g)) 有解 x^* 的充要条件是有点 $x^*\in K$, 满足不动点方程 $g(x^*)=P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))$, 其中 $\lambda>0$ 为任意常数．

证 由投影性质 1 知：

(1) $\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-(g(x^*)-\lambda f(x^*)),y\rangle \geq 0,\ \forall\, y\in K$;

(2) $\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-(g(x^*)-\lambda f(x^*)),P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))\rangle = 0$.

$\Longrightarrow$ 在 (1) 中取 $y=g(x^*)$, 则

$$\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-(g(x^*)-\lambda f(x^*)),g(x^*)\rangle \geq 0.$$

由 (2) 知：

$$\begin{aligned}0 =&\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-(g(x^*)-\lambda f(x^*)),P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))\rangle\\ =&\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-(g(x^*)-\lambda f(x^*)),P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-g(x^*)+g(x^*)\rangle\\ =&\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-g(x^*)+\lambda f(x^*),P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-g(x^*)\rangle\\ &+\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-(g(x^*)-\lambda f(x^*)),g(x^*)\rangle\\ =&\| P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-g(x^*)\|^2+\lambda\langle f(x^*),P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*)\rangle-\lambda\langle f(x^*),g(x^*)\rangle\\ &+\langle P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-(g(x^*)-\lambda f(x^*)),g(x^*)\rangle.\end{aligned}$$

又 x^* 是 ICP(f,g) 的解，所以

$$f(x^*)\in K^*,\qquad \langle f(x^*),g(x^*)\rangle=0,\qquad \langle f(x^*),P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*)\rangle=0.$$

因此

$$\| P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))-g(x^*)\|^2=0,$$

即

$$g(x^*)=P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*)).$$

$\Longleftarrow$ 设点 $x^*\in K$, 满足不动点方程 $g(x^*)=P_k(g(x^*)-\lambda f(x^*))\in K$, 分别代入 (1),(2) 得：

(1) $\langle\lambda f(x^*)),y\rangle\geq 0,\ \forall\, y\in K$, 即 $f(x^*)\in K^*$;

(2) $\langle\lambda f(x^*)),g(x^*)\rangle=0$, 又 $\lambda>0$, 则 $\langle f(x^*)),g(x^*)\rangle=0$, 所以 $x^*\in K$ 是 ICP(f,g) 的解.

3 广义隐互补问题的外梯度法

给定 $x\in H$, 令 $g(x(\lambda))=P_K(g(x)-\lambda f(x)),\ \lambda\geq 0$ 且 $e(x,\lambda)=g(x)-g(x(\lambda))$.

引理 2 $\frac{\|e(x,\lambda)\|}{\lambda}$ 关于变量 $\lambda>0$ 不增 (仿照 Calamai 在 [6] 中的证明).

[5,7] 给出了这类隐互补问题的解的存在性定理和几种迭代算法，并证明了迭代算法在 f 关于 g 强单调且 Lipschitz 连续的条件下的收敛性. 我们利用定理 1 中的不动点方程构造迭代公式：

$$g(x^{k+1})=P_k(g(x^k)-\lambda f(x^k)).$$

Noor M A 在 [8–10] 中证明了此算法在 f,g 各自强单调且 Lipschitz 连续的条件下的收敛性. 进一步，我们采用预测 - 校正的方法构造迭代公式：

算法 1

$$g(\overline{x}^k) = P_k(g(x^k) - \lambda f(x^k)),$$
$$g(x^{k+1}) = P_k(g(x^k) - \lambda f(\overline{x}^k)).$$

此算法计算量增加了，但可将强单调性降为单调性．为了进一步去掉 Lipschitz 性，我们采用某种搜索规则调整参数 λ, 具体方法如下：

算法 2

步骤 0 (初始步) 设任意给定初值 $x^0 \in K,\ g(x^0) \in K,\ 0 \Rightarrow k,$

步骤 1 (预测步) 若 x^k 不是 (ICP) 的解，则通过下面公式计算 $\overline{x}^k$:

$$g(\overline{x}^k) = P_k(g(x^k) - \lambda^k f(x^k)).$$

这里 $\lambda^k = \gamma l^{m_k}$ 和 m_k 是使下式成立的最小非负整数：

$$\|f(x^k) - f(\overline{x}^k)\| \le u\frac{\|g(x^k) - g(\overline{x}^k)\|}{\lambda^k} = u\frac{\|e(x^k, \lambda^k)\|}{\lambda^k}, \qquad 0 < u < 1. \tag{1}$$

步骤 2 (校正步)

$$g(x^{k+1}) = P_k(g(x^k) - \lambda^k f(\overline{x}^k)).$$

步骤 3 $k+1 \Rightarrow k$. 返回步骤 1.

注 1 由 f 的连续性及 $\frac{\|e(x,\lambda)\|}{\lambda} < \infty$ 的不增性，如果 x^k 不是 ICP(f,g) 的解，则存在充分小的 λ^k 满足 (1), 因此，算法 2 有意义．又若 $K \subset g(D)$, 则每步迭代 $\overline{x}^k, x^{k+1}$ 存在但不一定唯一.

定理 2 设 $K \subset g(D)$, f 在 K 上关于 g 伪单调， f, g 连续且 ICP(f,g) 的解集 X^* 非空且满足

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow \infty} \|g(x)\| = \infty,$$

则算法 2 产生的无穷点列 $\{x^k\}\{\overline{x}^k\}$ 满足

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|g(x^k) - g(\overline{x}^k)\| = 0.$$

进一步， $\{x^k\}$ 收敛到 ICP(f,g) 的一个解点.

证 因 ICP(f,g) 的解集非空，不妨设 $x^* \in X^*$, 即

$$g(x^*) \in K, \qquad f(x^*) \in K^*, \qquad \langle f(x^*), g(x^*)\rangle = 0.$$

由于 f 在 K 上关于 g 伪单调，则

$$\langle f(x^*), g(\overline{x}^k) - g(x^*)\rangle = \langle f(x^*), g(\overline{x}^k)\rangle \ge 0 \Longrightarrow \langle f(\overline{x}^k), g(\overline{x}^k) - g(x^*)\rangle \ge 0.$$

又

$$\begin{aligned}&\langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(x^*)\rangle = \langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k) + g(\overline{x}^k) - g(x^*)\rangle \\ =&\langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle + \langle f(\overline{x}^k), g(\overline{x}^k) - g(x^*)\rangle \ge \langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle.\end{aligned}$$

所以
$$\langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(x^*)\rangle \geq \langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle.$$
又由性质 2 知
$$\begin{aligned}
&\|g(x^{k+1}) - g(x^*)\|^2 \leq \|g(x^k) - \lambda^k f(\overline{x}^k) - g(x^*)\|^2 - \|g(x^{k+1}) - (g(x^k) - \lambda^k f(\overline{x}^k))\|^2 \\
=&\|g(x^k) - g(x^*)\|^2 - 2\lambda^k\langle f(\overline{x}^k), g(x^k) - g(x^*)\rangle \\
&- 2\lambda^k\langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(x^k)\rangle - \|g(x^{k+1}) - g(x^k)\|^2 \\
\leq&\|g(x^k) - g(x^*)\|^2 - 2\lambda^k\langle f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle - \|g(x^{k+1}) - g(x^k)\|^2 \\
=&\|g(x^k) - g(x^*)\|^2 - \|g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\|^2 - \|g(x^k) - g(\overline{x}^k)\|^2 \\
&+ 2\langle g(x^k) - g(\overline{x}^k) - \lambda^k f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle.
\end{aligned} \tag{2}$$
现在考虑上面最后一项．由于
$$g(\overline{x}^k) = P_k(g(x^k) - \lambda^k f(x^k)).$$
由性质 1 知
$$\langle g(x^k) - \lambda^k f(x^k) - g(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle \leq 0.$$
最后一项：
$$\begin{aligned}
&2\langle g(x^k) - g(\overline{x}^k) - \lambda^k f(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle \\
=&2\langle g(x^k) - \lambda^k f(x^k) - g(\overline{x}^k) + \lambda^k(f(x^k) - f(\overline{x}^k)), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle \\
=&2\langle g(x^k) - \lambda^k f(x^k) - g(\overline{x}^k), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle + 2\lambda^k\langle (f(x^k) - f(\overline{x}^k)), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle \\
\leq&2\lambda^k\langle (f(x^k) - f(\overline{x}^k)), g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\rangle \\
\leq&(\lambda^k)^2\|f(x^k) - f(\overline{x}^k)\|^2 + \|g(x^{k+1}) - g(\overline{x}^k)\|^2.
\end{aligned} \tag{3}$$
将 (3) 代入 (2) 中得
$$\|g(x^{k+1}) - g(x^*)\|^2 \leq \|g(x^k) - g(x^*)\|^2 - \|g(x^k) - g(\overline{x}^k)\|^2 + (\lambda^k)^2\|f(x^k) - f(\overline{x}^k)\|^2.$$
又由 (1) 得
$$\|g(x^{k+1}) - g(x^*)\|^2 \leq \|g(x^k) - g(x^*)\|^2 - (1-u^2)\|g(x^k) - g(\overline{x}^k)\|^2. \tag{4}$$
又 $0 < u < 1$, 则 $\|g(x^k) - g(x^*)\|^2$ 具有收缩性质， $\{g(x^k)\}$ 有界，且
$$(1-u^2)\sum_{k=0}^{\infty}\|g(x^k) - g(\overline{x}^k)\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty}\{\|g(x^k) - g(x^*)\|^2 - \|g(x^{k+1}) - g(x^*)\|^2\} < +\infty.$$
由此推出
$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\|g(x^k) - g(\overline{x}^k)\| = 0.$$

又因为

$$\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty}\|g(x)\|=\infty.$$

从而 $\{x^k\}$ 有界，设 x_0 是 $\{x^k\}$ 的一个聚点，下证 x_0 是 (ICP) 的一个解.

不妨设 $\{x^k\}$ 的一个子列 $\{x^{k_i}\}$ 收敛到 x_0, 由 g 连续知： $g(x^{k_i})\longrightarrow g(x_0)$, 则

$$\|g(\overline{x}^{k_i})-g(x_0)\|\le\|g(\overline{x}^{k_i})-g(x^{k_i})\|+\|g(x^{k_i})-g(x_0)\|\longrightarrow 0.$$

若 $\lambda^k\ge\lambda_{\min}>0$, 则由 $\frac{\|e(x,\lambda)\|}{\lambda}$ 的不增性知

$$\min\{1,\lambda\}\|e(x,1)\|\le\|e(x,\lambda)\|\le\max\{1,\lambda\}\|e(x,1)\|.$$

因此

$$\|e(x_0,1)\|=\lim_{k_i\longrightarrow+\infty}\|e(x^{k_i},1)\|\le\lim_{k_i\longrightarrow+\infty}\frac{\|e(x^{k_i},\lambda_{\min})\|}{\min\{1,\lambda_{\min}\}}\longrightarrow 0.$$

若 $\lambda^k\longrightarrow 0$, 由 $\frac{\|e(x,\lambda)\|}{\lambda}$ 的不增性及算法对参数 λ^{k_i} 的选取知，对所有充分大的 k_i,

$$\begin{aligned}\|e(x_0,1)\|&=\lim_{k_i\longrightarrow+\infty}\|e(x^{k_i},1)\|\le\lim_{k_i\longrightarrow+\infty}\frac{\|e(x^{k_i},\frac{1}{l}\lambda^{k_i})\|}{\frac{1}{l}\lambda^{k_i}}\\&\le\lim_{k_i\longrightarrow+\infty}\frac{1}{u}\Big\|f(x^{k_i})-f\Big(x^{k_i}\Big(\frac{1}{l}\lambda^{k_i}\Big)\Big)\Big\|\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

综上两种情形，是 ICP(f,g) 的一个解．证毕.

推论 1 设 $K\subset g(D)$, f 在 K 上关于 g 伪单调且 Lipschitz 连续 (系数为 $L>0$), f,g 连续且 ICP (f,g) 的解集 X^* 非空， $0<\lambda<\frac{1}{L}$, 且满足

$$\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty}\|g(x)\|=\infty,$$

则算法 1 产生的无穷点列收敛到 ICP(f,g) 的一个解点.

推论 2 在与定理 2 相同条件下，必有

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\|g(x^k)-g(x^{k+1})\|=0.$$

证

$$\begin{aligned}&\|g(x^k)-g(x^{k+1})\|\le\|g(x^k)-g(\overline{x}^k)\|+\|g(\overline{x}^k)-g(x^{k+1})\|\\=&\|g(x^k)-g(\overline{x}^k)\|+\|(g(x^k)-\lambda^kf(x^k))-(g(x^k)-\lambda^kf(\overline{x}^k))\|\\\le&\|g(x^k)-g(\overline{x}^k)\|+\lambda^k\|f(x^k))-f(\overline{x}^k))\|\le(1+u)\|g(x^k)-g(\overline{x}^k)\|.\end{aligned}$$

由定理 2 得所证结论．证毕.

定理 3 假设 $K\subset g(D)$ 且 (ICP) 满足下面条件:

(a) f 关于 g 伪单调，且 ICP(f,g) 的解集 X^* 非空;

(b) f 关于 g-Lipschitz 连续 (系数为 $L>0$), 且

$$\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty}\|g(x)\|=\infty.$$

(c) 局部误差界成立，即存在常数 $\tau>0$, $\delta>0$ 使得

$$\operatorname{dist}(g(x),g(X^*))\leq\tau\|e(x,1)\|,\qquad\forall\, x\in R^n,\qquad\|e(x,1)\|\leq\delta,$$

则由算法 2 产生的无穷点列 $g(x^k)$ 必 R- 线性收敛.

证 由 (1) 知，对所有 λ^k, 都有下式成立

$$\Big\|f(x^{k_i})-f\Big(x^{k_i}\Big(\frac{1}{l}\lambda^{k_i}\Big)\Big)\Big\|\geq u\frac{\|e(x^{k_i},\frac{1}{l}\lambda^{k_i})\|}{\frac{1}{l}\lambda^{k_i}}.$$

又由条件 (b) 知

$$\lambda^k\geq\frac{lu}{L}:=\lambda>0,\qquad\forall\, k\in N.$$

由不等式

$$\|e(x^k,1)\|\leq\frac{\|g(x^k)-g(\overline{x}^k)\|}{\min\{1,\lambda\}}\longrightarrow 0.$$

因此，存在充分大的 $k_0\in N$, 使得

$$\|e(x^k,1)\|\leq\delta,\qquad\forall\, k\geq k_0.$$

因而由 (c)

$$\frac{1}{\tau}\operatorname{dist}(g(x^k),g(X^*))\leq\|e(x^k,1)\|,\qquad\forall\, x\in R^n.$$

选择 $x^*\in X^*$, 使

$$\|g(x^k)-g(x^*)\|=\operatorname{dist}(g(x^k),g(X^*)),$$

则由 (5) 和上式知

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}(g(x^{k+1}),g(X^*))^2\leq\|g(x^{k+1})-g(x^*)\|^2\\\leq&\|g(x^k)-g(x^*)\|^2-(1-u^2)\|g(x^k)-g(\overline{x}^k)\|^2\\\leq&\Big(1-\frac{1-u^2}{\tau^2}\Big)\operatorname{dist}(g(x^k),g(X^*))^2,\qquad\forall\, k\geq k_0,\end{aligned}$$

即 Q- 线性收敛到零，由推论 1 的证明和 (4) 知

$$\begin{aligned}&\|g(x^k)-g(x^{k+1})\|^2\leq(1+u)^2\|g(x^k)-g(\overline{x}^k)\|^2\\\leq&\frac{(1+u)^2}{1-u^2}\operatorname{dist}(g(x^k),g(X^*))^2,\qquad\forall\, k\geq k_0.\end{aligned}$$

因此，点列的收敛速率为 R- 线性收敛的．证毕.

4 结论

本文讨论了一类适用范围更广的隐互补问题的外梯度法，外梯度法具有理论上的优势，而数值计算简单则是该法的另一优势．本文在搜索参数时，采用一次投影，甚至多次投影得到参数．在 [10] 中，提出用线性搜索，它仅需一次投影计算，此搜索方法也可应用到这类广义隐互补问题中．其算法的合理性及其相应的收敛理论，收敛速度有待研究．对于外梯度法的其它改进或变形是否也可用于这类广义隐互补问题，也是值得探讨的问题．

参 考 文 献

[1] Goldstein A A. Convex Programming in Hilbert Space, 1964, 70: 709–710

[2] Levitin E S, Polyak B T. Constrained Minimization Problems. *J. USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1966, 6: 1–50

[3] Korpelevich G M. The Extragradient Method for Finding Saddle Points ad other Problems. *J. Matecon*, 1976, 12: 747–756

[4] 韩继业，修乃华，戚厚铎．非线性互补理论与算法．上海：科学技术出版社， 2003
(Han Jiye, Xiu Naihua, Qi Houzhe. The Theorems and Algorithms for Nonlinear Comlementarity Problem. Shanhai: Shanghai Scientific and Technical Education Publishing House, 2003)

[5] Ahmad K, Kazmi K R, Rehman N. Fixed-point technique for implicit comlementarity problem in Hilberet lattice. *J. Journal of Optimization Theory and Applications*, 1997, 93: 72–97

[6] Calamai P H, More J J. Projected Gradient Methods for Linearly Constrained Problems. *J. Math. Programming*, 1987, 39: 93–116

[7] Vyacheslav V, Kalashnikov. Solvability of Implicit Complementarity Problems. *J. Annals of Operations Research*, 2002, 116: 199–221

[8] Noor M A. Change of Variable Method for Generalized Complementarity. *J. Problems Journal Of Optimization Theory and Applications*, 1999, 389–395

[9] Noor M A. Projection Iterative Methods for Extended General Variational Inequalities. *J. Appl. Math. Comput.*, 2010, 32: 83–95

[10] Iusem A N, Svaiter B F. A Variant of Korpelevich's Method for Variational Inequalities with a New Search strategy. *J. Optimization*, 1997, 42: 309–321

The Extragradient Algorithm for a Form of Generalized Implicit Complementarity Problem

ZHENG Banggui

(*Department of Applied Mathematics, Nanjing university of technology, Nanjing* 210009)

(*E-mail: zheng_banggui@163.com*)

YIN Hongyou

(*Department of Computational Mathematics,*

Nanjing university of aeronautics and astronautics, Nanjing 210016)

Abstract Implicit complementarity problem (ICP) can be applied to many fileds of natural science. In this article, we study a form of generalized implicit complementarity problem. The extragradient method is used to solve ICP. The extragradient algorithm is built about generalized implicit complementarity problem and porve its convergence with pseudomonotone function.

Key words generalized implicit complementarity problem; the extragradient algorithm; R-linearly convergence

MR(2000) Subject Classification 90C33

Chinese Library Classification O212.2