第 34 卷 第 5 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 34 No. 5
2011 年 9 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Sep., 2011

具有两类服务中断的离散时间重试排队分析*

张 冕

(中南大学数学科学与计算技术学院，长沙 410075)

(阜阳师范学院数学与计算科学学院，阜阳 236032)

(E-mail: zhmm198@sohu.com)

侯振挺

(中南大学数学科学与计算技术学院，长沙 410075)

摘 要 本文考虑了具有破坏性和非破坏性服务中断的离散重试排队系统. 两类中断都发生在顾客接受服务的过程中，假设服务台在工作时发生破坏性中断，则正在接受服务的顾客中断服务，进入到重试空间中去，重新尝试以接受服务；若服务台在工作时发生非破坏性中断，则正在接受服务的顾客将等待中断结束后再继续完成剩余的服务量. 求出了系统存在稳态的充分必要条件. 利用补充变量法，求出了系统稳态时系统和重试区域中队长分布的概率母函数，以及其他一些重要的排队指标，并且给出了对应的连续时间下具有两类服务中断的 M/G/1 排队的队长分布的概率母函数. 最后，通过数值算例研究了各种参数对平均队长的影响.

关键词 离散重试排队；服务中断；不可靠服务台

MR(2000) 主题分类 60K25; 90B22

中图分类 O226

1 引言

在经典排队论中，研究最多的是连续时间下的各种排队模型，离散时间的工作比较少. 然而由于许多数字通讯技术的应用是基于离散时间之上的，考虑离散时间下排队系统的建模和分析就非常有意义了. Meisling[1] 首次讨论了离散排队系统，随后有很多学者也致力于这一领域的研究.

本文 2009 年 12 月 11 日收到. 2011 年 5 月 11 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (NO.90820302) 和安徽省高校省级自然科学研究重点项目 (KJ2010A253).

另外熟知，重试排队系统在电话交换系统、计算机网络和通讯网络中得到广泛的应用，过去关于重试排队系统的研究多集中在连续时间系统中，直到 1995 年 Yang 和 Li[2] 才把相应讨论推广到离散时间上．关于重试排队系统的专著或综述，详见 [3–8].

本文在离散时间假设下考虑了具有两类服务中断的重试排队系统．在实际背景中，服务台并不是始终可靠的．当服务台失效时，中断就对应着因服务台失效而导致所需要的修理时间．系统失效状态可分为两类：一类是系统完全失效状态，即破坏性服务中断；一类是系统部分失效状态，即非破坏性服务中断． Fiems[9] 研究了具有多类服务中断的 M/G/1 排队系统，但没有考虑顾客有重试的情况． White 和 Christie[10] 首次讨论了服务中断时间具有指数分布的排队系统， Avi-Itzhak 和 Naor[11] 等在此基础上研究中断时间服从一般分布的排队系统， Federgruen 和 Green[12] 对服务中断的排队系统也做了讨论，以上工作均考虑中断结束后顾客继续接受服务．与上述工作不同，我们假设服务台在工作时若发生破坏性中断，则正在接受服务的顾客中断服务加入到重试空间中去，重新尝试以接受服务；若服务台在工作时发生非破坏性中断，则正在接受服务的顾客将等待中断结束后再继续完成剩余的服务量．这样的假设更符合实际中顾客的行为及问题产生的实际背景.

2　模型描述

我们考虑一个离散时间重试排队系统，时间轴被等分为单位时间间隔，称为时隙 (Slots)．每个时段被标上 $0, 1, \cdots, m, \cdots$. 本文假设所有的排队活动，如到达、离去、重试、中断开始及结束等，都在时隙的边界处发生．因此，有可能同时发生多个事件．为处理方便，我们假设系统是早到达系统 (EAS), 即在时段端点右侧依次发生到达、重试和中断开始，而在时隙端点左侧依次发生服务完毕顾客离去、中断结束等事件.

顾客到达服从参数为 p 的几何到达过程．若顾客到达系统时，服务台正在忙或者处于中断状态，顾客必须离开服务区，经过一个随机时段后再回来重试以得到服务．这些等待重试的顾客被称为重试空间 (Orbit) 里的顾客．若顾客第一次到达或重试顾客到达系统中发现服务台空闲，则立刻接受服务.

重试时间 (同个顾客重试间隔) 服从参数为 $\overline{r} = 1 - r$ 的几何分布，即 r 是一个顾客在一个时隙内不会重试的概率．若多个顾客在一个时隙内重试且服务台空闲，则选其中任一顾客进行服务，其他返回重试空间.

假设服务台在工作中以 Bernoulli 过程中断，中断率为 α ，则 $\overline{\alpha} = 1 - \alpha$ 是服务台在一个时隙内不会中断的概率．若服务发生中断，则以概率 θ 为破坏性中断，正在接受服务的顾客中断服务加入到重试空间中去，重新尝试以接受服务；以概率 $\overline{\theta} = 1 - \theta$ 为非破坏性中断，正在接受服务的顾客将等待中断结束后再继续完成剩余的服务量．顾客服务时间服从一般分布且分布函数为 $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$, 概率母函数为 $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i x^i$.

破坏性中断时间服从独立同分布且分布函数为一般分布的随机变量，分布函数为 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, 概率母函数为 $R(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i x^i$, 其 n 阶阶乘矩为 γ_n; 非破坏性中断时间服从独立

同分布且分布函数为一般分布的随机变量，分布函数为 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, 概率母函数是 $T(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}t_ix^i$, 其 n 阶阶乘矩为 β_n.

为一般起见，我们假设 $0<p<1,\ 0\le r<1,\ 0\le\alpha<1,\ 0\le\theta\le1$. 令

$$\rho=\frac{p\omega[1-S(\omega)]+p\alpha[\omega-S(\omega)](\theta\gamma_1+\overline{\theta}\beta_1)}{\alpha\theta S(\omega)},$$

其中 $\omega=\overline{\alpha}+\alpha\overline{\theta}$. 下节将证明 $\rho<1$ 是本文排队系统模型对应的马氏链的遍历性条件.

3 马尔可夫链

在时刻 m^+(时隙端点 m 的右侧), 系统可由过程 $X_m=\{C_m,N_m,\xi_{1,m},\xi_{2,m},\xi_{3,m}\}$ 表示. 这里 C_m 表示服务台状态 (0,1,2 或 3 分别对应空闲、忙碌、破坏性中断及非破坏性中断), N_m 表示重试空间中顾客人数. 若 $C_m=1,2,3,\ \xi_{1,m},\xi_{2,m}$ 和 $\xi_{3,m}$ 分别表示剩余的服务时间、破坏性中断时间及非破坏性中断时间. 易见 $\{X_m;\ m\ge1\}$ 是本文排队模型的嵌入马氏链，其状态空间为

$$\begin{aligned}&\{(0,n):n\ge0\}\cup\{(1,n,i):n\ge0,i\ge1\}\cup\{(2,n,j):n\ge1,j\ge1\}\\&\cup\{(3,n,i,j):\ n\ge0,i\ge1,j\ge1\}.\end{aligned}$$

下面我们将研究嵌入马氏链 $\{X_m;\ m\ge1\}$ 的平稳分布

$$\begin{aligned}&\pi_{0,n}=\lim_{m\to\infty}P(C_m=0,N_m=n),\qquad n\ge0,\\&\pi_{1,n,i}=\lim_{m\to\infty}P(C_m=1,\ N_m=n,\ \xi_{1,m}=i),\qquad n\ge0,\ i\ge1,\\&\pi_{1,n,j}=\lim_{m\to\infty}P(C_m=2,\ N_m=n,\ \xi_{2,m}=j),\qquad n\ge1,\ j\ge1,\\&\pi_{3,n,i,j}=\lim_{m\to\infty}P(C_m=3,\ N_m=n,\ \xi_{1,m}=i,\ \xi_{3,m}=j),\qquad n\ge0,\quad i\ge1,\quad j\ge1.\end{aligned}$$

平稳状态下系统的 Kolmogorov 方程组为

$$\pi_{0,n}=\overline{p}r^n\pi_{0,n}+\overline{p}r^n\pi_{1,n,1}+(1-\delta_{0n})\overline{p}r^n\pi_{2,n,1},\qquad n\ge1,\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\pi_{1,n,i}=&\overline{p\alpha}\pi_{1,n,i+1}+(1-\delta_{0n})p\overline{\alpha}\pi_{1,n-1,i+1}+p\pi_{1,n,1}s_i+\overline{p}(1-r^{n+1})\pi_{1,n+1,1}s_i\\&+p\pi_{0,n}s_i+\overline{p}(1-r^{n+1})\pi_{0,n+1}s_i+p\pi_{2,n,1}s_i+\overline{p}(1-r^{n+1})\pi_{2,n+1,1}s_i\\&+(1-\delta_{0n})p\pi_{3,n-1,i,1}+\overline{p}\pi_{3,n,i,1},\qquad n\ge0,\quad i\ge1,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\pi_{2,n,j}=&\overline{p}\alpha\theta\sum_{i=2}^{\infty}\pi_{1,n-1,i}r_j+(1-\delta_{1n})p\alpha\theta\sum_{i=2}^{\infty}\pi_{2,n-2,i}r_j\\&+\overline{p}\pi_{2,n,j+1}+(1-\delta_{1n})p\pi_{2,n-1,j+1},\qquad n\ge1,\quad j\ge1,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\pi_{3,n,i,j}=&\overline{p}\alpha\overline{\theta}\pi_{1,n,i+1}t_j+(1-\delta_{0n})p\alpha\overline{\theta}\pi_{1,n-1,i+1}t_j\\&+\overline{p}\pi_{3,n,i,j+1}+(1-\delta_{0n})p\pi_{3,n-1,i,j+1},\qquad n\ge0,\quad i\ge1,\quad j\ge1,\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $\overline{p}=1-p$.

系统正则条件为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{0,n}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{1,n,i}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{2,n,j}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{3,n,i,j}=1.$$

为解 (1)–(4) 式，引入母函数

$$\phi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{0,n}z^n,\qquad \phi_1(x,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{1,n,i}z^nx^i,$$
$$\phi_2(y,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{2,n,j}z^ny^j,\qquad \phi_3(x,y,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{3,n,i,j}z^nx^iy^j$$

和部分母函数

$$\phi_{1,i}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{1,n,i}z^n,\qquad \phi_{2,j}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi_{2,n,j}z^n,\qquad \phi_{3,j}(x,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{3,n,i,j}z^nx^i.$$

公式 (1)–(4) 同时乘以 z^n, 对 n 求和得

$$\phi_0(z)=\overline{p}\phi_0(rz)+\overline{p}\phi_{1,1}(rz)+\overline{p}\phi_{2,1}(rz), \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,i}(z)=&\overline{\alpha}(\overline{p}+pz)\phi_{1,i+1}(z)+\frac{(\overline{p}+pz)s_i}{z}[\phi_{1,1}(z)+\phi_{2,1}(z)]\\&+(\overline{p}+pz)\phi_{3,i,1}(z)+\frac{p(z-1)s_i}{z}\phi_0(z),\qquad i\geq 1,\end{aligned} \tag{6}$$

$$\phi_{2,j}(z)=\alpha\theta(\overline{p}+pz)zr_j[\phi_1(1,z)-\phi_{1,1}(z)]+(\overline{p}+pz)\phi_{2,j+1}(z),\qquad j\geq 1, \tag{7}$$

$$\phi_{3,i,j}(z)=\alpha\overline{\theta}(\overline{p}+pz)t_j\phi_{1,i+1}(z)+(\overline{p}+pz)\phi_{3,i,j+1}(z),\qquad i\geq 1,\quad j\geq 1. \tag{8}$$

公式 (6)–(8) 两边同时分别乘以 x^i, y^j 和 x^iy^j, 并关于 i 或 j 求和

$$\begin{aligned}\frac{x-\overline{\alpha}(\overline{p}+pz)}{x}\phi_1(x,z)=&\frac{[S(x)-\overline{\alpha}z](\overline{p}+pz)}{z}\phi_{1,1}(z)+\frac{(\overline{p}+pz)}{z}S(x)\phi_{2,1}(z)\\&+(\overline{p}+pz)\phi_{3,1}(x,z)+\frac{p(z-1)}{z}S(x)\phi_0(z),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{y-(\overline{p}+pz)}{y}\phi_2(y,z)=\alpha\theta z(\overline{p}+pz)R(y)[\phi_1(1,z)-\phi_{1,1}(z)]-(\overline{p}+pz)\phi_{2,1}(z), \tag{10}$$

$$\frac{y-(\overline{p}+pz)}{y}\phi_3(x,y,z)=\alpha\overline{\theta}(\overline{p}+pz)T(y)\Big[\frac{\phi_1(x,z)}{x}-\phi_{1,1}(z)\Big]-(\overline{p}+pz)\phi_{3,1}(x,z). \tag{11}$$

在 (11) 式中，令 $y=\overline{p}+pz$, 则有

$$(\overline{p}+pz)\phi_{3,1}(x,z)=\alpha\overline{\theta}(\overline{p}+pz)T^*(z)\Big[\frac{\phi_1(x,z)}{x}-\phi_{1,1}(z)\Big],$$

其中 $T^*(z)=T(\overline{p}+pz)$.

把上式分别代入 (11) 和 (9) 式，可以得到

$$\frac{y-(\overline{p}+pz)}{y}\phi_3(x,y,z)=\alpha\overline{\theta}(\overline{p}+pz)[T(y)-T^*(z)]\Big[\frac{\phi_1(x,z)}{x}-\phi_{1,1}(z)\Big], \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{x-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)}{x}\phi_1(x,z)=&\frac{S(x)-z\Lambda(z)}{z}(\overline{p}+pz)\phi_{1,1}(z)+\frac{\overline{p}+pz}{z}S(x)\phi_{2,1}(z)\\&+\frac{p(z-1)}{z}S(x)\phi_0(z),\end{aligned} \tag{13}$$

这里 $\Lambda(z)=\overline{\alpha}+\alpha\overline{\theta}T^*(z)$.

在 (13) 式中，令 $x=1$ 并代入 (10) 式，有

$$\begin{aligned}\frac{y-(\overline{p}+pz)}{y(\overline{p}+pz)}\phi_2(y,z)=&\frac{\overline{p}(1-z)\alpha\theta R(y)}{1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)}\phi_{1,1}(z)+\frac{[\alpha\theta R(y)+\Lambda(z)](\overline{p}+pz)-1}{1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)}\phi_{2,1}(z)\\&+\frac{\alpha\theta R(y)p(z-1)}{1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)}\phi_0(z).\end{aligned} \tag{14}$$

又在 (13) 和 (14) 式中，分别令 $x=\Lambda(z)(\overline{p}+pz)$ 和 $y=\overline{p}+pz$, 有

$$\begin{aligned}&[S^*(z)-z\Lambda(z)](\overline{p}+pz)\phi_{1,1}(z)+(\overline{p}+pz)S^*(z)\phi_{2,1}(z)\\=&p(1-z)S^*(z)\phi_0(z),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\overline{p}(1-z)\alpha\theta R^*(z)\phi_{1,1}(z)+\big\{[\alpha\theta R^*(z)+\Lambda(z)](\overline{p}+pz)-1\big\}\phi_{2,1}(z)\\=&p(1-z)\alpha\theta R^*(z)\phi_0(z),\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $R^*(z)=R(\overline{p}+pz)$, $S^*(z)=S(\Lambda(z)(\overline{p}+pz))$.

由 (15), (16) 式，可以得到

$$\phi_{1,1}(z)=\frac{p(1-z)[1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)]S^*(z)}{(\overline{p}+pz)D(z)}\phi_0(z), \tag{17}$$

$$\phi_{2,1}(z)=\frac{\alpha\theta p(1-z)z[\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-S^*(z)]R^*(z)}{(\overline{p}+pz)D(z)}\phi_0(z), \tag{18}$$

其中

$$D(z)=z\Lambda(z)(\overline{p}+pz)[\alpha\theta R^*(z)+\Lambda(z)]-S^*(z)[\alpha\theta zR^*(z)+\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-1]-z\Lambda(z).$$

下面我们先给出两个引理：

引理 1 (1) 对 $0<z<1$, 不等式

$$z\Lambda(z)(\overline{p}+pz)[\alpha\theta R^*(z)+\Lambda(z)]-S^*(z)[\alpha\theta zR^*(z)+\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-1]\geq z\Lambda(z)$$

成立，当且仅当 $\rho=\frac{p\omega[1-S(\omega)]+p\alpha[\omega-S(\omega)](\theta\gamma_1+\overline{\theta}\beta_1)}{\alpha\theta S(\omega)}<1$.

(2) 当 $\rho<1$, 极限 $\lim\limits_{z\to1}\frac{1-z}{D(z)}$ 存在，且

$$\lim_{z\to1}\frac{1-z}{D(z)}=\frac{1}{\alpha\theta S(\omega)-p\omega[1-S(\omega)]-p\alpha[\omega-S(\omega)](\theta\gamma_1+\overline{\theta}\beta_1)}.$$

证 我们只证明结论 (1), 结论 (2) 可由 (1) 易得. 考虑函数

$$f(z)=z(\overline{p}+pz)[\alpha\theta R^*(z)+\Lambda(z)]-\frac{S^*(z)[\alpha\theta zR^*(z)+\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-1]}{\Lambda(z)}.$$

显然有 $f(1)=1,\ f(0)>0$, 且容易验证 $f(z)$ 满足 $f'(z)>0,\ f''(z)>0,\ z\in[0,1)$, 则对于 $0\le z<1$, 不等式 $f(z)>z$ 成立，当且仅当 $f'(1)<1$.

由于 $f'(1)=1+p+p\alpha(\theta\gamma_1+\overline{\theta}\beta_1)-\frac{S^*(\omega)(p\alpha\theta\gamma_1+p\alpha\overline{\theta}\beta_1+\alpha\theta+p\omega)}{\omega}$, 经简单计算可知，不等式 $f'(1)<1$ 等价于 $\rho=\frac{p\omega[1-S(\omega)]+p\alpha[\omega-S(\omega)](\theta\gamma_1+\overline{\theta}\beta_1)}{\alpha\theta S(\omega)}<1$. 证毕.

把 $\phi_{1,1}(z)$ 和 $\phi_{2,1}(z)$ 分别代入 (13) 和 (14) 式，得

$$\phi_1(x,z)=\frac{S(x)-S^*(z)}{x-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)}\frac{xp(1-z)\Lambda(z)[1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)]}{D(z)}\phi_0(z),$$

$$\phi_2(y,z)=\frac{R(y)-R^*(z)}{y-(\overline{p}+pz)}\frac{y\alpha\theta p(1-z)z[\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-S^*(z)]}{D(z)}\phi_0(z).$$

再把 $\phi_1(x,z)$ 和 $\phi_{1,1}(z)$ 代入 (12) 式，得

$$\begin{aligned}&\phi_3(x,y,z)\\=&\frac{T(y)-T^*(z)}{y-(\overline{p}+pz)}\frac{\Lambda(z)(\overline{p}+pz)S(x)-xS^*(z)}{x-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)}\frac{y\alpha\overline{\theta}p(1-z)[1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)]}{D(z)}\phi_0(z).\end{aligned}\tag{19}$$

然后把 $\phi_{1,1}(rz)$ 和 $\phi_{2,1}(rz)$ 代入 (5) 式，有

$$\begin{aligned}\phi_0(z)=&\overline{p}\Big\{\frac{[1-\Lambda(rz)(\overline{p}+prz)][S^*(rz)-rz\Lambda(rz)(\overline{p}+prz)]}{(\overline{p}+prz)D(rz)}\\&+\frac{\alpha\theta rzR^*(rz)[\Lambda(rz)(\overline{p}+prz)-S^*(rz)]}{(\overline{p}+prz)D(rz)}\Big\}\phi_0(rz)\\=&G(rz)\phi_0(rz).\end{aligned}\tag{20}$$

利用 (20) 式进行迭代我们可以得到

$$\phi_0(z)=\phi_0(0)\prod_{k=1}^{\infty}G(r^kz).\tag{21}$$

引理 2 若 $\rho<1$, 则无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty}G(r^kz)$ 收敛.

证 首先把 $G(z)$ 写成下面的形式

$$G(z)=1+F(z).$$

这里

$$F(z)=pz\frac{[1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-\alpha\theta zR^*(z)][\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-S^*(z)]}{(\overline{p}+pz)D(z)}.$$

由引理 1 知，若 $\rho<1$, 对于 $0<z<1$, $F(z)>0$. 于是

$$\prod_{k=1}^{\infty}G(r^kz)=\prod_{k=1}^{\infty}[1+F(r^kz)],\tag{22}$$

而 (22) 式中无穷乘积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty} G(r^k z)$ 收敛的等价条件是级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} F(r^k z)$ 收敛，又

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(r^{k+1}z)}{F(r^k z)} = r < 1,$$

故引理 2 得证.

由正则条件 $\phi_0(1)+\phi_1(1,1)+\phi_2(1,1)+\phi_3(1,1,1)=1$, 得

$$\phi_0(1) = 1 - \frac{p\omega[1-S(\omega)] + p\alpha[\omega - S(\omega)](\theta\gamma_1 + \overline{\theta}\beta_1)}{\alpha\theta S(\omega)} = 1-\rho.$$

把 $\phi_0(1)$ 代入 (21) 式，得

$$\phi_0(0) = (1-\rho)\Big[\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k)\Big]^{-1}.$$

综上，我们可以得到如下定理.

定理 1 若 $\rho<1$, 则嵌入马氏链 $\{X_m,\ m\in N\}$ 的平稳分布有如下概率母函数

$$\phi_0(z) = \Big\{1 - \frac{p\omega[1-S(\omega)] + p\alpha[\omega - S(\omega)](\theta\gamma_1 + \overline{\theta}\beta_1)}{\alpha\theta S(\omega)}\Big\} \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} G(r^k z)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} G(r^k)},$$

$$\phi_1(x,z) = \frac{S(x)-S^*(z)}{x-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)} \frac{xp(1-z)\Lambda(z)[1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)]}{D(z)}\phi_0(z),$$

$$\phi_2(y,z) = \frac{R(y)-R^*(z)}{y-(\overline{p}+pz)} \frac{y\alpha\theta p(1-z)z[\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-S^*(z)]}{D(z)}\phi_0(z),$$

$$\phi_3(x,y,z) = \frac{T(y)-T^*(z)}{y-(\overline{p}+pz)} \frac{\Lambda(z)(\overline{p}+pz)S(x)-xS^*(z)}{x-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)} \frac{y\alpha\overline{\theta}p(1-z)[1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)]}{D(z)}\phi_0(z).$$

推论 1 系统处于稳态下,

(1) 服务台处于空闲时重试空间顾客人数的边际母函数为 $\phi_0(z)$.

(2) 服务台处于忙碌时重试空间顾客人数的边际母函数为

$$\phi_1(1,z) = \frac{p(1-z)\Lambda(z)[1-S^*(z)]}{D(z)}\phi_0(z).$$

(3) 服务台处于破坏性中断时重试空间顾客人数的边际母函数为

$$\phi_2(1,z) = \frac{\alpha\theta z[1-R^*(z)][\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-S^*(z)]}{D(z)}\phi_0(z).$$

(4) 服务台处于非破坏性中断时重试空间顾客人数的边际母函数为

$$\phi_3(1,1,z) = \frac{\alpha\overline{\theta}[1-T^*(z)][\Lambda(z)(\overline{p}+pz)-S^*(z)]}{D(z)}\phi_0(z).$$

(5) 重试空间中顾客人数 (N) 的母函数为

$$\begin{aligned}\Phi(z)=&\phi_0(z)+\phi_1(1,z)+\phi_2(1,z)+\phi_3(1,1,z)\\=&\frac{(1-z)\{\alpha\theta S^*(z)+p(1-z)\Lambda(z)+\alpha\overline{\theta}[1-T^*(z)]\Lambda(z)(\overline{p}+pz)\}}{D(z)}\phi_0(z).\end{aligned}$$

(6) 整个系统中顾客人数 (L) 的母函数为

$$\Psi(z)=\phi_0(z)+z\phi_1(1,z)+\phi_2(1,z)+z\phi_3(1,1,z)=\frac{(1-z)[1-\Lambda(z)(\overline{p}+pz)]S^*(z)}{D(z)}\phi_0(z).$$

推论 2 (1) 稳态下服务台处于空闲、忙、破坏性中断和非破坏性中断的概率分别是

$$\begin{aligned}&\phi_0(1)=1-\rho, &&\phi_1(1,1)=\frac{p\omega[1-S(\omega)]}{\alpha\theta S(\omega)},\\&\phi_2(1,1)=\frac{p\theta\gamma_1[\omega-S(\omega)]}{\theta S(\omega)}, &&\phi_3(1,1,1)=\frac{p\overline{\theta}\beta_1[\omega-S(\omega)]}{\theta S(\omega)}.\end{aligned}$$

(2) 重试空间中平均顾客人数为

$$\begin{aligned}E(N)=&\frac{p[\alpha\theta S'(\omega)(\alpha\theta\beta_1+\omega)-\omega(1+\alpha\overline{\theta}\beta_1)]}{\alpha\theta S(\omega)}+\frac{p^2[\omega-S(\omega)](\theta\gamma_2+\overline{\theta}\beta_2)}{2(1-\rho)\theta S(\omega)}\\&+\frac{p(\theta\gamma_1+\overline{\theta}\beta_1)[p(\omega+\alpha\overline{\theta}\beta_1)(1-S'(\omega))+\omega]}{(1-\rho)\theta S(\omega)}+\frac{p(\omega+p\alpha\overline{\theta}\beta_1)}{(1-\rho)\alpha\theta S(\omega)}\\&-\frac{p(\theta\gamma_1+p\overline{\theta}\beta_1)S(\omega)}{(1-\rho)\theta S(\omega)}-\frac{pS'(\omega)(\omega+\alpha\overline{\theta}\beta_1)(\alpha\theta+p\omega)}{(1-\rho)\alpha\theta S(\omega)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{G'(r^k)}{G(r^k)}r^k.\end{aligned}$$

(3) 系统平均队长为

$$E(L)=E(N)+\rho-\frac{p\gamma_1[\omega-S(\omega)]}{S(\omega)}.$$

4 与连续时间系统的关系

本节我们将研究具有两类服务中断的离散时间重试排队系统与其相对应的连续时间排队系统的关系．为此，将时间轴等分为间隔很小的时段，不妨记为 Δ.

考虑连续时间下具有两类服务中断的 M/G/1 重试排队系统．顾客到达过程服从参数为 λ 的 Poisson 过程；相邻的重试间隔时间序列独立，服从参数为 γ 的负指数分布；顾客的服务时间为任意分布的随机变量，其分布函数为 $B(x)$, 相应的拉普拉斯 - 司梯阶变换 (LST) 为 $\beta(s)$; 系统只有在服务时间里发生中断，中断率为 μ, 若服务发生中断，则以概率 θ 为破坏性中断，正在接受服务的顾客中断服务加入到重试空间中去，重新尝试以接受服务；以概率 $\overline{\theta}=1-\theta$ 为非破坏性中断，正在接受服务的顾客将等待中断结束后再继续完成剩余的服务量．破坏性与非破坏性中断时间均服从一般分布，其分布函

数分别为 $B_d(x)$ 和 $B_n(x)$, 相应的拉普拉斯 - 司梯阶变换 (LST) 为 $\beta_d(s)$ 和 $\beta_n(x)$, k 阶阶乘矩为 ξ_k^d, ξ_k^n, $k=1,2$.

当 Δ 充分小时，连续时间与离散时间排队系统的参数有如下近似关系

$$
\begin{aligned}
& p=\lambda\Delta, \qquad r=1-\gamma\Delta, \qquad \alpha=\mu\Delta, \\
& s_i=\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mathrm{d}B(x), \qquad r_i=\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mathrm{d}B_d(x), \qquad t_i=\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mathrm{d}B_n(x), \qquad i\geq 1.
\end{aligned}
$$

下面我们将给出连续时间具有两类服务中断的 M/G/1 重试排队系统中顾客人数的概率母函数 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Psi(z)$. 由勒贝格积分定义，不难证明有如下结果:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\Delta\to 0} p\gamma_1=\lambda\xi_1^d, \qquad \lim_{\Delta\to 0} p\beta_1=\lambda\xi_1^n, \qquad \lim_{\Delta\to 0} S^*(z)=\beta(h(z))=\beta^*(z), \\
& \lim_{\Delta\to 0} R^*(z)=\beta_d(\lambda(1-z))=\beta_d^*(z), \qquad \lim_{\Delta\to 0} T^*(z)=\beta_n(\lambda(1-z))=\beta_n^*(z), \\
& \lim_{\Delta\to 0} \rho=\frac{\lambda[1-\beta(\mu\theta)](1+\mu\theta\xi_1^d+\mu\overline{\theta}\xi_1^n)}{\mu\theta\beta(\mu\theta)},
\end{aligned}
$$

其中 $h(z)=\mu-\mu\overline{\theta}\beta_n(\lambda(1-z))+\lambda(1-z)$.

由 (20) 式，我们有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi_0(z)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\phi_0(z)-\phi_0(rz)}{z-rz}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{F(rz)}{(1-r)z}\phi_0(rz).
$$

而

$$
\lim_{\Delta\to 0}\frac{F(rz)}{(1-r)z}=\frac{\lambda}{\gamma}\frac{[1-\beta(h(z))][h(z)-\mu\theta z\beta_d(\lambda(1-z))]}{[1-\beta(h(z))]\mu\theta z\beta_d(\lambda(1-z))-[z-\beta(h(z))]h(z)},
$$

所以当 $\Delta\to 0$ 时，有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi_0(z)=\frac{\lambda}{\gamma}\frac{[1-\beta(h(z))][h(z)-\mu\theta z\beta_d(\lambda(1-z))]}{[1-\beta(h(z))]\mu\theta z\beta_d(\lambda(1-z))-[z-\beta(h(z))]h(z)}\phi_0(z).
$$

$\Delta\to 0$ 时，解此微分方程，得

$$
\phi_0(z)\to\phi_0(1)\exp\Big\{\frac{\lambda}{\gamma}\int_1^z\frac{[1-\beta(h(u))][h(u)-\mu\theta u\beta_d(\lambda(1-u))]}{[1-\beta(h(u))]\mu\theta u\beta_d(\lambda(1-u))-[u-\beta(h(u))]h(u)}\,\mathrm{d}u\Big\}.
$$

从而可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta\to 0}\Psi(z)=&(1-\rho)\frac{(1-z)h(z)\beta(h(z))}{[1-\beta(h(z))]\mu\theta z\beta_d(\lambda(1-z))-[z-\beta(h(z))]h(z)} \\
&\times\exp\Big\{\frac{\lambda}{\gamma}\int_1^z\frac{[1-\beta(h(u))][h(u)-\mu\theta u\beta_d(\lambda(1-u))]}{[1-\beta(h(u))]\mu\theta u\beta_d(\lambda(1-u))-[u-\beta(h(u))]h(u)}\,\mathrm{d}u\Big\}.
\end{aligned}
$$

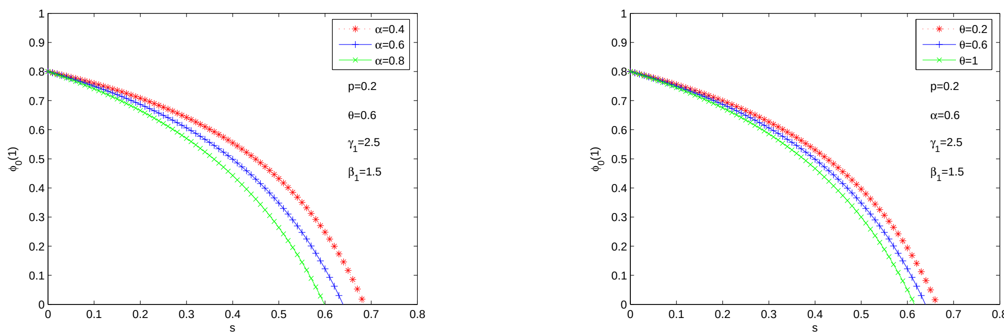
这个结果与利用补充变量法得到的连续时间具有两类服务中断的 M/G/1 重试排队系统中顾客人数的概率母函数是一致的.

5 数值分析

本节将给出几个数值算例来观察系统参数对空闲概率和重试空间顾客平均人数的影响. 为此, 假设服务时间服从参数为 $\overline{s}=1-s$ 的几何分布, 其母函数为 $S(x)=\left(\frac{\overline{s}x}{1-sx}\right)$. 破坏性和非破坏性中断时间分别服从负二项分布，对应的母函数分别为

$$R(x)=\left(\frac{2x}{5-3x}\right)^{n_1},\qquad T(x)=\left(\frac{2x}{3-x}\right)^{n_2},$$

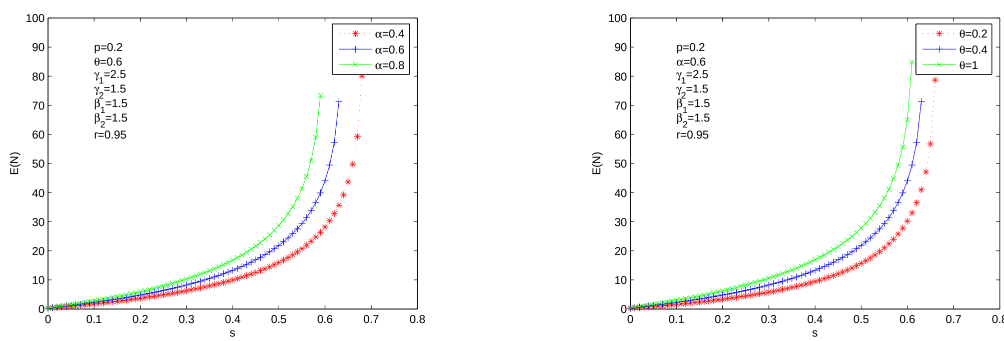
即破坏性和非破坏性中断时间分别为 n_1 和 n_2 个几何分布 (均值分别为 2.5 和 1.5) 的独立随机变量的和．以下图形参数取值均满足系统稳定条件.



(a)　　(b)

图 1　s 对 $\phi_0(1)$ 的影响．(a) 参数 α 的影响；(b) 参数 θ 的影响.

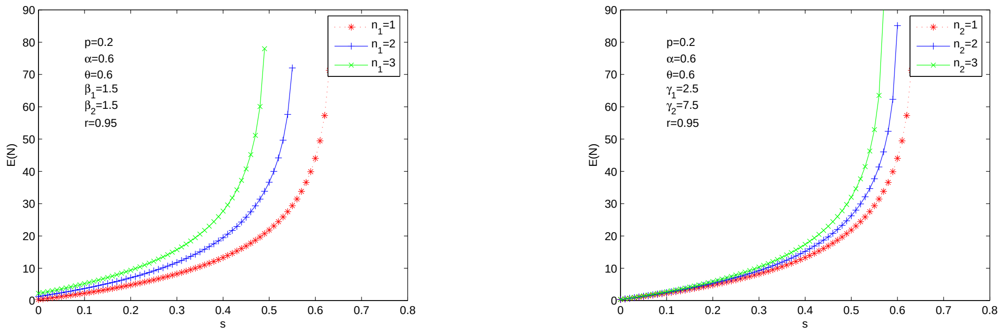
在图 1(a),(b) 中，我们分别研究了参数 α,θ 以及 s 对服务台处于空闲状态概率的影响．正如所期，$\phi_0(1)$ 随着 s 的增大而减小．另一方面，$\phi_0(1)$ 分别随参数 α 和 θ 的减小而增大.



(a)　　(b)

图 2　s 对 $E(N)$ 的影响．(a)　参数 α 的影响；(b)　参数 θ 的影响.

图 2, 图 3 分别给出了参数 α,θ, 破坏性时间和非破坏性时间对重试空间平均人数 $E(N)$ 的影响. 当参数取不同数值时, $E(N)$ 均为 s 的增函数. 另外, $E(N)$ 分别随着参数 α,θ,n_1 和 n_2 的增加而增加, 这些都是与实际一致的. 并且我们可以观察到, 当参数的取值接近稳定条件边界时, 重试空间的平均人数 $E(N)$ 趋于发散.



(a) (b)

图 3 s 对 $E(N)$ 的影响. (a) 破坏性时间的影响; (b) 非破坏性时间的影响.

参 考 文 献

[1] Meisling T. Discrete Time Queueing Theory. *Oper. Res.*, 1958,6: 96–105

[2] Yang T, Li H. On the Steady-state Queue Size Distribution of the Discrete-time Geo/G/1 Queue with Repeated Customers. *Queueing Systems*, 1995, 21: 199–215

[3] Falin G I, Templeton J G C. Retrial Queues. London: Chapman Hall, 1997

[4] Atencia I, Moreno P. A Discrete-time Retrial Queue with Server Breakdown. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2006, l32(2): 247–271

[5] Atencia I, Moreno P. A Discrete-time Geo/G/1 Retrial Queue with General Retrial Times. *Queueing Systems*, 2004, 48: 5–21

[6] Atencia I, Moreno P. The Discrete-time Geo/Geo/1 Queue with Negative Customers and Disasters. *Computers and Operations Research*, 2004, 31: 1537–1548

[7] Atencia I, Moreno P. A Discrete-time Geo/G/1 Retrial Queue with the Server Subject to Starting Failures. *Annals of Operation Research*, 2006, 141(1): 85–107

[8] Nathan P. Sherman, Jeffrey P. Kharoufeh. An M/M/1 Retrial Queue with Unliable Server. *Operations Research Letters*, 2006, 34: 697–705

[9] Fiems D, Maertens T, Bruneel H. Queueing Systems with Different Types of Server Interruptions. *European Journal of Operational Research*, 2008, 188: 838–845

[10] White H, Christie L. Queuing with Preemptive Priorities or with Breakdown. *Operations Research*, 1958, 6(1): 79–95

[11] Avi-Itzhak B, Naor P. Some Queuing Problems with the Service Station Subject to Breakdown. *Operations Research*, 1963, 11(3): 303–319

[12] Federgruen A, Green L. Queueing Systems with Service Interruptions. *Operations Research*, 1986, 34(5): 752–768

A Discrete-time Retrial Queue with Two Types of Server Interruptions

ZHANG Mian

(*Department of Mathematics, Central South University, Changsha* 410075)

(*Department of Mathematics, Fuyang Normal College, Fuyang* 326032)

(*E-mail: zhmm198@sohu.com*)

HOU Zhenting

(*Department of Mathematics, Central South University, Changsha* 410075)

Abstract We consider a discrete queueing system with disruptive and non-disruptive server interruptions. Both disruptive and non-disruptive interruptions may start when there is a customer in service. If a disruptive interruption occur, the customer is obliged to join the orbit; Otherwise, if a non-disruptive interruption occur, the customer waits and continues its service after a non-disruptive interruption. We analyze the equilibrium distribution of the system and obtain the generating functions of the limiting distribution. Moreover, we prover that M/G/1 retrial queue with two types of server interruptions. Finally, some numerical examples are presented.

Key words discrete-time retrial queue; server interruptions; unreliable server

MR(2000) Subject Classification 60K25; 90B22

Chinese Library Classification O226