偶阶半线性中立型分布时滞微分方程的振动性 *

张全信　　高　丽

(滨州学院数学与信息科学系，滨州 256603)

(E-mail: 3314744@163.com)

俞元洪

(中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190)

摘　要　本文研究偶阶半线性中立型分布时滞微分方程，利用广义 Riccati 变换和积分平均技巧得到方程一切解均为振动的若干新的振动准则，推广和改进了一些文献中的结果.

关键词　半线性微分方程；分布时滞；振动准则

MR(2000) 主题分类　34C10; 34K11

中图分类　O175

1　引言

考虑 n 阶半线性中立型分布时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\Phi(z^{(n-1)}(t))\right]+\int_a^b c(t,\xi)\Phi(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)=0,\qquad t\geq t_0,\tag{1}$$

其中 n 为偶数， $\Phi(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$ 且

$$z(t)=x(t)+m(t)x(t-\tau).\tag{2}$$

在本文中我们总假设：

(H_1) $\tau>0$, $m(t)\in C(I,R)$, $\mathrm{I}=[\mathrm{t}_0,\infty)$, $0\leq \mathrm{m(t)}\leq 1$, $c(t,\xi)\in C(I\times[a,b],\mathrm{R}^+)$;

(H_2) $r(t)\in C^1(I,R)$, $r(t)>0$, $\mathrm{r'(t)}\geq 0$, $R(t)=\int_{t_0}^t[r(s)]^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}s$, $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=\infty$;

本文 2008 年 11 月 6 日收到. 2011 年 7 月 12 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10771118), 山东省自然科学基金 (ZR2010AM031), 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金 (BS2010SF001) 以及山东省科技发展计划 (2010GWZ20401) 资助项目.

(H$_3$) $g(t,\xi)\in C(I\times[a,b],\mathrm{R}^+)$ 为 t 和 ξ 的非减函数,

$$g(t,\xi)\le t,\qquad \lim_{t\to\infty}\min_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=\infty,\qquad g(t,a)\equiv g(t)\in C^1(I,R^+);$$

(H$_4$) $\sigma(\xi)\in([a,b],\mathrm{R})$ 为非减函数，方程 (1) 中积分为 Stieltjes 积分.

我们称函数 $x(t)\in C^{n-1}([T_x,\infty),\mathrm{R})$, $T_x\ge t_0$, 为方程 (1) 的一个解, 如果 $r(t)\Phi(z^{(n-1)}(t))\in C^1([T_x,\infty),\mathrm{R})$ 且在区间 $[T_x,\infty)$ 上满足方程 (1).

方程 (1) 的一个非平凡解称为振动的，如果它有任意大的零点．否则，称为非振动的．方程 (1) 称为振动的如果它的一切解都是振动的.

我们注意到在方程 (1) 中，若 $n=2$, $m(t)\equiv 0$, $g(t,\xi)\equiv t$ 且 $\int_a^b c(t,\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)=c(t)$, 则方程 (1) 简化为二阶半线性方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[r(t)\Phi(x'(t))\big]+c(t)\Phi(x(t))=0. \tag{3}$$

在方程 (3) 中，若 $p=2$, $r(t)\equiv 1$, 则进一步简化为线性方程

$$x''(t)+c(t)x(t)=0. \tag{4}$$

方程 (4) 已有许多振动准则，其中最重要的准则之一是由 Wintner[1] 给出如下：

若下列条件成立：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}c(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\infty, \tag{C$_1$}$$

则方程 (4) 振动.

1978 年， Kamenev[2] 利用二次三项式配平方的方法改进了 Wintner 的结果．他证明了，若下列条件成立：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^\lambda}\int_{t_0}^{t}(t-s)^\lambda c(s)\mathrm{d}s=\infty, \tag{C$_2$}$$

其中 $\lambda>1$ 为常数，则方程 (4) 振动.

1995 年， Li 和 Yeh[3] 推广 Kamenev 结果到半线性方程 (3). 他们得到：

定理 A 设对于某一个 $\lambda>p-1$, 有下式成立：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^\lambda}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\lambda-p}\Big[(t-s)^p c(s)-\Big(\frac{\lambda}{p}\Big)^p r(s)\Big]\mathrm{d}s=\infty, \tag{C$_3$}$$

则方程 (3) 振动.

考虑集合 $D_0=\big\{(t,s):\, t>s\ge t_0\big\}$, $D=\big\{(t,s):\, t\ge s\ge t_0\big\}$. 设 $H\in C(D,R)$ 满足下列条件：

(i) $H(t,t)=0,\ t\ge t_0;\ \ H(t,s)>0,\ (t,s)\in D_0;$

(ii) H 在 D_0 上对第二个变量有连续非正的偏导数,

则称函数 H 具有性质 P.

1989 年， Philos[4] 改进了 Kamenev 的条件，给出如下结果：设 H 具有性质 P, 若 $h \in C(D_0, R)$ 使得

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) = h(t,s)\sqrt{H(t,s)}, \qquad (t,s) \in D_0,$$

且

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left\{ H(t,s)c(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s) \right\} \mathrm{d}s = \infty, \tag{C$_4$}$$

则方程 (4) 振动.

1995 年， Li[5] 推广 Philos 的结果到半线性方程 (3), 得到如下结果：

定理 B 设 H 具有性质 P, 又设 $h \in C(D_0, R)$ 使得

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) = h(t,s)(H(t,s))^{\frac{1}{q}}, \qquad (t,s) \in D_0$$

且

$$\int_{t_0}^{t} h^p(t,s)\,\mathrm{d}s < \infty, \qquad \forall\, t \geq t_0,$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left\{ H(t,s)c(s) - \left(\frac{1}{p}h(t,s)\right)^p \right\} \mathrm{d}s = \infty, \tag{C$_5$}$$

则方程 (3) 振动.

我们也注意到若 $p = 2$, $r(t) \equiv 1$, 则方程 (1) 简化为

$$\big[x(t) + m(t)x(t-\tau)\big]^{(n)} + \int_a^b c(t,\xi)x\big[g(t,\xi)\big]\,\mathrm{d}\sigma(\xi) = 0. \tag{5}$$

最近， [6] 给出了方程 (5) 的 Philos 型振动准则．本文目的是给出方程 (1) 的 Kamenev 型振动准则和 Philos 型振动准则，使得定理 A 和定理 B 以及 [6] 的定理 1 成为我们结果的特例．对于其他的相关结果，我们推荐参看 [7–13]. 关于本文中的函数不等式，如果没有特别的说明，都是对一切充分大的 t 成立.

2　主要结果

我们需要下面的引理：

引理 1[14] 设 $x(t) \in C^n(I, R^+)$, $x^{(n)}(t)$ 最终定号, 则存在 $t_x \geq t_0$ 和整数 l, $0 \leq l \leq n$, 当 $x^{(n)}(t) \geq 0$ 时， $n+l$ 为偶数；当 $x^{(n)}(t) \leq 0$ 时， $n+l$ 为奇数，使得

当 $l > 0$ 时有

$$x^{(k)}(t) > 0, \qquad t \geq t_x,\ \ k = 0, 1, \cdots, l-1;$$

且当 $l \leq n-1$ 时有

$$(-1)^{l+k}x^{(k)}(t) > 0, \qquad t \geq t_x,\ \ k = l, l+1, \cdots, n-1.$$

引理 2[14] 设 $x(t)$ 满足引理 1 的条件，且 $x^{(n-1)}(t)x^{(n)}(t)\le 0,\ t\ge t_x$, 则存在常数 $\theta,\ 0<\theta<1$ 和 $M>0$ 使对一切充分大的 t 有

$$x'(\theta t)\ge Mt^{n-2}x^{(n-1)}(t).$$

引理 3[15] 设 X 和 Y 为非负实数，则

$$X^\lambda-\lambda XY^{\lambda-1}+(\lambda-1)Y^\lambda\ge 0,\qquad \lambda>1,$$

上式中等式成立当且仅当 $X=Y$.

定理 1 设对某一个 $\lambda>p-1$, 有下式成立：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^\lambda}\int_T^t(t-s)^{\lambda-p}\Big[(t-s)^pQ(s)-(q-1)\Big(\frac{\lambda}{q}\Big)^p[(p-1)\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)]^{1-p}r(s)\Big]\mathrm{d}s$$
$$=\infty,\tag{C$_6$}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ g(s)=g(s,a)$, 且

$$Q(s)=\int_a^b c(s,\xi)(1-m[g(s,\xi)])^{p-1}\,\mathrm{d}\sigma(\xi),$$

则方程 (1) 振动.

证 设方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$. 不失一般性，可以假设 $x(t)>0,\ x(t-\tau)>0,\ x[g(t,\xi)]>0,\ t\ge t_1\ge t_0\ge 0,\ \xi\in[a,b]$. 定义 $z(t)$ 由 (2), 故有 $z(t)>0,\ t\ge t_1$. 利用方程 (1) 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r(t)\Phi(z^{(n-1)}(t))]\le 0,\qquad t\ge t_1.\tag{6}$$

于是 $r(t)\Phi(z^{(n-1)}(t))$ 为减函数且 $z^{(n-1)}(t)$ 最终定号. 我们断言：

$$z^{(n-1)}(t)>0.\tag{7}$$

否则，存在 $t_2\ge t_1$ 使得 $z^{(n-1)}(t_2)<0$. 故有

$$r(t)\Phi(z^{(n-1)}(t))\le r(t_2)\Phi(z^{(n-1)}(t_2))\equiv -C,\qquad C>0,\ \ t\ge t_2.$$

即有

$$-r(t)(-z^{(n-1)}(t))^{p-1}\le -C,\qquad t\ge t_2.$$

积分产生

$$z^{(n-2)}(t)\le z^{(n-2)}(t_2)-C^{q-1}(R(t)-R(t_2)).$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 在上式中令 $t\to\infty$, 我们得到 $\lim\limits_{t\to\infty}z^{(n-2)}(t)=-\infty$. 由此推知 $z(t)$ 最终为负. 此与 $z(t)>0$ 矛盾. 故 (7) 成立.

联合 (6) 和 (7), 我们有

$$r'(t)(z^{(n-1)}(t))^{p-1}+(p-1)r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p-2}z^{(n)}(t)\le 0.$$

上式产生

$$z^{(n)}(t) \le 0, \qquad t \ge t_2. \tag{8}$$

注意到 n 为偶数，由 (8) 和引理 1, 我们有

$$z'(t) > 0, \qquad t \ge t_3 \ge t_2. \tag{9}$$

因此，利用 (2) 和 (9) 我们得到

$$x(t) \ge (1-m(t))z(t), \qquad t \ge t_3. \tag{10}$$

利用 (7) 和 (10), 方程 (1) 产生

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p-1}\big] + \int_a^b c(t,\xi)(1-m[g(t,\xi)])^{p-1}(z[g(t,\xi)])^{p-1}\,\mathrm{d}\sigma(\xi) \le 0.$$

因 $g(t,\xi)$ 关于 ξ 非减及 (9), 上式可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p-1}\big] + Q(t)(z([g(t)]))^{p-1} \le 0, \qquad t \ge T \ge t_3, \tag{11}$$

其中 $Q(t) = \int_a^b c(t,\xi)(1-m[g(t,\xi)])^{p-1}\,\mathrm{d}\sigma(\xi)$, $g(t) = g(t,a)$. 定义

$$W(t) = r(t)\Big(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z(\theta g(t))}\Big)^{p-1}, \qquad t \ge T. \tag{12}$$

则由 (11), 我们有

$$W'(t) \le -Q(t)\Big(\frac{z(g(t))}{z(\theta g(t))}\Big)^{p-1} - \frac{(p-1)\theta g'(t)r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p-1}z'(\theta g(t))}{(z(\theta g(t)))^p}. \tag{13}$$

利用引理 2, 注意到 (7)–(9), 我们得到

$$z'(\theta g(t)) \ge Mg^{n-2}(t)z^{(n-1)}(t). \tag{14}$$

在 (13) 中利用 (14) 和 (12) 产生

$$W'(t) \le -Q(t) - (p-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)r^{1-q}(t)W^q(t), \qquad t \ge T,$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 对上式积分，我们有

$$\begin{aligned} &-(t-T)^\lambda W(T) + \lambda\int_T^t (t-s)^{\lambda-1}W(s)\,\mathrm{d}s \\ &+(p-1)\theta M\int_T^t (t-s)^\lambda g^{n-2}(s)g'(s)r^{1-q}(s)W^q(s)\,\mathrm{d}s + \int_T^t (t-s)^\lambda Q(s)\,\mathrm{d}s \le 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$t \ge T$. 因为 $p>1$, $q>1$, 利用引理 3, 即

$$X^q + (q-1)Y^q - qXY^{q-1} \ge 0, \qquad X \ge 0,\ Y \ge 0.$$

我们取

$$X=\left[(p-1)\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)\right]^{\frac{1}{q}}(t-s)^{\frac{\lambda}{q}}r^{\frac{1-q}{q}}(s)\,|W(s)|$$

和

$$Y=\left(\frac{\lambda}{q}\right)^{\frac{p}{q}}(t-s)^{\frac{\lambda-p}{q}}\left[(p-1)\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)\right]^{-\frac{p}{q^2}}r^{\frac{1}{q}}(s),$$

则对 $T\le s<t$, 我们得到

$$\begin{aligned}&(p-1)\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)r^{1-q}(s)(t-s)^{\lambda}|W(s)|^{q}\\ \ge&\lambda(t-s)^{\lambda-1}|W(s)|-(q-1)\left(\frac{\lambda}{q}\right)^{p}(t-s)^{\lambda-p}\left[(p-1)\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)\right]^{\frac{1}{1-q}}r(s).\end{aligned}\tag{16}$$

联合 (15) 和 (16), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_T^t(t-s)^{\lambda-p}\Big[(t-s)^pQ(s)-(q-1)\Big(\frac{\lambda}{q}\Big)^p\left[(p-1)\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)\right]^{1-p}r(s)\Big]\,\mathrm{d}s\\ \le&(t-T)^{\lambda}W(T).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\lambda}}\int_T^t(t-s)^{\lambda-p}\Big[(t-s)^pQ(s)-(q-1)\Big(\frac{\lambda}{q}\Big)^p\left[(p-1)\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)\right]^{1-p}r(s)\Big]\,\mathrm{d}s\\ \le&W(T).\end{aligned}$$

上式与条件 (C_6) 矛盾. 定理 1 证毕.

注 1 显然, 定理 A 是我们定理 1 的特例.

定理 2 设存在函数 $\rho(t)\in C^1(I,R^+)$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\Big[\rho(s)Q(s)-\frac{\rho'(s)r(s)}{p^p}\Big(\frac{\rho'(s)}{\theta M\rho(s)g^{n-2}(s)g'(s)}\Big)^{p-1}\Big]\mathrm{d}s=\infty,\tag{C$_7$}$$

对 $T\ge t_0$ 成立, 则方程 (1) 振动.

证 设方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$, 定义 $z(t)$ 由 (2). 如同定理 1 的证明, 我们有不等式 (11) 成立. 定义

$$W(t)=\rho(t)r(t)\Big(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z(\theta g(t))}\Big)^{p-1},\qquad t\ge T.\tag{17}$$

利用 (14) 和 (17), 我们得到

$$\begin{aligned}W'(t)\le&-\rho(t)Q(t)+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)\\&-(p-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)\left[\rho(t)r(t)\right]^{1-q}|W(t)|^{q},\qquad t\ge T,\end{aligned}\tag{18}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 利用引理 3, 对于任意 $X\ge0,\ Y\ge0$, 我们有

$$qXY^{q-1}-X^q\le(q-1)Y^q,\qquad q>1.\tag{19}$$

我们取

$$X=\left[(p-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)\right]^{\frac{1}{q}}\left[\rho(t)r(t)\right]^{\frac{1-q}{q}}|W(t)|$$

和

$$Y=\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^{p-1}\Big(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\Big)^{p-1}\left[(p-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)\right]^{\frac{1-p}{q}}\left[\rho(t)r(t)\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

则 (19) 产生不等式

$$\begin{aligned}&\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-(p-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)\left[\rho(t)r(t)\right]^{1-q}|W(t)|^q\\ \le&\frac{[\rho'(t)]^p r(t)}{p^p[\theta M\rho(t)g^{n-2}(t)g'(t)]^{p-1}},\qquad t\ge T.\end{aligned}\tag{20}$$

联合 (18) 和 (20), 我们有

$$W'(t)\le-\rho(t)\Big[Q(t)-\frac{\rho'(t)r(t)}{p^p\rho(t)}\Big(\frac{\rho'(t)}{\theta M\rho(t)g^{n-2}(t)g'(t)}\Big)^{p-1}\Big],\qquad t\ge T.$$

积分上式我们得到

$$W(t)-W(T)\le-\int_T^t\Big[\rho(s)Q(s)-\frac{\rho'(s)r(s)}{p^p}\Big(\frac{\rho'(s)}{\theta M\rho(s)g^{n-2}(s)g'(s)}\Big)^{p-1}\Big]\,\mathrm{d}s.$$

在上式中令 $t\to\infty$ 取上极限，得到与条件 (C_7) 的矛盾．定理 2 证毕.

若 $\rho(t)\equiv1$, 则定理 2 有如下推论：

推论 1　设

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t Q(s)\,\mathrm{d}s=\infty,\qquad T\ge t_0,$$

则方程 (1) 振动.

注 2　[3] 的推论 4 是本文推论 1 的特例.

定理 3　设存在 $\rho(t)\in C^1(I,R^+)$, $H(t,s)\in C(D,R)$ 具有性质 P, 且 $h(t,s)\in C(D_0,R)$ 使得

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)-H(t,s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}=h(t,s)H^{\frac{1}{q}}(t,s),\quad(t,s)\in D_0$$

和

$$\int_{t_0}^t|h(t,s)|^p\mathrm{d}s<\infty,\qquad\forall\,t\ge t_0,$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t\Big[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\Big(\frac{1}{p}|h(t,s)|\Big)^p\frac{\rho(s)r(s)}{[\theta Mg^{n-2}(s)g'(s)]^{p-1}}\Big]\,\mathrm{d}s=\infty,\tag{C_8}$$

则方程 (1) 振动.

显然，当 $n=2$, $m(t)\equiv0$, $g(t,\xi)\equiv t$, $\int_a^b c(t,\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi)=c(t)$, $\rho(t)\equiv1$ 时，本文定理 3 即化为定理 B.

证 设方程 (1) 存在最终正解 $x(t)$, $z(t)$ 由 (2) 定义, 则 $z(t)>0$, $t\geq T_0\geq t_0$. 如同定理 1 的证明, 我们有不等式 (11), 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p-1}\big]+Q(t)(z[g(t)])^{p-1}\leq 0,\qquad t\geq T_0.$$

其中 $g(t)=g(t,a)$, 且 $Q(t)=\int_a^b c(t,\xi)\big(1-m[g(t,\xi)]\big)^{p-1}\,\mathrm{d}\sigma(\xi)$. 定义函数 $W(t)$ 同 (17). 我们有 (18) 成立, 亦即

$$\rho(t)Q(t)\leq -W'(t)+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-(p-1)G(t)\big[\rho(t)r(t)\big]^{1-q}|W(t)|^q,\qquad t\geq T_0,$$

其中 $G(t)=\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)$. 因为

$$\int_{t_0}^t|h(t,s)|^p\,\mathrm{d}s<\infty,\qquad \forall\, t\geq t_0,$$

则对一切 $t\geq T\geq T_0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_T^t H(t,s)\rho(s)Q(s)\,\mathrm{d}s\\ \leq&H(t,T)W(T)-\int_T^t\Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big)W(s)\,\mathrm{d}s\\ &+\int_T^t H(t,s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}W(s)\,\mathrm{d}s-(p-1)\int_T^t H(t,s)G(s)\big[\rho(s)r(s)\big]^{1-q}|W(s)|^q\,\mathrm{d}s\\ =&H(t,T)W(T)-\int_T^t h(t,s)H^{\frac1q}(t,s)W(s)\,\mathrm{d}s-(p-1)\int_T^t\frac{H(t,s)G(s)|W(s)|^q}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}}\,\mathrm{d}s\\ \leq&H(t,T)W(T)+\int_T^t H^{\frac1q}(t,s)|h(t,s)W(s)|\,\mathrm{d}s-(p-1)\int_T^t\frac{H(t,s)G(s)|W(s)|^q}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{21}$$

利用 (19), 我们取

$$X=\big[(p-1)H(t,s)G(s)\big]^{\frac1q}\big[\rho(s)r(s)\big]^{\frac{1-q}{q}}|W(s)|$$

和

$$Y=\Big(\frac1q\Big)^{p-1}\big|h(t,s)\big|^{p-1}\big[(p-1)G(s)\big]^{\frac{1-p}{q}}\big[\rho(s)r(s)\big]^{\frac1q},$$

则 (19) 产生不等式

$$\begin{aligned}&H^{\frac1q}(t,s)\big|h(t,s)W(s)\big|-(p-1)\frac{H(t,s)G(s)\big|W(s)\big|^q}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}}\\ \leq&\Big(\frac1p|h(t,s)|\Big)^p\rho(s)r(s)\big[G(s)\big]^{1-p},\qquad t>s\geq T_0.\end{aligned}\tag{22}$$

联合 (21) 和 (22), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{T_0}^{t}\Big[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\Big(\frac{1}{p}|h(t,s)|\Big)^{p}\frac{\rho(s)r(s)}{G^{p-1}(s)}\Big]\,\mathrm{d}s\\ \le& H(t,T_0)W(T_0)\le H(t,T_0)\,|W(T_0)|\le H(t,t_0)\,|W(T_0)|.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\Big[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\Big(\frac{1}{p}|h(t,s)|\Big)^{p}\frac{\rho(s)r(s)}{G^{p-1}(s)}\Big]\,\mathrm{d}s\\ =&\Big\{\int_{t_0}^{T_0}+\int_{T_0}^{t}\Big\}\Big[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\Big(\frac{1}{p}|h(t,s)|\Big)^{p}\frac{\rho(s)r(s)}{G^{p-1}(s)}\Big]\,\mathrm{d}s\\ \le& H(t,t_0)\int_{t_0}^{T_0}\rho(s)|Q(s)|\,\mathrm{d}s+H(t,t_0)\,|W(T_0)|\\ =&H(t,t_0)\Big\{\int_{t_0}^{T_0}\rho(s)|Q(s)|\,\mathrm{d}s+|W(T_0)|\Big\},\qquad\forall\, t\ge t_0.\end{aligned}$$

上式给出

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\Big[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\Big(\frac{1}{p}|h(t,s)|\Big)^{p}\frac{\rho(s)r(s)}{G^{p-1}(s)}\Big]\,\mathrm{d}s\\ \le&\int_{t_0}^{T_0}\rho(s)|Q(s)|\,\mathrm{d}s+|W(T_0)|.\end{aligned}$$

此与条件 (C_8) 矛盾．定理 3 证毕.

注 3 若方程 (1) 中， $p=2,\ r(t)\equiv1$, 则方程 (1) 化简为线性方程

$$\big[x(t)+m(t)x(t-\tau)\big]^{(n)}+\int_a^b c(t,\xi)x[g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi)=0.$$

此时， [6] 的定理 1 即为我们定理 3 的特例.

例 考虑下列泛函微分方程

$$\Big(\frac{3}{2}\Big[x(t)+\frac{2}{3\pi}x\Big(t-\frac{3\pi}{2}\Big)\Big]^{(3)}\Big)'+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\xi}{2\pi}x\Big(t+\xi-\frac{5\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}\xi=0,\qquad t\ge\frac{3\pi}{2},\tag{23}$$

这里 $n=4,\ p=2,\ \tau=\frac{3\pi}{2},\ r(t)=\frac{3}{2},\ m(t)=\frac{2}{3\pi},\ c(t,\xi)=\frac{\xi}{2\pi},\ g(t,\xi)=t+\xi-\frac{5\pi}{2},\ \sigma(\xi)=\xi,\ [a,b]=[\pi,2\pi]$, 则

$$Q(s)=\int_a^b c(s,\xi)(1-m[g(s,\xi)])^{p-1}\,\mathrm{d}\sigma(\xi)=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\xi}{2\pi}\Big(1-\frac{2}{3\pi}\Big)\,\mathrm{d}\xi=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

是一个正的常数，且

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t Q(s)\,\mathrm{d}s=\infty.$$

因此，推论 1 的条件满足．故方程 (23) 的每一个解是振动的．不难验证， $x(t)=\sin t$ 就是方程 (23) 的一个解.

参 考 文 献

[1] Wintner A. A Criterion of Oscillatory Stability. *Quart. Appl. Math.*, 1949, 7: 115–117

[2] Kamenev I V. An Integral Criterion for Oscillation of Linear Differential Equations of Second Order. *Math. Zametki*, 1978, 23: 249–251

[3] Li H J, Yeh C C. An Integral Criterion for Oscillation of Nonlinear Differential Equations. *Math. Japonica*, 1995, 41: 185–188

[4] Philos Ch G. Oscillation Theorems for Linear Differential Equations of Second Order. *Arch. Math.*, 1989, 53: 482–492

[5] Li H J. Oscillation Criteria for Half-linear Second Order Differential Equations. *Hiroshima Math. J.*, 1995, 25: 571–583

[6] Wang P G, Teo K L, Liu Y Q. Oscillation Properties for Even order Neutral Equations with Distributed Deviating Arguments. *J. Comput. Appl. Math.*, 2005, 182: 290–303

[7] Agarwal R P, Grace S R, O′Regan D. Oscillation Criteria for Certain nth Order Differential Equations with Deviating Arguments. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, 262: 601–622

[8] Dosly O, Lomtatidze A. Oscillation and Nonoscillation Criteria for Half-linear Second Order Differential Equations. *Hiroshima Math. J.*, 2006, 36: 203–219

[9] Hsu H B, Yeh C C. Oscillation Theorems for Second-order Half-linear Differential Equations. *Appl. Math. Lett.*, 1999, 9: 71–77

[10] Wang Q R. Oscillation and Asymptotics for Second-order Half-linear Differential Equations. *Appl. Math. Comput.*, 2001, 122: 253–266

[11] Xu R, Meng F. Some New Oscillation Criteria for Second Order Quasi-linear Neutral Delay Differential Equations. *Appl. Math. Comput.*, 2006, 182: 797–803

[12] Xu Z, Xia Y. Integral Averaging Technique and Oscillation of Certain Even Order Delay Differential Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, 292: 238–246

[13] Yang X. Oscillation Criterion for a Class of Quasilinear Differential Equations. *Appl. Math. Comput.*, 2004, 152: 225–229

[14] Philos Ch G. A New Criterion for the Oscillatory and Asymptotic Behavior of Delay Differential Equations. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Mat.*, 1981, 39: 61–64

[15] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities, 2nd ed. Cambridge: Cambrige Univ. Press, 1988

Oscillation of Even Order Half-linear Neutral Differential Equations with Distributed Delay

ZHANG Quanxin　　GAO Li

(*Department of Mathematics and Information Science, Binzhou University, Binzhou* 256603)

(*E-mail: 3314744@163.com*)

YU Yuanhong

(*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

Abstract In this paper a class of even order half-linear neutral differential equations with distributed delay are studied. By using the generalized Riccati transformation and the integral averaging technique, new oscillation criteria are obtained for all solutions of the equations, which generalize and improve the results of some literatures.

Key words half-linear differential equation; distributed delay; oscillation criterion

MR(2000) Subject Classification 34C10; 34K11

Chinese Library Classification O175