第 34 卷 第 6 期 应用数学学报 Vol. 34 No. 6
2011 年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2011

图的符号星部分控制数

周仲旺

(山东潍坊学院数学与信息科学学院，潍坊 261061)

(E-mail: zhouzhongwang65@sohu.com)

摘 要 引入了图的符号星部分控制的概念. 设 $G=(V,E)$ 是一个简单连通图， M 是 V 的一个子集. 一个函数 $f:E\to\{-1,1\}$ 若满足 $\sum\limits_{e\in E(v)} f(e)\geq 1$ 对 M 中的每个顶点 v 都成立，则称 f 是图 G 的一个符号星部分控制函数，其中 $E(v)$ 表示 G 中与 v 点相关连的边集. 图 G 的符号星部分控制数定义为 $\gamma_{ss}^M(G)=\min\left\{\sum\limits_{e\in E} f(e)|f \text{ 是 } G \text{ 的符号星部分控制函数}\right\}$. 在本文中我们主要给出了一般图的符号星部分控制数的上界和下界，并确定了路、圈和完全图的符号星部分控制数的精确值. 作为我们引入的这一新概念的一个应用，求出了完全图的符号星 k 控制数.

关键词 符号星部分控制函数；符号星部分控制数；符号星 k 控制数

MR(2000) 主题分类 05C50

中图分类 O157.5

1 引言

设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单连通图，文中未加说明的记号和术语同 [1]. 对于顶点 $v\in V(G)$, 定义 v 的邻域 $N(v)=\{u \mid uv\in E(G)\}$, 闭邻域 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$. $E(v)$ 表示 G 中与 v 点相关连的边集. 近些年来图的控制理论研究内容越来越丰富， [2] 引入图的符号星控制概念如下：

定义 1.1 设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单图，一个函数 f: $E\to\{-1,1\}$ 满足对所有的 $v\in V(G)$ 都有 $\sum\limits_{e\in E(v)} f(e)\geq 1$, 则称 f 为 G 的一个符号星控制函数. f 的权 $\omega(f)$ 定义为 G 的所有边函数值的和， G 的所有符号星控制函数中最小的权定义为 G 的符号星控制数，记作 $\gamma_{ss}'(G)$. 下面我们引入图的一种新的边控制概念

定义 1.2 设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单图， M 是 V 的一个非空子集，一个函数 f: $E\to\{-1,1\}$ 满足对 M 中的所有顶点 v 都有 $\sum\limits_{e\in E(v)} f(e)\geq 1$, 则称 f 为 G 的一个符号

本文 2010 年 9 月 9 日收到. 2011 年 6 月 10 日收到修改稿.

星部分控制函数. 图 G 的符号星部分控制数定义为 $\gamma_{ss}^M(G)=\min\big\{\sum\limits_{e\in E}f(e)|\,f$ 是 G 的符号星部分控制函数$\big\}$.

比较上述两个定义不难看出，当 $M=V$ 时，图的一个符号星部分控制函数就是图的一个符号星控制函数. 因此图的符号星部分控制函数是图的符号星控制函数的一种自然推广. [3] 还引入以下定义

定义 1.3 设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单图，一个函数 $f\colon E\to\{-1,1\}$ 满足对至少 k 个顶点 v 有 $\sum\limits_{e\in E(v)}f(e)\geq 1$, 则称 f 为图的一个符号星 k 控制函数，图的符号星 k 控制数定义为 $\gamma_{ss}^k(G)=\min\big\{\sum\limits_{e\in E}f(e)|f$ 是 G 的符号星 k 控制函数$\big\}$.

本文中我们主要给出了一般图的符号星部分控制数的上界和下界，并确定了路、圈和完全图的符号星部分控制数. 作为我们引入的这一新概念的一个应用，求出了完全图的符号星 k 控制数，注意到 [3] 仅求出了路和圈的符号星 k 控制数. 显然若 f 是 G 的一个取值最小符号星部分控制函数，则 $G[\overline{M}]$ 中的边应该全取 -1.

2 部分控制数的上界和下界

定理 2.1 设 $G=(V,E)$ 是一个图，$M\subseteq V$, $E(G[M])\cup(M,\overline{M})$ 导出的子图为 G_0, 若 $|G_0|=n$, 则 $\gamma_{ss}^M(G)\leq 2n-4$.

证 设 f 是 G_0 的一个符号星控制函数且 $f(E)=\gamma'_{ss}(G_0)$. 因 $f(E)=\gamma'_{ss}(G_0)\leq 2n-4$ (见 [4]), 且 f 也是 G_0 的一个符号星部分控制函数，所以 $\gamma_{ss}^M(G_0)\leq f(E)\leq 2n-4$, 于是 $\gamma_{ss}^M(G)\leq\gamma_{ss}^M(G_0)\leq 2n-4$.

定理 2.2 设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单图，$M\subseteq V$, $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$, $A=\{i\mid d(v_i)$ 是偶数, $i=1,2,\cdots,k\}$, $B=\{i\mid d(v_i)$ 是奇数, $i=1,2,\cdots,k\}$. $|A|=r$, $|B|=s$, 则

$$\gamma_{ss}^M(G)\geq\frac{1}{2}(2r+s)-\frac{1}{2}\big|(M,\overline{M})\big|-\big|E(G[\overline{M}])\big|.$$

证 设 f 是图 G 的任意一个符号星部分控制函数，则

$$\sum_{i=1}^k f\big(E(v_i)\big)=2f\big(E(G[M])\cup(M,\overline{M})\big)-f(M,\overline{M})$$

$$\begin{aligned}f(E)&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k f\big(E(v_i)\big)+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\&=\frac{1}{2}\sum_{v\in A}f(E(v))+\frac{1}{2}\sum_{v\in B}f(E(v))+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\&\geq\frac{1}{2}(2|A|)+\frac{1}{2}|B|-\frac{1}{2}\big|(M,\overline{M})\big|-\big|E(G[\overline{M}])\big|\\&=\frac{1}{2}(2r+s)-\frac{1}{2}\big|(M,\overline{M})\big|-\big|E(G[\overline{M}])\big|.\end{aligned}$$

很平凡的可以看出这个界是可达的. 因 $\gamma_{ss}^M\geq\gamma_{ss}^{|M|}$, 所以 [3] 中关于 γ_{ss}^k 的下界的所

有定理对 γ_{ss}^M 来说都成立，并且我们有下列

定理 2.3 对图 $G=(V,E)$, 若 $|E|=m$, $M\subseteq V$ 且 $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$, 则

$$\gamma_{ss}^M \geq \frac{1}{2}\Big(k+\sum_{i=1}^{k} d(v_i)\Big)-m.$$

此定理是 [3] 中定理 3 的变形，可以和 [3] 完全一样的证明该定理，因此略去.

3 路、圈和完全图的符号星部分控制数

定理 3.1 设 $G=(V,E)$ 是 n 个顶点的路， $M\subseteq V$ 但 $M\neq V$. $G[M]$ 的连通分支分别为 $P_0,P_1,\cdots,P_r,P_{r+1}$, 其中 P_0 表示含 G 的一个悬挂点的连同分支， P_{r+1} 表示含 G 的另一个悬挂点的连同分支，则 $\gamma_{ss}^M(G)=2(t_0+t_1+1+\cdots+t_r+1+t_{r+1})-n+1$, 其中 $t_i=|P_i|$, $i=0,1,\cdots,r+1$.

证 因 G 中每个点的度或是 1 或是 2, 所以要使 f 是 G 一个最优的符号星部分控制函数，那么 $P_0,P_1,\cdots,P_r,P_{r+1}$ 中每个边及其邻边的取值都只能为 1 其他的边都必须取 -1, 注意到这两点，此定理的证明就是显然的了。用同样的方法可得

定理 3.2 设 $G=(V,E)$ 是 n 个顶点的圈， $M\subseteq V$ 但 $M\neq V$, $G[M]$ 的连通分支分别为 $P_1,P_2,\cdots,P_r$ 则 $\gamma_{ss}^M(G)=2(|P_1|+1+|P_2|+1+\cdots+|P_r|+1)-n$.

因 $\gamma_{ss}^k(C_n)=2k-n+2$[3], 再根据上述定理不难看出，当 $C_n[M]$ 连通时 $\gamma_{ss}^M(C_n)$ 就退化为 $\gamma_{ss}^{|M|}(C_n)$, 即 γ_{ss}^k 研究的是 G 中的满足 $|M|\geq k$ 的点集 M, 而 γ_{ss}^M 可以研究 G 中的任意点集 M. 从这个意义上来讲符号星部分控制函数是符号星 k 控制函数的推广.

定理 3.3 设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单图，M 是一个独立集，$M=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$, $A=\big\{i \mid d(v_i)$ 是偶数, $i=1,2,\cdots,k\big\}$, $B=\big\{i \mid d(v_i)$ 是奇数, $i=1,2,\cdots,k\big\}$. $|A|=r$, $|B|=s$, 则

$$\gamma_{ss}^M(G)=2r+s-|E(G[\overline{M}])|.$$

证 设 f 是图 G 的任意一个符号星部分控制函数，则

$$\begin{aligned}&\sum_{e\in E} f(e)=\sum_{i=1}^{k} f(E(v_i))+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\ =&\sum_{i\in A} f(E(v_i))+\sum_{i\in B} f(E(v_i))+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\geq 2r+s-\big|E(G[\overline{M}])\big|.\end{aligned}$$

另一方面我们定义图 G 的一个符号星部分控制函数如下: 若 $i\in A$, 则 v_i 的 $\frac{1}{2}(d_i+2)$ 个邻边赋值 1. 余下的 $\frac{1}{2}(d_i-2)$ 个邻边赋值 -1. 若 $i\in B$, 则 v_i 的 $\frac{1}{2}(d_i+1)$ 个邻边赋值 1. 余下的 $\frac{1}{2}(d_i-1)$ 个邻边赋值 -1, 则易知这个函数是图 G 的一个符号星部分控制函数，于是

$$\gamma_{ss}^M(G)\leq\sum_{e\in E} f(e)=\sum_{i\in A} f(E(v_i))+\sum_{i\in B} f(E(v_i))+f\big(E(G[\overline{M}])\big)=2r+s-\big|E(G[\overline{M}])\big|.$$

证毕.

定理 3.4 设 $G=(V,E)$ 是一个 $k+k+s$ 阶完全图， $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$, 则当 $s=2l$ 时， $\gamma_{ss}^M(G)=\frac{1}{2}k(3-k)-\frac{1}{2}(k+2l)(k+2l-1)$. 当 $s=2l+1$ 时， $\gamma_{ss}^M(G)=\frac{1}{2}k(5-k)-\frac{1}{2}(k+2l+1)(k+2l)$.

证 设 f 是图 G 的任意一个符号星部分控制函数，则

$$f(E)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}f(E(v_i))+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big).$$

当 $s=2l$ 时

$$f(E)\geq\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f(E(G[\overline{M}])).$$

因 M 的每一点在 $(M,\overline{M})$ 中的邻边中至少要有 $l+1$ 个边取 1, 否则 f 不是符号星部分控制函数. 所以

$$f(M,\overline{M})\geq k(l+1)-k(k+2l-l-1),$$

所以

$$\begin{aligned}f(E)\geq&\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k(l+1)-\frac{1}{2}k(k+l-1)+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\\geq&\frac{1}{2}k(3-k)-\frac{1}{2}(k+2l)(k+2l-1).\end{aligned}$$

另一方面我们定义图 G 的一个符号星部分控制函数如下： $G[M]$ 中的边全取 $+1$, M 的每一点在 $(M,\overline{M})$ 中的邻边中有 $l+1$ 个取 $+1$, $k+l-1$ 个取 -1, $E(G[\overline{M}])$ 中的边全取 -1, 则对每一 $v\in M$, $f(E(v))=k-1+l+1-(k+l-1)=1$, 所以这个函数是图 G 的一个符号星部分控制函数，且

$$\gamma_{ss}^M\leq f(E)=1+0+(-1)+\cdots+(-(k-2))+f\big(E(G[\overline{M}])\big)=\frac{1}{2}k(3-k)-\frac{1}{2}(k+2l)(k+2l-1),$$

所以 $\gamma_{ss}^M(G)=\frac{1}{2}k(3-k)-\frac{1}{2}(k+2l)(k+2l-1)$.

当 $s=2l+1$ 时

$$f(E)\geq\frac{1}{2}2k+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big).$$

因 M 的每一点在 $(M,\overline{M})$ 中的邻边中至少要有 $l+2$ 个边取 1, 否则 f 不是符号星部分控制函数. 所以

$$f(M,\overline{M})\geq k(l+2)-k(k+2l+1-(l+2)),$$

所以

$$\begin{aligned}f(E)\geq&\frac{1}{2}2k+\frac{1}{2}k(l+2)-\frac{1}{2}k(k+l-1)+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\\geq&\frac{1}{2}k(5-k)-\frac{1}{2}(k+2l+1)(k+2l).\end{aligned}$$

另一方面我们定义图 G 的一个符号星部分控制函数如下: $G[M]$ 中的边全取 $+1$, M 的每一点在 $(M,\overline{M})$ 中的邻边中有 $l+2$ 个取 $+1$, $k+l-1$ 个取 -1, $E(G[\overline{M}])$ 中的边全取 -1, 则对每一 $v\in M$, $f(E(v))=k-1+l+2-(k+l-1)=2$, 所以这个函数是图 G 的一个符号星部分控制函数，且

$$\gamma_{ss}^M\le f(E)=2+1+0+(-1)+\cdots+(-(k-3))+f(E(G[\overline{M}]))=\frac{1}{2}k(5-k)-\frac{1}{2}(k+2l+1)(k+2l),$$

所以 $\gamma_{ss}^M(G)=\frac{1}{2}k(5-k)-\frac{1}{2}(k+2l+1)(k+2l)$. 证毕

定理 3.5 设 $G=(V,E)$ 是一个 $2k+2k-s$ 阶完全图, $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2k}\}$, 则当 $s=2l$ 时, $\gamma_{ss}^M(G)=k-2k^2+2kl-(k-l)(2k-2l-1)$. 当 $s=2l-1$ 时, $\gamma_{ss}^M(G)=k-2k^2+2kl-(k-l)(2k-2l+1)$.

证 设 f 是图 G 的任意一个符号星部分控制函数，则

$$f(E)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k}f(E(v_i))+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big).$$

当 $s=2l$ 时

$$\begin{aligned}f(E)\ge&\frac{1}{2}2k+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big),\\ \ge&k-\frac{1}{2}\big|(M,\overline{M})\big|-\frac{1}{2}(2k-2l)(2k-2l-1)=k-2k^2+2kl-(k-l)(2k-2l-1).\end{aligned}$$

另一方面我们定义图 G 的一个符号星部分控制函数如下: $(M,\overline{M})$ 中的边全取 -1, K_{2k} 有 $2k-1$ 个完美匹配，其中的 $2k-2l+1$ 个匹配中的边全取 $+1$, 还剩余 $2k-1-(2k-2l+1)=2l-2$ 个匹配，这 $2l-2$ 个匹配中的 $l-1$ 个匹配中的边全取 $+1$, 另 $l-1$ 个匹配中的边全取 -1. 易证这是一个符号星部分控制函数，且

$$\begin{aligned}\gamma_{ss}^M(G)\le&f(E)=C_{2k}^2-(l-1)k-(l-1)k-2k(2k-2l)+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\ =&k-2k^2+2kl-(k-l)(2k-2l-1).\end{aligned}$$

特别地当 $M=V$ 时得 $\gamma'_{ss}(K_{2k})=k$. 当 $s=2l-1$ 时

$$\begin{aligned}f(E)\ge&\frac{1}{2}\times 2\times 2k+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big),\\ \ge&2k-\frac{1}{2}\big|(M,\overline{M})\big|-\frac{1}{2}(2k-2l)(2k-2l+1)=k-2k^2+2kl-(k-l)(2k-2l+1).\end{aligned}$$

另一方面我们定义图 G 的一个符号星部分控制函数如下: $(M,\overline{M})$ 中的边全取 -1, K_{2k} 有 $2k-1$ 个完美匹配，其中的 $2k-2l+2$ 个匹配中的边全取 $+1$, 还剩余 $2k-1-(2k-2l+2)=2l-3$ 个匹配，这 $2l-3$ 个匹配中的 $l-2$ 个匹配中的边全取 $+1$, 另 $l-2$ 个匹配中的边全取 -1. 最后一个匹配全取 $+1$. 易证这是一个符号星部分控制函数，且

$$\begin{aligned}\gamma_{ss}^M(G)\le&f(E)=C_{2k}^2-(l-2)k-(l-2)k-2k(2k-2l+1)+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\ =&k-2k^2+2kl-(k-l)(2k-2l+1).\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 3.6 设 $G=(V,E)$ 是一个 $2k-1+2k-(2l-1)$ 阶完全图，$M=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2k-1}\}$. 则，当 l 为偶数时，$\gamma_{ss}^M(G)=2(2k-l)(l-k)$, 当 l 为奇数时，$\gamma_{ss}^M(G)=2(2k-l)(l-k)+1$.

证 当 l 为偶数时，设 f 是图 G 的任意一个符号星部分控制函数，则

$$\begin{aligned}f(E)=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k-1}f(E(v_i))+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\ \geq&\frac{1}{2}(2k-1)+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\ \geq&\frac{1}{2}(2k-1)-\frac{1}{2}(2k-1)(2k-2l+1)-(k-l)(2k-2l+1)=2(2k-l)(l-k).\end{aligned}$$

另一方面我们定义图 G 的一个符号星部分控制函数如下：$(M,\overline{M})$ 中的边全取 -1, K_{2k-1} 有 $k-1$ 个 Hamilton 圈. 其中的 $k-\frac{1}{2}l$ 个 Hamilton 圈上的边全取 $+1$, 剩余的 $\frac{1}{2}l-1$ 个 Hamilton 圈上的边全取 -1. 易证这是一个符号星部分控制函数，且

$$\begin{aligned}\gamma_{ss}^M(G)\leq f(E)=&C_{2k-1}^2-(2k-1)\Big(\frac{1}{2}l-1\Big)-(2k-1)\Big(\frac{1}{2}l-1\Big)\\ &-(2k-1)(2k-2l+1)-(k-l)(2k-2l+1)\\ =&2(2k-l)(l-k).\end{aligned}$$

当 l 为奇数时，设 f 是图 G 的任意一个符号星部分控制函数，不妨 $(M,\overline{M})$ 中的边全取 -1, 否则若 $(M,\overline{M})$ 中有条边 e_1 取 $+1$, 则 $G[M]$ 中必有一条边 e_2 取 -1, 把 e_1 的取值改为 -1, e_2 的取值改为 $+1$, 则仍得到图 G 的一个符号星部分控制函数 f' 且 $f'(E)=f(E)$. 进一步，若对所有的 $v\in M$ 都有 $f(E(v))=1$, 则 v 在 $G[M]$ 的邻边中取 $+1$ 的共有 $2k-l$ 条，取 -1 的共有 $l-2$ 条. 设 N 表示 $G[M]$ 的取 -1 的边的集合，则 $G[N]$ 是一个度为 $l-2$ 的正则图且含有奇数个顶点，这是不可能的，因图中奇度数的顶点的个数为偶数. 所以必有一点 $v\in M$ 使 $f(E(v))\geq 3$. 这样，

$$\begin{aligned}f(E)=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k-1}f(E(v_i))+\frac{1}{2}f(M,\overline{M})+f\big(E(G[\overline{M}])\big)\\ \geq&\frac{1}{2}(2k-2+3)-\frac{1}{2}(2k-1)(2k-2l+1)-(k-l)(2k-2l+1)\\ =&2(2k-l)(l-k)+1.\end{aligned}$$

另一方面我们定义图 G 的一个符号星部分控制函数如下：$(M,\overline{M})$ 中的边全取 -1, K_{2k-1} 有 $k-1$ 个 Hamilton 圈. 其中的 $k-\frac{1}{2}(l+1)$ 个 Hamilton 圈上的边全取 $+1$, $\frac{1}{2}(l+1)-2$ 个 Hamilton 圈上的边全取 -1, 最后一个 Hamilton 圈上的一个最大匹配的边取值 -1, 这个圈上的其他边取 $+1$. 易证这是一个符号星部分控制函数，且

$$\begin{aligned}\gamma_{ss}^M(G)\leq f(E)=&C_{2k-1}^2-(2k-1)\Big(\frac{l+1}{2}-2\Big)-(k-1)-(2k-1)\Big(\frac{l+1}{2}-2\Big)-(k-1)\\ &-(2k-1)(2k-2l+1)-(k-l)(2k-2l+1)\\ =&2(2k-l)(l-k)+1.\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 3.7 设 $G=(V,E)$ 是一个 $2k-1+2k-2l$ 阶完全图, $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2k-1}\}$. 则当 l 为偶数时, $\gamma_{ss}^M(G)=-2k^2+2kl+3k-l-1-(k-l)(2k-2l-1)$. 当 l 为奇数时, $\gamma_{ss}^M(G)=-2k^2+2kl+3k-l-(k-l)(2k-2l-1)$. 特别地, 当 $M=V$ 时, $\gamma'_{ss}(K_{2k-1})=2k-1$, k 为偶数, $\gamma'_{ss}(K_{2k-1})=2k$, k 为奇数. 此定理的证明同定理 3.6 一样, 因此略去.

4 完全图的符号星 k 控制数

由完全图的对称性知 $\gamma_{ss}^k(K_n)=\min\left\{\gamma_{ss}^M(K_n)||M|=k,k+1,\cdots,n\right\}$ (1). 据此, 我们利用完全图的符号星部分控制数可以求出完全图的符号星 k 控制数.

定理 4.1 设 $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,4)$, 则

当 $1\le r\le \frac{n}{2}+1$ 时, $\gamma_{ss}^r=\frac12 r(3-r)-\frac12(n-r)(n-r-1)$.

当 $r>\frac{n}{2}+1$ 时, 若 $r=2k$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac12 n^2+kn+\frac12 n$, 若 $r=2k-1$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac12 n^2+kn$.

设 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,4)$ 则, 当 $1\le r\le\frac{n}{2}+1$ 时, $\gamma_{ss}^r=\frac12 r(3-r)-\frac12(n-r)(n-r-1)$.

当 $r>\frac{n}{2}+1$ 时, 若 $r=2k$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac12 n^2+kn+\frac12 n$, 若 $r=2k-1$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac12 n^2+kn+1$.

证 设 $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_r\}$, 为了方便不妨把 γ_{ss}^M 记为 γ_{ss}^r 后面将看到这不致引起混淆. 当 $1\le r\le\frac{n}{2}$ 时, 由定理 3.4 知 $\gamma_{ss}^r=\frac12 r(3-r)-\frac12(n-r)(n-r-1)$, $\gamma_{ss}^{r+1}=\frac12(r+1)(2-r)-\frac12(n-r-1)(n-r-2)$. 所以 $\gamma_{ss}^{r+1}-\gamma_{ss}^r=n-2r\ge 0$, 所以 $\gamma_{ss}^{r+1}\ge\gamma_{ss}^r$, 又 $\gamma_{ss}^{\frac{n}{2}}=-\frac14 n^2+n$. 当 $r=\frac{n}{2}+1$ 时, 若 $\frac{n}{2}$ 为偶数, 由定理 3.6 知 $2k-1=\frac{n}{2}+1$, $k=\frac{n}{4}+1$, $2k-2l+1=n-2k+1$, $l=2$ 为偶数, 所以 $\gamma_{ss}^r=2(2k-l)(l-k)=2\left(\frac{n}{2}\right)\left(1-\frac{n}{4}\right)=-\frac14 n^2+n$. 若 $\frac{n}{2}$ 为奇数, 由定理 3.5 知 $2k=\frac{n}{2}+1$, $k=\frac{n}{4}+\frac12$, $2k-2l=n-2k$, $4k-n=2l$, $n+2-n=2l$, $l=1$ 为奇数, 所以 $\gamma_{ss}^r=k-2k^2+2kl-\frac12\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)=-\frac14 n^2+n$. 当 $r>\frac{n}{2}+1$ 时, 若 $r=2k$, 由定理 3.5 知 $2k-2l=n-2k$, $l=2k-\frac12 n$, 所以 $\gamma_{ss}^r=k-2k^2+2kl-\frac12(n-2k)(n-2k-1)=-\frac12 n^2+kn+\frac12 n$, 若 $r=2k-1$, $2k-2l+1=n-2k+1$, $4k-n=2l$, $l=2k-\frac{n}{2}$, 当 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)$ 时, l 为偶数, 由定理 3.6 知 $\gamma_{ss}^r=2(2k-l)(l-k)=-\frac12 n^2+kn$, 当 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,4)$ 时, l 为奇数, 由定理 3.6 知 $\gamma_{ss}^r=2(2k-l)(l-k)+1=-\frac12 n^2+kn+1$. 下面证明, 当 $r\ge\frac12 n+1$ 时, γ_{ss}^r 也是增的. 首先 $\gamma_{ss}^{2k}=-\frac12 n^2+kn+\frac12 n,\gamma_{ss}^{2k-1}=-\frac12 n^2+kn$ 或 $\gamma_{ss}^{2k-1}=-\frac12 n^2+kn+1$, 都有 $\gamma_{ss}^{2k}\ge\gamma_{ss}^{2k-1}$, 其次 $\gamma_{ss}^{2k+1}=\gamma_{ss}^{2(k+1)-1}=-\frac12 n^2+kn+n$ 或 $\gamma_{ss}^{2k+1}=\gamma_{ss}^{2(k+1)-1}=-\frac12 n^2+kn+n+1$ 都有 $\gamma_{ss}^{2k+1}\ge\gamma_{ss}^{2k}$. 所以 γ_{ss}^r 随 r 的增大而增大. 根据上面的分析可得 γ_{ss}^r 的变化规律: 当 r 从 1 到 $\frac{n}{2}+1$ 时, γ_{ss}^r 从 $-\frac12 n^2+\frac32 n$ 增大到 $-\frac14 n^2+n$, 当 r 从 $\frac{n}{2}+1$ 变到 n 时, γ_{ss}^r 又从 $-\frac14 n^2+n$ 上升到 $\frac{n}{2}$. 再根据 (1) 式我们获得如下结论: 设 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)$, 则

当 $1\le r\le\frac{n}{2}+1$ 时, $\gamma_{ss}^r=\frac12 r(3-r)-\frac12(n-r)(n-r-1)$.

当 $r>\frac{n}{2}+1$ 时, 若 $r=2k$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac12 n^2+kn+\frac12 n$, 若 $r=2k-1$ 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac12 n^2+kn$.

设 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,4)$, 则当 $1\le r\le\frac{n}{2}+1$ 时, $\gamma_{ss}^r=\frac12 r(3-r)-\frac12(n-r)(n-r-1)$.

当 $r>\frac{n}{2}+1$ 时, 若 $r=2k$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac12 n^2+kn+\frac12 n$, 若 $r=2k-1$, 则 $\gamma_{ss}^r=$

$-\frac{1}{2}n^2+kn+1$.

定理 4.2 设 $k_1=\frac{1}{2}(n+2-\sqrt{2n-1})$, $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4)$, 则

当 $1\le r\le k_1$ 时， $\gamma_{ss}^r=\frac{1}{2}r(5-r)-\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$.

当 $k_1\le r\le \frac{n-1}{2}+1$ 时， $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)+2$.

当 $r>\frac{n-1}{2}+1$ 时，若 $r=2k$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}n$, 若 $r=2k-1$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}$.

设 $k_1=\frac{1}{2}(n+2-\sqrt{2n+3})$, $n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4)$, 则

当 $1\le r\le k_1$ 时， $\gamma_{ss}^r=\frac{1}{2}r(5-r)-\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$.

当 $k_1\le r\le \frac{n-1}{2}+1$ 时， $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)+1$.

当 $r>\frac{n-1}{2}+1$ 时，若 $r=2k$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}n$, 若 $r=2k-1$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{2}n^2+kn+k-\frac{1}{2}$.

证 设 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4)$, 当 $1\le r\le\frac{n-1}{2}$ 时, 由定理 3.4 知 $\gamma_{ss}^r=\frac{1}{2}r(5-r)-\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$, $\gamma_{ss}^{r+1}=\frac{1}{2}(r+1)(4-r)-\frac{1}{2}(n-r-1)(n-r-2)$. 所以 $\gamma_{ss}^{r+1}-\gamma_{ss}^r=n-2r+1\ge 0$, 所以 $\gamma_{ss}^{r+1}\ge\gamma_{ss}^r$. 当 $r=\frac{n-1}{2}+1$ 时, 由定理 3.7 知, $2k-1=\frac{n-1}{2}+1$, $k=\frac{n-1}{4}+1$, $2\big(\frac{n-1}{4}+1\big)-2l=\frac{n-1}{2}$, $l=1$ 为奇数， $\gamma_{ss}^r=-2\big(\frac{n-1}{4}+1\big)^2+2\big(\frac{n-1}{4}+1\big)\times 1+3\times\big(\frac{n-1}{4}+1\big)-1-\frac{1}{2}\big(\frac{n-1}{2}\big)\big(\frac{n-1}{2}-1\big)=-\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{n-1}{2}+2$. 当 $r>\frac{n-1}{2}+1$ 时，若 $r=2k$, 由定理 3.5 知, $2k-2l+1=n-2k$, $l=2k-\frac{n-1}{2}$, 所以 $\gamma_{ss}^r=k-2k^2+2k\big(2k-\frac{n-1}{2}\big)+\big(k-\frac{n-1}{2}\big)(n-1-2k+1)=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}n$, 若 $r=2k-1$, 由定理 3.7 知, $2k-2l=n-2k+1$, $l=2k-\frac{n+1}{2}$, 所以 $\gamma_{ss}^r=-2k^2+2k\big(2k-\frac{n+1}{2}\big)+3k-2k+\frac{n+1}{2}+(k-\frac{n+1}{2})(n+1-2k-1)=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}$. 下面证明，当 $r\ge\frac{n-1}{2}+1$ 时， γ_{ss}^r 也是增的. 首先 $\gamma_{ss}^{2k}=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}n$, $\gamma_{ss}^{2k-1}=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}$ 所以 $\gamma_{ss}^{2k}\ge\gamma_{ss}^{2k-1}$. 其次 $\gamma_{ss}^{2k+1}=\gamma_{ss}^{2(k+1)-1}=-\frac{1}{2}n^2+kn+n+k+\frac{3}{2}\ge\gamma_{ss}^{2k}$. 所以 γ_{ss}^r 随 r 的增大而增大. 根据上面的分析可得 γ_{ss}^r 的变化规律: 当 r 从 1 到 $\frac{n-1}{2}$ 时, γ_{ss}^r 从 $-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$ 增大到 $-\frac{1}{4}(n-1)^2+n-1$, 当 r 从 $\frac{n-1}{2}$ 到 $\frac{n-1}{2}+1$ 时, γ_{ss}^r 从 $-\frac{1}{4}(n-1)^2+n-1$ 跌落到 $-\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{n-1}{2}+2$, 当 r 从 $\frac{n-1}{2}+1$ 变到 n 时, γ_{ss}^r 又从 $-\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{n-1}{2}+2$ 上升到 $n+1$. 所以我们需要讨论下列不等式: $\frac{1}{2}r(5-r)-\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)+\frac{1}{4}(n-1)^2-\frac{n-1}{2}-2\ge 0$. 经过研究上不等式可得 $k_1=\frac{1}{2}(n+2-\sqrt{2n-1})$. 再根据 (1) 式我们获得下列结论:

当 $1\le r\le k_1$ 时， $\gamma_{ss}^r=\frac{1}{2}r(5-r)-\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$.

当 $k_1\le r\le \frac{n-1}{2}+1$ 时， $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)+2$.

当 $r>\frac{n-1}{2}+1$ 时，若 $r=2k$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}n$, 若 $r=2k-1$, 则 $\gamma_{ss}^r=-\frac{1}{2}n^2+kn+k+\frac{1}{2}$.

当 $n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4)$ 时，可以用上面同样的方法证明定理成立，因此略去．定理全部证毕.

注 用本部分的方法再结合定理 3.1 定理 3.2 去求路和圈的符号星 k 控制数与用 [3] 的方法去求这一参数，不难看出所得结果是一样的.

致谢！ 衷心感谢审稿专家对本文所提出的宝贵修改建议.

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London and Elsevier, New York: Macmillan, 1976

[2] Xu Baogen. On Edge Domination Numbers of Graphs. *J. Discrete Math.*, 2005, 294: 311–316

[3] 徐保根，李春华. 图的符号星 k 控制数. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(4): 638–641
(Xu Baogen, Li Chunhua. On Signed Star k Domination Numbers of Graphs. *J. Pure and Applied Mathematics*, 2009, 25(4): 638–641)

[4] Xu Baogen. On Signed Edge Domination of Graphs. *J. Journal of Mathematical Reasearch and Exposition*, 2007, 27(1): 7–12

On Signed Star Part Domination Number of Graph

ZHOU Zhongwang

(*College of Mathematics and Informatics, Weifang University, Weifang* 261061)

(*E-mail: zhouzhongwang65@sohu.com*)

Abstract In this paper we introduce the concept of signed star part domination in graphs. Let $G=(V,E)$ be a graph, M be a subset of V, a function $f: E\to\{-1,1\}$ is said to be a signed star part dominating function (SSPDF) of G if $\sum\limits_{e\in E(v)} f(e)\geq 1$ holds for every $v\in M$, where $E(v)$ denotes the set of edges incident with v. The signed star part domination number of G is defined as $\gamma_{ss}^M(G)=\min\big\{\sum\limits_{e\in E(G)} f(e)|\, f$ is an SSPDF of $G\big\}$. In this paper we give the upper and lower bounds of $\gamma_{ss}^M(G)$ for general graphs G, and determine the signed star part domination numbers for path, cycle and complete graph. As an application of our new concept, we obtain the signed star k domination numbers of complete graphs.

Key words signed star part domination function; signed star part domination number; signed star k domination number

MR(2000) Subject Classification 05C50

Chinese Library Classification O157.5