第 34 卷 第 6 期　应 用 数 学 学 报　Vol. 34 No. 6
2011 年 11 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　Nov., 2011

空间非局部带时滞的 Hosono-Mimura 模型的双稳行波解 *

吴庆华

(孝感学院数学与统计学院，孝感 432000)

(E-mail: wqhyimo@yeah.net)

汤燕斌

(华中科技大学数学与统计学院，武汉 430074)

摘　要　本文讨论了两个物种的竞争 Hosono-Mimura 模型. 首先，我们考虑了该系统对应的非线性系统平衡点的稳定性；然后，我们证明了空间非局部带时滞的 Hosono-Mimura 竞争扩散系统有联结两个稳定平衡点的行波解. 在证明行波解的存在性时，我们通过变换，把空间非局部的时滞模型转化成了一个四维的非时滞系统来讨论.

关键词　行波解；平衡点；时滞；反应扩散方程

MR(2000) 主题分类　35K57; 92D25

中图分类　O175. 29

1　引言

Hosono Y, Mimura M[1] 介绍了一个非线性竞争模型

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + u(x,t)[a - bu(x,t) - kv(x,t)], \\ v_t = d_2 v_{xx} + v(x,t)\Big[a - bv(x,t) - \dfrac{ku(x,t)}{1+ev(x,t)}\Big]. \end{cases} \tag{1.1}$$

他们用奇点扰动方法证明了系统 (1.1) 存在行波解. 但是随着研究的深入，研究者们逐渐发现，在人口动力系统中，时间的滞后和空间分布的非局部等现象是一种非常常见的现象. 所以 Wu J[2] 考虑了带时滞的模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u_t(x)), \tag{1.2}$$

其中 $x \in \Omega \subset R,\ t > 0,\ D = \mathrm{diag}\,(d_1, \cdots, d_n), d_i > 0,\ \ u \in R^n,\ u_t(x) \in C([-\tau, 0], R^n)$, $\tau \in [0, \infty)$ 是最大时滞.　$f : C([-\tau, 0], R^n) \to R^n$. 近年来， Wang Z C, Li W T[3] 又研究

本文 2008 年 11 月 19 日收到. 2011 年 7 月 5 日收到修改稿.
* 湖北省教育厅科研资助项目 (B20102701).

了如下带时滞模型

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u,g*u), \tag{1.3}$$

这里 $u(t,x)=(u_1,\cdots,u_n)^T,\ t\geq 0,\ x\in R.\ D=\mathrm{diag}\,(d_1,\cdots,d_n),\ d_i>0,\ f\in C(R^{2n},R^n)$, $(g*u)(t,x)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-s,x-y)u(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$, 核函数 $g(t,x)$ 可以有多种形式. 如 $g(t,x)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\delta(x)$, $\tau>0$ 或 $g(t,x)=\delta(t)\frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}e^{-\frac{x^2}{4\rho}}$, $\rho>0$ 或 $g(t,x)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $\tau>0$. 以及 Lin G， Li W T[4] 的模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=d_1\triangle u_1+r_1u_1[1-a_1u_1-b_1(g_1*u_2)],\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=d_2\triangle u_2+r_2u_2[1-a_2u_2-b_2(g_2*u_1)],\end{cases} \tag{1.4}$$

$$(g_1*u_2)(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau_1}e^{-\frac{\theta}{\tau_1}}\frac{1}{\sqrt{4\pi d_2\theta}}e^{-\frac{z^2}{4d_2\theta}}u_2(x-z,t-\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,$$

$$(g_2*u_1)(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau_2}e^{-\frac{\theta}{\tau_2}}\frac{1}{\sqrt{4\pi d_1\theta}}e^{-\frac{z^2}{4d_1\theta}}u_1(x-z,t-\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

受到上述文章的启发，本文将在 (1.1) 中引入积分形式，考虑空间非局部性和时滞对行波解的影响。下面我们主要讨论模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=d_1\triangle u(x,t)+u(x,t)[1-u(x,t)-k(g_1*v)(x,t)],\\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}=d_2\triangle v(x,t)+v(x,t)\Big[1-v(x,t)-k\dfrac{(g_2*u)(x,t)}{1+v(x,t)}\Big],\end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $x\in R,\ t\geq 0,\ u,v$ 是连续函数， $d_1,d_2>0,\ k>\sqrt{2}$. 而且

$$\begin{cases}(g_1*v)(x,t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}G_1(x-y,t-s)k_1(t-s)v(y,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y,\\ (g_2*u)(x,t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}G_2(x-y,t-s)k_2(t-s)u(y,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y,\end{cases} \tag{1.6}$$

$G_i(x,t)=\frac{1}{4\pi d_{3-i}t}e^{-\frac{x^2}{4d_{3-i}t}}$, $G_i(x,0)=\delta(x)$, $k_i(s)=\frac{1}{\tau_i}e^{-\frac{s}{\tau_i}}$, $i=1,2$. 令 $\theta=t-s$, $z=x-y$, 则 (1.6) 变形为

$$\begin{cases}(g_1*v)(x,t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau_1}e^{-\frac{\theta}{\tau_1}}\frac{1}{4\pi d_2\theta}e^{-\frac{z^2}{4d_2\theta}}v(x-z,t-\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,\\ (g_2*u)(x,t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau_2}e^{-\frac{\theta}{\tau_2}}\frac{1}{4\pi d_1\theta}e^{-\frac{z^2}{4d_1\theta}}u(x-z,t-\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.\end{cases} \tag{1.7}$$

本文第二部分将讨论系统 (1.5) 的几个平衡点的稳定性，第三部分将证明系统 (1.5) 有联结两个稳定平衡点 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的单调行波解.

2　平衡点的稳定性

下面我们只需考虑时滞系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u(1-u-kv),\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\Big(1-v-\dfrac{ku}{1+v}\Big),\end{cases} \tag{2.1}$$

记 $f_1(u,v)=u(1-u-kv),\ f_2(u,v)=v\big(1-v-\frac{ku}{1+v}\big)$, 则

$$\Big(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\Big)=\begin{pmatrix}1-2u-kv & -\dfrac{kv}{1+v}\\ -ku & 1-2v-\dfrac{ku}{(1+v)^2}\end{pmatrix}.$$

(2.1) 有五个平衡点,分别是 $(0,0),(1,0),(0,1),(u^0,v^0),(u^1,v^1)$. 其中 $u^0=1-k\frac{k^2+\sqrt{\triangle}}{2}$, $v^0=\frac{k^2+\sqrt{\triangle}}{2}$; $u^1=1-k\frac{k^2-\sqrt{\triangle}}{2}$, $v^1=\frac{k^2-\sqrt{\triangle}}{2}$. $\triangle=k^4-4(k-1)=k^4-4k^2+4+4k^2-4k=(k^2-2)^2+4k(k-1)>0$, for $k>\sqrt{2}$. 容易检验 (u^0,v^0) 和 (u^1,v^1) 都是正平衡点.

直接计算可得 $\big(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\big)\big|_{(0,0)}$ 两个特征根都是 1, 所以 $(0,0)$ 是 (2.1) 的不稳定平衡点. $\big(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\big)\big|_{(1,0)}$ 和 $\big(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\big)\big|_{(0,1)}$ 的特征根都分别是 -1 和 $1-k$, 所以 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 是 (2.1) 的渐近稳定平衡点.

设 $\big(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\big)\big|_{(u^0,v^0)}$ 的两个特征根分别为 λ_1 和 λ_2, 则有

$$\lambda_1+\lambda_2=-\Big(u^0+\frac{2(v^0)^2}{1+v^0}\Big)<0,\qquad \lambda_1\lambda_2=\frac{u^0v^0(2v^0-k^2)}{1+v^0}>0.$$

所以 (u^0,v^0) 渐近稳定平衡点. 类似讨论可得 (u^1,v^1) 是不稳定平衡点.

定理 2.1 系统 (1.5) 有三个渐近稳定平衡点 $(u^0,v^0),(1,0),(0,1)$ 和两个不稳定平衡点 $(0,0)$, (u^1,v^1).

3 行波解的存在性

定义 3.1 一般方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\triangle u(x,t)+f(u(x,t)) \tag{3.1}$$

形如 $u(x,t)=\phi(x+ct)$ 的解一定满足满足方程 $c\phi'(t)=D\phi''(t)+f(\phi(t))$ $(\phi(t)\in C^2(R,R^n)$, c 是常数), 称 $u(x,t)=\phi(x+ct)$ 为方程 (3.1) 的行波解.

如果还满足

$$\lim_{t\to-\infty}\phi(t)=\phi_-,\qquad \lim_{t\to+\infty}\phi(t)=\phi_+. \tag{3.2}$$

$\phi_-<\phi_+$, 且 $f(\phi_\pm)=0$, 则称 $\phi(x+ct)$ 为联结 ϕ_- 和 ϕ_+ 的行波解，其中 c 是波速.

引理 3.1[5] 令 $f(\phi^k)=0$, $\phi^k\in[\phi_-,\phi_+]$, 如果 $f'(\phi_\pm)$ 的特征值均是负实部的，且能够找到合适的向量 $p_k\ge 0$, 使得 $p_kf'(\phi^k)>0$, $k=1,\cdots,m$. 那么系统 (3.1) 一定有联结 ϕ_- 和 ϕ_+. 的行波解.

下面我们证明 (1.5) 有联结 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的行波解.

令 $g_1 * v = u_3,\ g_2 * u = u_4$, 记 $u_1 = u,\ u_2 = v$, 则 (1.5) 等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \triangle u_1 + u_1(1 - u_1 - k u_3), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \triangle u_2 + u_2\Big(1 - u_2 - k\dfrac{u_4}{1+u_2}\Big), \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = d_2 \triangle u_3 + \dfrac{1}{\tau_1} u_2 - \dfrac{1}{\tau_1} u_3, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t} = d_1 \triangle u_4 + \dfrac{1}{\tau_2} u_1 - \dfrac{1}{\tau_2} u_4. \end{cases} \tag{3.3}$$

为了运用引理，我们先做变换 $u_1^* = 1 - u_1,\ u_4^* = 1 - u_4$, 为了书写简便，仍去掉 $*$ 这样 (3.3) 可变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \triangle u_1 + (1 - u_1)(k u_3 - u_1), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \triangle u_2 + u_2\Big(1 - u_2 - k\dfrac{1-u_4}{1+u_2}\Big), \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = d_2 \triangle u_3 + \dfrac{1}{\tau_1} u_2 - \dfrac{1}{\tau_1} u_3, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t} = d_1 \triangle u_4 + \dfrac{1}{\tau_2} u_1 - \dfrac{1}{\tau_2} u_4. \end{cases} \tag{3.4}$$

写成行波变量的方程形式：

$$\begin{cases} c\phi_1' = d_1\phi_1'' + (1-\phi_1)(k\phi_3 - \phi_1), \\ c\phi_2' = d_2\phi_2'' + \phi_2\Big(1 - \phi_2 - k\dfrac{1-\phi_4}{1+\phi_2}\Big), \\ c\phi_3' = d_2\phi_3'' + \frac{1}{\tau_1}\phi_2 - \dfrac{1}{\tau_1}\phi_3, \\ c\phi_4' = d_1\phi_4'' + \frac{1}{\tau_2}\phi_1 - \dfrac{1}{\tau_2}\phi_4 \end{cases} \tag{3.5}$$

带渐近边界条件

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4) = (0,0,0,0), \\ \lim\limits_{t\to+\infty}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4) = (1,1,1,1). \end{cases} \tag{3.6}$$

记 $\phi_- = (0,0,0,0),\ \phi_+ = (1,1,1,1)$, 显然 $f(\phi_\pm) = 0$. $f(\phi) = 0$ 只有一个正解 $\widehat{\phi} = (1-u^1, v^1, v^1,\ 1-u^1) = \big(k\frac{k^2-\sqrt{\triangle}}{2}, \frac{k^2-\sqrt{\triangle}}{2}, \frac{k^2-\sqrt{\triangle}}{2},\ k\frac{k^2-\sqrt{\triangle}}{2}\big) \in (\phi_-, \phi_+)$. 直接计算 $f'(\widehat{\phi})$,

$$f'(\widehat{\phi}) = \begin{pmatrix} -u^1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\tau_2} \\ 0 & -2\dfrac{(v^1)^2}{(1+v^1)} & \dfrac{1}{\tau_1} & 0 \\ ku^1 & 0 & -\dfrac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & k\dfrac{(v^1)}{(1+v^1)} & 0 & -\dfrac{1}{\tau_2} \end{pmatrix}.$$

令 $P_k = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, 只要

$$\frac{kp_4}{2v^1} > p_2 > p_3 > \frac{p_1}{k} > \frac{p_4}{k}, \tag{3.7}$$

则 $P_k f'(\widehat{\phi}) > 0$ 一定成立. 事实上，因为 $k > \sqrt{2}$, 所以有常数向量 P_k 使得 (3.7) 成立. 再由引理 3.1 可以得到

定理 3.2 当 $k > \sqrt{2}$, 存在一个单调向量值函数 $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi(t)) \in C^2(R, R^4)$ 满足 (3.5) 和 (3.6).

推论 3.3 当 $k > \sqrt{2}$, 系统 (1.5) 有一个单调的联结 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的行波解，就是一个双稳的波前解.

参 考 文 献

[1] Hosono Y, Mimura M. Singular Perturbation Approach to Traveling Waves in Competing and Diffusing Species Models. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1982, 22(3): 435–461

[2] Wu J H. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996

[3] Wang Z C, Li W T, Ruan S. Existence and Stability of Traveling Wavefronts in Reaction Advection Diffusion Equasions with Nonlocal Delay *Jour. Diff. Equa.*, 2007, 238: 153–200

[4] Lin G, Li W T. Bistable Wavefronts in a Diffusive and Competitive Lotka-Volterra Type System with Nonlocal Delay. *Jour. Diff. Equa.*, 2008, 244: 487–513

[5] Volpert A I, Volpert V A. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Transl. Math. Monogr., vol.140, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1994

Bistable Wave Fronts in the Hosono-Mimura System with Nonlocal Delays

WU Qinghua

(*School of Mathematics and Statistics, Xiaogan University, Xiaogan* 432000)

(*E-mail: wqhyimo@yeah.net*)

TANG Yanbin

(*School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Abstract A diffusive Hosono-Mimura type model with nonlocal delays for two competitive species is considered. The first, we studied the stability for equilibriums of the nonlinearities. And then, the existence of traveling wave fronts analogous to a bistable wave front for two competitive species is proved by transforming the system with nonlocal delays to a four-dimensional system without delay.

Key words traveling wave solutions ; equilibrium; time delay; reaction-diffusion equation

MR(2000) Subject Classification 35K57; 92D25

Chinese Library Classification O175.29