第 34 卷 第 6 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 34 No. 6
2011 年 11 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Nov., 2011

时滞脉冲抛物型微分方程解的存在性及其在种群动力学中的应用*

赵书芬　　张建元

(昭通师范高等专科学校数学系，昭通 657000)

(E-mail: zhaoshufen@gmail.com)

摘 要　本文研究了一类具有时滞的脉冲抛物型方程在 Neumann 边值条件下解的存在性问题，利用定义上下解对的方法，给出了一个新的解的存在性定理和比较原理. 作为例子，当把这种方法应用到一种群模型中时，得到了该系统正平衡点全局吸引的新结果.

关键词　脉冲抛物型方程；时滞；上下解对

MR(2000) 主题分类　35R12; 35R10

中图分类　O175.2

1　引言及定义

脉冲偏微分系统可以用来描述物理，化学，生物，医学，人口动力学，最优控制等现代科技领域中所发生的许多现象. [1] 首先研究了脉冲偏微分系统并建立了脉冲偏微分系统的比较原理，而且还把比较原理应用于单种群增长模型，得到了其平衡点全局渐近稳定的充分条件. 接下来的十几年中，也陆续发表许多有关脉冲偏微分方程和脉冲偏泛函微分方程的文章 [1−7]. 虽然在 [1,4,5] 中，作者们分别建立了脉冲偏微分系统的比较原理，并把它们应用到实际的生物模型中来，得到了一些很好的结果，然而并未说明由这些比较原理就能保证解的存在性. 就作者所知，目前有关脉冲偏泛函微分方程解的存在性及比较原理的研究工作还没有. 受 [1,3,4,5,8] 的启发，本文将主要对具有时滞的脉冲抛物型微分方程建立上下解对的概念，并利用脉冲抛物型微分方程存在上下解对来得出系统解的存在唯一性. 在研究时滞的脉冲抛物型微分系统解的渐近行为时，本文所给出的上下解对的方法是一种比较有效的方法. 最后，我们把这种方法应用到一实际模型中，得到了该系统的正平衡点是全局吸引的新结果.

本文 2010 年 7 月 18 日收到.

*云南省教育厅科研基金 (2010Y222) 资助项目.

考虑下面具有时滞的脉冲抛物型微分方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \triangle u(t,x) + f(t,x,u(t,x),u(t-\tau,x)), \qquad (t,x) \in D_\infty \setminus P_\infty, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial \nu} = 0, \qquad (t,x) \in \Gamma_\infty \setminus \Lambda_\infty, \tag{1.2}$$

$$u(\theta,x) = \phi(\theta,x) \geq 0, \qquad (\theta,x) \in D^\tau, \tag{1.3}$$

$$u(t_k^+,x) - u(t_k,x) = g_k(u(t_k,x)), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.4}$$

其中，$x \in \Omega \subset R^n$，Ω 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域；$\frac{\partial}{\partial \nu}$ 代表关于 $\partial\Omega$ 的外法向量，$\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. 集合 $S = \{t_k\}_{k=1}^\infty \subset R$ 满足：$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$; $\tau > 0$ 是时滞且满足：$\forall i \in N = \{1,2,\cdots\}$，$t_i - \tau \in R \setminus S$; 对任意的实数 $T > 0$，$i(0,T)$ 表示区间 $[0,T]$ 中包含集合 S 中元素的个数，

$$D_T = (0,T] \times \Omega, \qquad \Gamma_T = (0,T] \times \partial\Omega, \qquad D^\tau = [-\tau,0] \times \overline{\Omega}, \qquad D_T^\tau = D^\tau \cup D_T;$$

$$P_k = \big\{(t_k,x);\ x \in \Omega\big\}, \qquad P_T = \bigcup_{k=1}^{i(0,T)} P_k, \qquad P_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k;$$

$$\Lambda_k = \big\{(t_k,x);\ x \in \partial\Omega\big\}, \qquad \Lambda_T = \bigcup_{k=1}^{i(0,T)} \Lambda_k, \qquad \Lambda_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k.$$

为了行文方便，我们首先给出下面的一些符号．用 $PC^{1,2}(D_T^\tau, P_T)$ 代表所有满足下面条件的函数 $u(t,x)$:

(i) $u(t,x)$ 关于 $(t,x) \in \overline{D}_T^\tau \setminus (P_T \cup \Lambda_T)$ 连续可微；

(ii) $u_{xx}(t,x)$ 关于 $(t,x) \in D_T^\tau \setminus P_T$ 存在且连续；

(iii) $v = (u, u_t, u_x, u_{xx})$ 满足对任意的 $k \in N$，$x \in \overline{\Omega}$ 有

$$\lim_{(s,y)\to_{s<t_k}(t_k,x)} v(s,y) = v(t_k,x), \qquad \lim_{(s,y)\to_{s>t_k}(t_k,x)} v(s,y) = v(t_k^+,x)$$

存在，其中

$$u_x = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big), \qquad u_{xx} = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big), \qquad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

若 $T = \infty$, 记 $D = D_{-\tau,\infty}$，$PC^{1,2} = PC^{1,2}(D, P_\infty)$. 定义空间

$$X = \Big\{u \in C^{1,2},\ \|u\| = \sup_{(t,x)\in\overline{D}} |u(t,x)| < +\infty\Big\}.$$

对系统 (1.1)–(1.4) 我们始终假设初始函数 $\phi_0(x) = \phi(0,x) \in C(D^\tau, R)$ 满足在 $\partial\Omega$ 的某个邻域内为零或者在 $\partial\Omega$ 的某个邻域内有定义且是连续可微的．另外，设 $L > 0$，$0 < \alpha < 1$ 为二常数，作如下假设：

(H1) 对任意的 $k \in N$，$g_k \in C(R,R)$，$x + g_k(x)$ 在 $x \in R$ 上单调递增；

(H2) $f \in C(\overline{D} \times PC^{1,2} \times PC^{1,2}, R)$ 使得对任意的 $(t,x),(s,y) \in R \times R$, $z_1, \widetilde{z}_1, z_2, \widetilde{z}_2 \in R$, 有

$$\begin{aligned}
&\big|f(t,x,z_1,z_2) - f(t,x,\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)\big| \le L\big(|z_1-\widetilde{z}_1| + |z_2 - \widetilde{z}_2|\big),\\
&\big|f(t,x,z_1,z_2) - f(s,y,z_1,z_2)\big| \le L\big(|x-y|^{\alpha} + |t-s|^{\alpha/2}\big).
\end{aligned}$$

类似于 [9, 10] 的定义，我们给出系统 (1.1)–(1.4) 的一个上下解对的定义.

定义 1 称函数 $(v,w) \in PC^{1,2} \times PC^{1,2}$ 是 (1.1)–(1.4) 的一个上下解对，若 w, v 满足：

(i) $w \ge v, (t,x) \in \overline{D}$;

(ii) 对任何 $\varphi \in PC^{1,2}$, $v \le \varphi \le w$, $(t,x) \in (-\tau,+\infty) \times \overline{\Omega}$ 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t} \ge \triangle w(t,x) + f(t,x,w(t,x),\varphi(t-\tau,x)), \qquad (t,x) \in (t,x) \in D_\infty \setminus P_\infty,\\
&\frac{\partial w}{\partial \nu} \ge 0, \qquad (t,x) \in \Gamma_\infty \setminus \Lambda_\infty,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} \le \triangle v(t,x) + f(t,x,v(t,x),\varphi(t-\tau,x)), \qquad (t,x) \in D_\infty \setminus P_\infty,\\
&\frac{\partial v}{\partial \nu} \le 0, \qquad (t,x) \in \Gamma_\infty \setminus \Lambda_\infty;
\end{aligned}$$

(iii) $v(\theta,x) \le \phi(\theta,x) \le w(\theta,x)$, $(\theta,x) \in D^{\tau}$;

(iv) $w(t_k^+,x) \ge w(t_k,x) + g_k(w(t_k,x))$, $v(t_k^+,x) \le v(t_k,x) + g_k(v(t_k,x))$, $\quad x \in \overline{\Omega}$.

2 存在性定理及其证明

在本节中我们将给出比较定理及其证明.

定理 2 设 (v,w) 是系统 (1.1)–(1.4) 的一个上下解对，并设 (H1), (H2) 成立，则系统 (1.1)–(1.4) 存在唯一的正则解 $u(t,x)$ 满足

$$v(t,x) \le u(t,x) \le w(t,x), \qquad (t,x) \in \overline{D}.$$

证 设 $m = \inf\limits_{(t,x)\in\overline{D}} v(t,x)$, $M = \sup\limits_{(t,x)\in\overline{D}} w(t,x)$, 则 $m \le \phi_0(x) \le M$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. 任取 $T>0$, 定义

$$X_T = \big\{u \in PC^{1,2}(D_T^{\tau}, P_T),\ |u(t,x)| \le 2M\big\} \subset X.$$

若在 X_T 上定义范数 $\|u\|_{[-\tau,T]} = \max\limits_{(t,x)\in\overline{D}_T^{\tau}} |u(t,x)|$, 则在范数 $\|\cdot\|_{[-\tau,T]}$ 的意义下 X_T 为一 Banach 空间.

对任意的 $u \in X_T \subset X$ 定义函数 $Au = \min\{w, \max\{u,v\}\} \in X_T$, 并设

$$f^*(t,x,u(t,x),u(t-\tau,x)) = f(t,x,Au(t,x),Au(t-\tau,x)).$$

用 f^* 替代系统 (1.1)–(1.4) 中的 f, 则新的系统记为 (1.1^*)–(1.4^*). 下面我们首先证明系统 (1.1^*)–(1.4^*) 存在唯一的弱解 $u \in X_T$.

首先假设 $0<T\le t_1$. 定义算子 $\Phi: X_T\to X$ 如下：

$$(\Phi u)(t,x)=\begin{cases}\phi(t,x), & \forall\,(t,x)\in D^{\tau},\\ \displaystyle\int_0^t\int_S G(t,x;r,\xi)\varphi_u(r,\xi)\,\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}r & \\ \displaystyle+\int_0^t\int_\Omega G(t,x;r,\xi)f^*(r,\xi,u(r,\xi),u(r-\tau,\xi))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}r & \\ \displaystyle+\int_\Omega G(t,x;0,\xi)\phi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & \forall\,(t,x)\in D_T,\end{cases}$$

这里 $S=\partial\Omega, \mathrm{d}S_\xi$ 为 S 的曲面元素，

$$\begin{aligned}
&G(t,x;r,\xi)=(2\sqrt{\pi})^{-n}(t-r)^{-n/2}\exp[-|x-\xi|^2/4(t-r)], \qquad t>r,\\
&\varphi_u(t,x)=2F_u(t,x)+2\int_0^t\int_S M(t,x;r,\xi)F_u(r,\xi)\,\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}r,\\
&F_u(t,x)=\int_\Omega\frac{\partial G(t,x;0,\xi)}{\partial\nu}\phi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial G(t,x;r,\xi)}{\partial\nu}f^*(r,\xi,u(r,\xi),u(r-\tau,\xi))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}r,\\
&M(t,x;r,\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}M_i(t,x;r,\xi), \qquad (r,\xi)\in\Gamma_T,\\
&M_{i+1}(t,x;r,\xi)=\int_0^t\int_S M_1(t,x;\sigma,y)M_i(t,x;r,\xi)\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}\sigma, \qquad (r,\xi)\in\Gamma_T,\\
&M_1(t,x;r,\xi)=2\frac{\partial G(t,x;r,\xi)}{\partial\nu}, \qquad (r,\xi)\in\Gamma_T.
\end{aligned}$$

由 [11, §5.3] 知，若算子 Φ 在 X_T 中有不动点，那么该不动点就是系统 (1.1^*)–(1.4^*) 的弱解．因此，接下来我们只需要证明算子 Φ 在 X_T 上是自映射且是压缩的．以后我们用 const. 来表示证明过程中出现的与时间 t 无关的所有常数.

首先我们证明下面结论：

$$\int_\Omega\frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu}}\,\mathrm{d}\xi<+\infty, \qquad \frac{1}{2}<\mu<1. \tag{2.1}$$

类似于 [3] 第一章定理 1 的证明，做线性变换，以 Ω^* 作为 Ω 在线性变换下的象，则有

$$\int_\Omega\frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu}}\,\mathrm{d}\xi=\mathrm{const.}\int_{\Omega^*}\frac{1}{|x|^{n+1-2\mu}}\,\mathrm{d}x=J_d+J_d^0,$$

其中 J_d 为在球 $|x|\le d$ 上所取的积分部分，且 d 充分小使得该球含于 Ω^* 中，J_d^0 为其余部分．而 J_d^0 显然是有界的，因此仅需证 $J_d<\infty$. 对任意的 $\frac{1}{2}<\mu<1$ 作球坐标变换，则有

$$J_d=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^d x^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1-2\mu}}=\mathrm{const.}\int_0^d\frac{\mathrm{d}x}{x^{2-2\mu}}<+\infty.$$

同样的作变换 $x-\xi=\eta(t-r)^{\frac{1}{2}}$, 我们有

$$\int_\Omega|G(t,x;r,\xi)|\,\mathrm{d}\xi\le\mathrm{const.}\int_{R^n}e^{-\mathrm{const.}\eta^2}\,\mathrm{d}\eta<+\infty. \tag{2.2}$$

由 [11] 第一章的引理 1 知

$$\Big|\frac{\partial G(t,x;r,\xi)}{\partial \nu}\Big| \le \frac{\text{const.}}{|t-r|^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{n+1+\alpha-2\mu}}, \qquad (1-\alpha/2)<\mu<1,$$

$$M(t,x;r,\xi) \le \sum_{i=1}^{\infty}|M_i(t,x;r,\xi)| \le \frac{\text{const.}}{|t-r|^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{n+1+\alpha-2\mu}}, \qquad (1-\alpha/2)<\mu<1.$$

由上两个式子和式 (2.1), 当 $(1-\alpha/2)<\mu<1$ 时有

$$\int_0^t\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial G(t,x;r,\xi)}{\partial \nu}\Big|\,\mathrm{d}S_r\,\mathrm{d}\xi \le \int_0^t\int_{\Omega}\frac{\text{const.}}{|t-r|^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{n+1+\alpha-2\mu}}\,\mathrm{d}S_r\,\mathrm{d}\xi \le \text{const.}t^{1-\mu} \tag{2.3}$$

和

$$\int_S |M(t,x;r,\xi)|\,\mathrm{d}S_r\,\mathrm{d}\xi \le \text{const.}(t-r)^{-\mu}. \tag{2.4}$$

首先 Φ 说明在 X_T 上是自映射．事实上，对任意的 $u\in X_T$, 当 $0<t\le T$ 时，联合上边的式子估计：

$$\|F_u(t,x)\|_{[0,T]} \le \text{const.}t^{-\mu}(1+t)$$

和

$$\|\varphi_u(t,x)\|_{[0,T]} \le \text{const.}t^{-\mu}(1+t)(1+t^{1-\mu}).$$

因此有,

$$\|\Phi u\|_{[0,T]} \le \text{const.}t^{1-\mu}(1+t+t^{\mu}+t^{1-\mu}+t^{2-2\mu})\|u\|_{[0,T]} + \Big|\int_{\Omega}G(t,x;0,\xi)\phi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big|.$$

而由 [11] 第一章的定理 1 知

$$\lim_{t\searrow 0}\int_{\Omega}G(t,x;0,\xi)\phi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \phi_0(x), \qquad \forall x\in\overline{\Omega},$$

从而，取 T 充分的小，我们有

$$\|\Phi u\|_{[0,T]} \le 2M. \tag{2.5}$$

对任意的 $u_1,u_2\in X_T$, 取 $\max\left\{\frac{1}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right\}<\mu<1$, 由假设 (H2), F_u 的定义及式 (2.3) 可得

$$\|F_{u_1}(t,x)-F_{u_2}(t,x)\|_{[0,T]} \le \text{const.}\|u_1-u_2\|_{[0,T]}t^{1-\mu},$$

同样的，由上式， (2.4) 以及 φ_u 的定义，我们有

$$\|\varphi_{u_1}(t,x)-\varphi_{u_2}(t,x)\|_{[0,T]} \le \text{const.}\|u_1-u_2\|_{[0,T]}\Big[\int_0^t (t-r)^{-\mu}r^{1-\mu}\,\mathrm{d}r + t^{1-\mu}\Big].$$

设 $t-r=ts$, 则有

$$\int_0^t (t-r)^{-\mu}r^{1-\mu}\,\mathrm{d}r = t^{2-2\mu}\int_0^1 s^{(1-\mu)-1}(1-s)^{(2-\mu)-1}\,\mathrm{d}s = t^{2-2\mu}B(1-\mu,2-\mu),$$

从而有

$$\|\varphi_{u_1}(t,x)-\varphi_{u_2}(t,x)\|_{[0,T]}\le \text{const.}\|u_1-u_2\|_{[0,T]}t^{1-\mu}(1+t^{1-\mu}). \tag{2.6}$$

由 (2.2), (2.6) 以及 Φu 的定义，我们有

$$\|\Phi u_1-\Phi u_2\|_{[0,T]}\le \text{const.}t(1+t^{1-\mu}+t^{2-2\mu})\|u_1-u_2\|_{[0,T]}.$$

显然，只要 T 充分的小，就有 $0<q(t)=t(1+t^{1-\mu}+t^{2-2\mu})<1,\ \forall\, t\in[0,T]$ 使得 (2.5) 和下式同时成立

$$\|\Phi u_1-\Phi u_2\|_{[0,T]}\le q(t)\|u_1-u_2\|_{[0,T]}.$$

而当 $t\in[-\tau,0]$ 时，有

$$\|\Phi u_1-\Phi u_2\|_{[-\tau,T]}=0\le q(t)\|u_1-u_2\|_{[-\tau,T]}.$$

故有

$$\|\Phi u_1-\Phi u_2\|_{[-\tau,T]}\le q(t)\|u_1-u_2\|_{[-\tau,T]}.$$

从而 Φ 在 X_T 上为压缩映射, 故存在不动点 $u(t,x)$, 即为方程 (1.1^*)–(1.4^*) 在 D^* 上的弱解. 由 [9] 定理 3.3 和 f 满足条件 (H2) 知，$u(t,x)$ 是 (1.1^*)–(1.4^*) 在 D_T 上的正则解. 依次这样做下去，我们就可以得到 (1.1^*)–(1.4^*) 在 D_{t_1} 上存在唯一的正则解 $u(t,x)$. 注意到条件 (1.4) 及假设 (H2), 便可以得到 (1.1^*)–(1.4^*) 在 D_∞^τ 上存在唯一的正则解 $u(t,x)$.

下证 $u\in B_{v,w}=\{u\in X: v\le u\le w\in PC^{1,2}\}$. 若不然，则至少存在一点 $(\widetilde{t},\widetilde{x})\in\overline{D}$ 满足 $u(\widetilde{t},\widetilde{x})<v(\widetilde{t},\widetilde{x})$ 或 $u(\widetilde{t},\widetilde{x})>w(\widetilde{t},\widetilde{x})$. 我们仅证明第一个不等式是不正确的，第二个可类似证明. 以下我们假设存在一点 $(\widetilde{t},\widetilde{x})\in\overline{D}$ 满足

$$u(\widetilde{t},\widetilde{x})<v(\widetilde{t},\widetilde{x}). \tag{2.7}$$

设 λ_1 是

$$\begin{cases}-\Delta u(t,x)=\lambda u(t,x),\\ u(t,x)|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的最小特征值，φ_1 为 λ_1 对应的特征函数，则由 [12] 知 φ_1,λ_1 满足

$$\lambda_1>0,\qquad \varphi_1>0,\qquad \forall\, x\in\Omega,\qquad 且\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\le 0,\ \ \forall\, x\in\partial\Omega.$$

对任意的 $\varepsilon>0,\ \eta>0$, 设

$$q(t,x)=v(t,x)-\varepsilon(e^t+1)+\eta\varphi_1(x),\qquad (t,x)\in\overline{D}.$$

由式 (2.7) 知，我们可以取 $\varepsilon>0,\ \eta>0$ 足够的小，满足 $m(t,x)=u(t,x)-q(t,x)$ 在 $\overline{D}$ 中可以取到负值并且有

$$\frac{\varepsilon}{\eta}>\sigma=\max_{x\in\overline{\Omega}}|\varphi_1(x)|.$$

因此，若 (2.7) 成立，则存在点 $(\widehat{t},\widehat{x})\in\overline{D}$ 满足如下四种情形中的一种：

情形 (i) $(\widehat{t},\widehat{x})\in D^\tau,\ m(\widehat{t},\widehat{x})=0,\ m(t,x)>0,\ \forall\,(t,x)\in(0,\widehat{t})\times\overline{\Omega}$;

情形 (ii) 对任意的 $k\geq 1,\ \widehat{t}\neq t_k$, 且有 $m(\widehat{t},\widehat{x})=0,\ m(t,x)>0,\ \forall\,(t,x)\in(0,\widehat{t})\times\overline{\Omega}$;

情形 (iii) 存在 $k\geq 1$, 使得 $\widehat{t}=t_k$, 且有 $m(t_k,\widehat{x})=0,\ m(t,x)>0,\ \forall\,(t,x)\in(0,t_k)\times\overline{\Omega}$;

情形 (iv) 存在 $k\geq 1$, 使得 $\widehat{t}=t_k$, 且有 $m(t_k^+,\widehat{x})\leq 0,\ m(t,x)>0,\ \forall\,(t,x)\in(0,t_k]\times\overline{\Omega}$.

我们将分别证明这四种情况都是不正确的.

情形 (i). 若 $(\widehat{t},\widehat{x})\in D^\tau$, 则

$$0=m(\widehat{t},\widehat{x})=u(\widehat{t},\widehat{x})-q(\widehat{t},\widehat{x})=\phi(\widehat{t},\widehat{x})-v(\widehat{t},\widehat{x})+\varepsilon(e^{\widehat{t}}+1)-\eta\varphi_1(\widehat{x})\geq\varepsilon-\eta\sigma>0,$$

矛盾.

情形 (ii). 若 $(\widehat{t},\widehat{x})\in\Gamma_\infty$. 由 Hopf 强极大值原理，可得

$$\frac{\partial u(\widehat{t},\widehat{x})}{\partial\nu}<\frac{\partial q(\widehat{t},\widehat{x})}{\partial\nu}.$$

而

$$\frac{\partial u(\widehat{t},\widehat{x})}{\partial\nu}-\frac{\partial q(\widehat{t},\widehat{x})}{\partial\nu}=-\frac{\partial v(\widehat{t},\widehat{x})}{\partial\nu}-\eta\frac{\partial\varphi_1(\widehat{x})}{\partial\nu}\geq 0.$$

若 $(\widehat{t},\widehat{x})\in D_\infty$, 则由点的取法易知

$$\frac{\partial m(\widehat{t},\widehat{x})}{\partial t}\leq 0.$$

而在点 $(\widehat{t},\widehat{x})$ 处，注意到 $Au(\widehat{t}-\tau,\widehat{x})\geq v(\widehat{t}-\tau,\widehat{x})$ 和 $Au(\widehat{t},\widehat{x})=v(\widehat{t},\widehat{x})$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial m(\widehat{t},\widehat{x})}{\partial\widehat{t}}&\geq\Delta u-\Delta v+f(\widehat{t},\widehat{x},v(\widehat{t},\widehat{x}),Au(\widehat{t}-\tau,\widehat{x}))-f(\widehat{t},\widehat{x},v(\widehat{t},\widehat{x}),Au(\widehat{t}-\tau,\widehat{x}))+\varepsilon e^{\widehat{t}}\\&\geq\varepsilon e^{\widehat{t}}>0,\end{aligned}$$

矛盾.

类似于情形 (ii) 的证明，我们也可以得到情形 (iii) 是不正确的.

情形 (iv). 注意到函数 $x+g_k(x)$ 在 $x\geq 0$ 时递增，从而有

$$\begin{aligned}0\geq&m(t_k^+,\widehat{x})=[u(t_k,\widehat{x})+g_k(u(t_k,\widehat{x}))]-[v(t_k^+,\widehat{x})+g_k(v(t_k,\widehat{x}))]+\varepsilon(e^{t_k}+1)-\eta\varphi_1(\widehat{x})\\\geq&\varepsilon-\eta\sigma>0,\end{aligned}$$

矛盾.

这说明 $u\in B_{v,w},\ Au=u$, 从而 u 为系统 (1.1)–(1.4) 的正则解. 证毕.

注 1 当系统 (1.1)–(1.4) 不受脉冲影响或者不含扩散项，或者同时不受脉冲影响且不含扩散项时，我们的主要定理 2 也是正确的.

注 2 若系统 (1.1)–(1.4) 存在一个上下解对 (v,w) 时，则不必要求函数 $f(t,x,y,z)$ 对 (y,z) 满足全局 Lipschitz 条件. 事实上，从定理 2 的证明中可以看出，若设

$$m=\inf_{(t,x)\in\overline{D}}v(t,x),\qquad M=\sup_{(t,x)\in\overline{D}}w(t,x),$$

仅需要求函数 $f(t,x,y,z)$ 对 $(y,z)\in[m,M]\times[m,M]$ 满足 Lipschitz 条件即可.

3　应用

考虑下面具有时滞的脉冲抛物型 Hematopoiesis 模型

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\triangle u(t,x)-\delta u(t,x)+\frac{\beta u(t-\tau,x)}{1+u^m(t-\tau,x)},\qquad (t,x)\in D_\infty\setminus P_\infty, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial \nu}=0,\qquad (t,x)\in\Gamma_\infty\setminus\Lambda_\infty, \tag{3.2}$$

$$u(\theta,x)=\phi(\theta,x)\geq 0,\qquad (\theta,x)\in D^\tau, \tag{3.3}$$

$$u(t_k^+,x)-u(t_k,x)=h_k(u(t_k,x)),\qquad x\in\overline{\Omega}. \tag{3.4}$$

其中， τ,δ,β 均为正常数， $m>1$, 其余符号的含义和对变量的要求与第二节一样．为了描述血细胞的繁殖情况， [9] 首先提出了下面的 Hematopoiesis 模型 (变换后所得):

$$u'(t)=-\delta u(t)+\frac{\beta u(t-\tau)}{1+u^m(t-\tau)}.$$

考虑到生物模型的实际情况，即：血细胞总数不可能与空间变量没有关系．针对这一事实，对系统 (3.1)–(3.4) 进行研究是很有必要的．而就我们所知，到目前为止，还没有学者对系统 (3.1)–(3.4) 进行过研究.

若我们假设条件 $1<\frac{\beta}{\delta}<\frac{m}{m-1}$ 成立．设 $f(y)=\frac{\beta y}{1+y^m}$, 易知 $f(x)$ 满足全局 Lipschitz 条件，而且此时，有 $K=\left(\frac{\beta-\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}<\left(\frac{1}{m-1}\right)^{\frac{1}{m}}=y_0$ 使得函数 $f(x)$ 满足：

(f_1) $f(K)=\frac{\beta}{1+K^m}=\delta$ 且函数 $f(x)$ 在 $(0,y_0)$ 上单调递增，在 (y_0,∞) 上单调递减，$f(y_0)=\max\limits_{x\in[0,\infty)}f(x)=\frac{\beta}{n}(n-1)^{\frac{n-1}{n}}$.

(f_2) 对任意的 $y\in(0,K)$ 有 $f(y)>\delta y$, 而对任意的 $y\in(K,\infty)$ 有 $f(y)<\delta y$.

在条件 $\inf\limits_{i\in N}\{t_{i+1}-t_i\}=\gamma>0$ 和 $1<\frac{\beta}{\delta}<\frac{m}{m-1}$ 成立的前提下，对函数 $h_k(x)$ 我们作如下假设：

(H) 对任意的 $k\in N$, 函数 $h_k\in C(R^+,R)$ 全局 Lipschitz 连续， $x+h_k(x)$ 在 $x\in R_+$ 上单调递增，且满足

$$\begin{aligned}
&x\geq x+h_k(x)\geq K, && x\geq K,\\
&x\leq x+h_k(x)<K, && 0<x<K,\\
&|h_k(x)|\leq\Big(y_0-\frac{f(y_0)}{\delta}\Big)(1-e^{-\delta\gamma}), && x\geq 0.
\end{aligned}$$

定理 3 假设条件 $\inf\limits_{i\in N}\{t_{i+1}-t_i\}=\gamma>0$, $1<\frac{\beta}{\delta}<\frac{m}{m-1}$ 和 (H) 成立，则下面结论成立：

(i) 系统 (3.1)–(3.4) 的每一个解 $u(t,x)$ 满足

$$0\leq\limsup_{t\to\infty}u(t,x)\leq y_0,\qquad 对\ \ x\in\overline{\Omega}\ \ 一致成立.$$

(ii) 系统 (3.1)–(3.4) 的每一个解 $u(t,x)$ 都满足 $u(t,x)\geq 0,\ (t,x)\in(0,\infty)\times\overline{\Omega}$.

(iii) 若 $\phi(\theta,x)\not\equiv 0,\ (t,x)\in D^\tau$, 则系统 (3.1)–(3.4) 的每一个解 $u(t,x)$ 都满足 $u(t,x)>0,\ (t,x)\in(\tau,\infty)\times\overline{\Omega}$.

证 (i) 设 $w(t)$ 为下面脉冲微分方程的解

$$\begin{cases} w'(t)=-\delta w(t)+f(y_0), & t\geq 0,\quad t\neq t_k,\\ w(0)=\max\limits_{(t,x)\in D^\tau}\phi(t,x), & t\in[-\tau,0],\\ w(t_k^+)=w(t_k)+h_k(w(t_k)). \end{cases} \tag{3.5}$$

因为对任意的 $(t,x)\in[-\tau,\infty)\times\overline{\Omega}$, 有

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t}=\triangle w(t)-\delta w(t)+f(y_0)\geq\triangle w(t)-\delta w(t)+f(\phi(t-\tau,x)),$$

因此由定义 1 容易知道 $(0,w(t))$ 为系统 (3.1)-(3.4) 的一个上下解对，从而根据定理 2 可得，系统 (3.1)–(3.4) 存在一个正则解满足

$$0\leq u(t,x)\leq w(t),\qquad (t,x)\in\overline{D}. \tag{3.6}$$

而方程 (3.5) 的解可以写成如下形式

$$w(t)=\frac{f(y_0)}{\delta}+e^{-\delta t}\Big(w(0)-\frac{f(y_0)}{\delta}\Big)+\sum_{0<t_k<t}e^{-\delta(t-t_k)}h_k(w(t_k)),\qquad t\geq 0. \tag{3.7}$$

不妨设 $t_k<t<t_{k+1}$. 由条件 $\inf\limits_{i\in N}\{t_{i+1}-t_i\}=\gamma>0$ 知

$$t-t_1>t_k-t_1=\sum_{i=1}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)\geq(k-1)\gamma.$$

从而有

$$\sum_{0<t_k<t}e^{-\delta(t-t_k)}\leq\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\delta\gamma i}=\frac{1}{1-e^{\delta\gamma}}.$$

因此由上式及 (3.6), (3.7) 和条件 (H) 可得

$$0\leq\limsup_{t\to\infty}u(t,x)\leq\limsup_{t\to\infty}w(t)\leq\frac{f(y_0)}{\delta}+\frac{|h_k(w(t_k))|}{1-e^{\delta\gamma}}\leq y_0.$$

(ii) 由 (i) 的证明过程易得.

(iii) 由 (ii) 知 $u(t,x)\geq 0,\ (t,x)\in\overline{D}$. 考虑下面两种情形：

情形 1　$\phi(\theta,x)\not\equiv 0$. 由系统 (3.1)–(3.4) 和条件 (H) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\triangle u(t,x)+\delta u(t,x)\ge 0,\qquad (t,x)\in D_\infty\setminus P_\infty,\\
&\frac{\partial u(t,x)}{\partial \nu}=0,\qquad (t,x)\in \Gamma_\infty\setminus\Lambda_\infty,\\
&u(0,x)=\phi(0,x)\ge 0,\qquad x\in\overline{\Omega},\\
&u(t_k^+,x)-u(t_k,x)=h_k(u(t_k,x)),\qquad x\in\overline{\Omega}.
\end{aligned}$$

我们将证明 $u(t,x)>0,(t,x)\in(0,\infty)\times\overline{\Omega}$. 若不然，则存在 $(t_0,x_0)\in(0,\infty)\times\overline{\Omega}$ 使得 $u(t_0,x_0)=0$. 若对任意的 $k\ge 1$，$t_0\ne t_k$，$(t_0,x_0)\in\Gamma_\infty$. 由 Hopf 强极大值原理，可得

$$\frac{\partial u(t_0,x_0)}{\partial\nu}<0.$$

矛盾. 若对任意的 $k\ge 1$，$t_0\ne t_k$，$(t_0,x_0)\in D_\infty$, 则由最小值原理，$u(t,x)\equiv 0$, $(t,x)\in[-\tau,t_0]\times\Omega$. 矛盾. 若存在 $k\ge 1$, 使得 $t_0=t_k$, 且有 $u(t_k,x_0)=0$. 同样可以利用 Hopf 强极大值原理和最小值原理导出矛盾. 若存在 $k\ge 1$, 使得 $t_0=t_k$, 且有 $u(t_k^+,x_0)=0$. 此时，由假设 (H) 可得 $u(t_k,x_0)=0$. 利用上面的结果，又可导出矛盾.

情形 2　$\phi(0,x)\equiv 0$, 则必有 $u(t,x)\not\equiv 0$, $(t,x)\in(0,\tau]\times\overline{\Omega}$. 否则，由系统 (3.1)–(3.4) 及条件 (H) 可得 $\phi(t,x)\equiv 0$, $(t,x)\in D^\tau$, 这与假设条件 $\varphi(\theta,x)\not\equiv 0$, $(t,x)\in D^\tau$ 矛盾. 因此，存在 $t_0\in(0,\tau]$ 使得 $u(t_0,x)\not\equiv 0$. 类似于情形 1 的证明，我们可以的到 $u(t,x)>0$, $(t,x)\in(t_0,x)\times\overline{\Omega}$. 证毕.

定理 4　假设条件 $\inf\limits_{i\in N}\{t_{i+1}-t_i\}=\gamma>0$, $1<\frac{\beta}{\delta}<\frac{m}{m-1}$ 和 (H) 成立，则系统 (3.1)–(3.4) 的每一个解 $u(t,x)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=K,\qquad \text{对}\ \ x\in\overline{\Omega}\ \ \text{一致成立},$$

即解 $u(t,x)=K$ 是全局吸引的.

证　由定理 3(i), 不失一般性，假设 $u(t,x)$ 满足

$$0\le u(t,x)\le y_0,\qquad (t,x)\in\overline{D}. \tag{3.8}$$

设 $\underline{U}(t)=\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(t,x)$, $\overline{U}(t)=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(t,x)$, $\underline{U}=\liminf\limits_{t\to\infty}\underline{U}(t)$ 和 $\overline{U}=\limsup\limits_{t\to\infty}\overline{U}(t)$. 由式 (3.8),

$$0\le\underline{U}\le\overline{U}\le y_0. \tag{3.9}$$

由定理 3(iii), 可设

$$z_0=\min\left\{\min_{(t,x)\in[2\tau,\infty)\times\overline{\Omega}}u(t,x),\frac{K}{2}\right\}>0. \tag{3.10}$$

定义序列 $\{z_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别满足

$$\begin{aligned}
z_n&=\frac{f(z_{n-1})}{\delta},\qquad n\in N,\\
y_n&=\frac{f(y_{n-1})}{\delta},\qquad n\in N.
\end{aligned}$$

我们将证明序列 $\{z_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 单调有界. 首先, 我们证明序列 $\{z_n\}$ 单调递增有最小上界 K. 注意到对任意的 $y \in (0,K)$ 有 $f(y) > \delta y$ 和 $z_0 < K$ 及 $f(y)$ 在 $[z_0,K] \subset [0,y_0]$ 上单调递增, 可得

$$z_1 = \frac{f(z_0)}{\delta} > z_0, \qquad z_1 = \frac{f(z_0)}{\delta} < \frac{f(K)}{\delta} = K.$$

通过归纳和直接的计算可得

$$0 < z_0 < z_1 < \cdots < \lim_{n\to\infty} z_n = K. \tag{3.11}$$

同样的方法可得

$$0 > y_0 > y_1 > \cdots > \lim_{n\to\infty} y_n = K. \tag{3.12}$$

不妨设 $t_1 > 3\tau$, 分别定义 $v_1(t)$ 和 $w_1(t)$ 为下面方程的解

$$\begin{cases} v_1'(t) = -\delta[v_1(t) - z_1], & t \geq 3\tau, \quad t \neq t_k, \\ v_1(\theta) = z_0 < K, & \theta \in [2\tau, 3\tau], \\ v_1(t_k^+) = v_1(t_k) + h_k(v_1(t_k)) \end{cases} \tag{3.13}$$

和

$$\begin{cases} w_1'(t) = -\delta[w_1(t) - y_1], & t \geq 3\tau, \quad t \neq t_k, \\ w_1(\theta) = y_0 > K, & \theta \in [2\tau, 3\tau] \\ w_1(t_k^+) = w_1(t_k) + h_k(w_1(t_k)). \end{cases} \tag{3.14}$$

由 (3.8) 和 (3.10) 知对任意的 $(t,x) \in [2\tau,\infty) \times \overline{\Omega}$ 有 $z_0 \leq u(t,x) \leq y_0$. 从而对任意的 $(t,x) \in [2\tau,\infty) \times \overline{\Omega}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} &= \triangle v_1(t) - \delta v_1(t) + f(z_0) \leq \triangle v_1(t) - \delta v_1(t) + f(u(t-\tau,x)), \\ \frac{\partial w_1(t)}{\partial t} &= \triangle w_1(t) - \delta w_1(t) + f(y_0) \geq \triangle w_1(t) - \delta w_1(t) + f(u(t-\tau,x)). \end{aligned}$$

因此, 由定义 1 知 $(v_1(t), w_1(t))$ 是系统 (3.1)–(3.4) 的一个上下解对, 从而由定理 2 可得

$$v_1(t) \leq u(t,x) \leq \omega_1(t), \qquad (t,x) \in [2\tau,\infty] \times \overline{\Omega}. \tag{3.15}$$

当 $t \in [3\tau, t_1]$ 时, 由方程 (3.13) 及式 (3.11) 可得

$$\begin{aligned} &v_1(t) = z_1 + e^{-\delta(t-3\tau)}(z_0 - z_1) \geq z_0, \\ &z_0 \leq v_1(t_1) = z_1 + e^{-\delta(t_1-3\tau)}(z_0 - z_1) \leq z_1 < K. \end{aligned}$$

从而由假设 (H) 可得

$$z_0 \leq v_1(t_1) \leq v_1(t_1^+) = v_1(t_1) + h_1(v_1(t_1)) < K. \tag{3.16}$$

当 $t\in(t_1,t_2]$ 时，由方程 (3.13) 及 (3.11), (3.16) 可得

$$\begin{aligned}&v_1(t)=z_1+e^{-\delta(t-t_1)}(v_1(t_1^+)-z_1)\ge z_0,\\&v_1(t_2)=z_1+e^{-\delta(t_2-t_1)}(v_1(t_1^+)-z_1)\le z_1(1-e^{-\delta(t_2-t_1)})+e^{-\delta(t_2-t_1)}K<K.\end{aligned}$$

由假设 (H) 可得

$$z_0\le v_1(t_2)\le v_1(t_2^+)=v_1(t_1)+h_2(v_1(t_2))<K.$$

依次作下去可得，容易知道，方程 (3.13) 的解 $v_1(t)$ 在 $[3\tau,\infty)$ 上递增且可由下式表示：

$$v_1(t)=z_1+e^{-\delta(t-3\tau)}(z_0-z_1)+\sum_{3\tau<t_k<t}e^{-\delta(t-t_k)}h_k(v_1(t_k)),\qquad t\ge 3\tau.$$

从而有

$$z_1\le\lim_{t\to\infty}v_1(t).\tag{3.17}$$

同样的，当 $t\in[3\tau,t_1]$ 时，由方程 (3.14) 及 (3.12) 可得

$$\begin{aligned}&w_1(t)=y_1+e^{-\delta(t-3\tau)}(y_0-y_1)\le y_0,\\&y_0\ge w_1(t_1)=y_1+e^{-\delta(t_1-3\tau)}(y_0-y_1)\ge y_1(1-e^{-\delta(t_2-t_1)})+e^{-\delta(t_2-t_1)}K>K.\end{aligned}$$

由上式及假设 (H) 便可得

$$y_0\ge w_1(t_1)\ge w_1(t_1)+h_1(v_1(t_1))=v_1(t_1^+)>K.\tag{3.18}$$

当 $t\in(t_1,t_2]$ 时，由方程 (3.14) 及 (3.12), (3.18) 可得

$$\begin{aligned}&w_1(t)=y_1+e^{-\delta(t-t_1)}(w_1(t_1^+)-y_1)\le y_0,\\&y_0\ge w_1(t_2)=y_1+e^{-\delta(t_2-t_1)}(w_1(t_1^+)-y_1)\ge y_1(1-e^{-\delta(t_2-t_1)})+e^{-\delta(t_2-t_1)}K>K.\end{aligned}$$

由上式及假设 (H) 可得

$$y_0\ge w_1(t_2)=w_1(t_1)+h_2(w_1(t_2))\ge w_1(t_2^+)>K.$$

依次作下去可得，便可得到，方程 (3.14) 的解 $w_1(t)$ 在 $[3\tau,\infty)$ 上递减且可由下式表示：

$$w_1(t)=y_1+e^{-\delta(t-3\tau)}(y_0-y_1)+\sum_{3\tau<t_k<t}e^{-\delta(t-t_k)}h_k(w_1(t_k)),\qquad t\ge 3\tau.$$

从而可得

$$\lim_{t\to\infty}w_1(t)\le y_1.\tag{3.19}$$

由 $v_1(t),w_1(t)$ 的单调性及式 (3.15), (3.17) 和 (3.19) 可得

$$z_1\le\underline{U}\le\overline{U}\le y_1.$$

定义 $v_n(t)$ 和 $w_n(t)$ 为下面方程的解

$$\begin{cases} v_n'(t) = -\delta[v_n(t) - z_n], & t \ge 3\tau, \quad t \ne t_k, \\ v_n(\theta) = z_{n-1} < K, & \theta \in [2\tau, 3\tau], \\ v_n(t_k^+) = v_n(t_k) + h_k(v_n(t_k)) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} w_n'(t) = -\delta[w_n(t) - y_n], & t \ge 3\tau, \quad t \ne t_k, \\ w_n(\theta) = y_{n-1} > K, & \theta \in [2\tau, 3\tau], \\ w_n(t_k^+) = w_n(t_k) + h_k(w_n(t_k)). \end{cases}$$

同样的重复上面的过程，我们就可以得到

$$z_0 < z_1 < \cdots < z_n \le \underline{U} \le \overline{U} \le y_n < \cdots < y_1 < y_0. \tag{3.20}$$

由 (3.11), (3.12) 及 (3.20) 可得

$$K = \lim_{n\to\infty} z_n \le \underline{U} \le \overline{U} \le \lim_{n\to\infty} y_n = K,$$

这意味着

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = K, \qquad \text{对} \quad x \in \overline{\Omega} \ \ \text{一致成立}.$$

证毕.

注 3 当系统 (3.1)–(3.4) 不受脉冲影响或者不含扩散项，或者同时不受脉冲影响且不含扩散项时，定理 3 和定理 4 也是正确的. 而且当系统 (3.1)–(3.4) 不受脉冲影响时，定理 3 和定理 4 也是新的结果.

参 考 文 献

[1] Erbe L H, Freedman H I, Liu X Z, Wu J H. Comparision Principles for Impulsive Parabolic Equations with Application to Models of Single Species Growth. *J. Austra. Soc.* (Series B), 1991, 32: 382–400

[2] Cui B T, Han M A, Yang H Z. Some Sufficient Conditions for Oscillation of Impulsive Delay Hyperbolic Systems with Robin Boundary Conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, 180: 365–375

[3] 傅希林，闫宝强，刘衍胜. 脉冲微分系统引论. 北京：科学出版社， 2005
(Fu X L, Yan B Q, Liu Y S. Introduction to Impulsive Differential Systems. Beijing: Science Press, 2005)

[4] Gao W L, Wang J H. Estimates of Solutions of Impulsive Parabolic Equations under Neumann Boundary Condition. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, 283: 478–490

[5] Kirane M, Rogovchenko Y V. Comparison Results for Systems of Impulse Parabolic Equations with Applications to Population Dynamics. *Nonlinear Anal. TMA*, 1997, 28: 263–276

[6] Li W N. On the Forced Oscillation of Solutions for Systems of Impulsive Parabolic Differential Equations with Several Delays. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, 181: 46–57

[7] Li W N, Han M A, Meng F W. Necessary and Sufficient Conditions for Oscillation of Impulsive Parabolic Differential Equations with Delays. *Applied Mathematics Letters*, 2005, 18: 1149–1155

[8] Redlinger R. Exitence Theorems for Semiliner Parabolic Systems with Functional. *Nonlinear Anal. TMA*, 1984, 8: 67–682

[9] Mackey M C, Glass L. Oscillation and Chaos in Physiological Control System. *Science*, 1977, 197: 287–289

[10] Redlinger R. On Volterra'S Population Equation with Diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, 1985, 16: 135–142

[11] Freedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964

[12] 叶其孝，李正元．反应扩散方程引论．北京：科学出版社，1990
(Ye Q X, Li Z Y. Introduction to Reaction-diffusion Equations. Beijing: Science Press, 1990)

Existence Theorem for Impulsive Parabolic Equations with Delay and Applications to the Population Model

ZHAO Shufen　　ZHANG Jianyuan

(*Department of Mathematics, Zhaotong Teacher's College, Zhaotong* 657000)

(*E-mail: zhaoshufen@gmail.com*)

Abstract In this paper, by means of a pair of lower-upper solution, a new existence theorem of solution under Neumann boundary condition for impulsive parabolic equations with delay is obtainied. As an example, when applicated to a population model, sufficient conditions are provided for global attractivity of the equilibrium for this system.

Key words impulsive parabolic equations; delay; lower-upper solution pair

MR(2000) Subject Classification 35R12; 35R10

Chinese Library Classification O175.2