第 35 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 35 No. 1
2012 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2012

现金流上的 Coherent 风险度量 *

陈文财

(南昌大学数学系，南昌 330031)

(E-mail: chwc69@yahoo.com.cn)

叶中行

(上海交通大学数学系，上海 200240)

摘　要 本文讨论现金流情形下的 Coherent 风险度量的表示定理, 给出了初始时刻的 Coherent 风险度量的表示定理，还给出了现金流期内任一时刻 t 的 $\mathcal{F}_t$-Coherent 风险度量的表示定理.

关键词 Coherent 风险度量；现金流；表示定理

MR(2000) 主题分类 91B30; 60G35

中图分类 O211.9, F224.7

1　引言

金融风险是金融数学的一个重要研究领域. 为克服 VaR (在险值) 风险度量违背分散投资风险减小这一金融投资基本原则的缺陷, 金融数学家展开了对公理化风险度量的研究. COHERNET 风险度量就是在这样的背景之下应运而生 [1]. 大家知道 Artzner 和 Delbaen 等人在 [2,3] 奠立了单周期市场金融风险 Coherent 风险度量的理论基础. 对一个生成一个多期的现金流的金融资产组合的风险度量, 显然应该在一个多期的金融市场条件下加于研究，我们可以权且称之为一个现金流风险度量问题. [4] 在有限概率空间条件下讨论了定义在现金流风险上的满足时间一致性 (time-consistent) 的动态 Coherent 风险度量的表示定理，也即是将 [5] 中的关于多周期金融市场下的一个资产组合的终期风险值 (final-value) 的动态 Coherent 风险度量的研究结果推广到现金流情形. 本文作者在 [6] 中在一般概率空间条件下给出了一个终期风险值在期内任意时刻 t (甚至可以是一个停时) 的 $\mathcal{F}_t$-Coherent 风险度量的公理化定义基础上研究了同时满足 Fatou 性质, relevant 性质和 time-consistent 性质这三大性质的动态 Coherent 风险度量的表示定理,

本文 2008 年 3 月 27 日收到. 2011 年 10 月 26 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (70671069), 国家基础研究 973 项目 (2007CB814903) 以及江西省自然科学基金项目 (2007JZS2124) 资助项目.

并将此动态风险度量的表示定理推广到现金流风险情形．本文的工作是 [6] 的继续，是将其中的现金流风险情形下的一个遗留问题，即关于现金流风险的 Coherent 风险度量以及在期内任一时刻 t 的 $\mathcal{F}_t$-Coherent 风险度量的表示定理这一问题从相对静态分析的角度进行补充研究．

关于 0 时刻的 Coherent 风险度量我们在本文第 3 节得到下面和 [7] 中命题 2.2 的结论相似的表示定理：

定理 3.1 假设 ϕ_0 是一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 之上的满足 Fatou 性质和 Relevant 性质的 Coherent 风险调整值度量．那么存在一族适应增过程 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 是一凸集，使得

$$\phi_0(D) = D_0 + \frac{1}{R}\inf_{A\in\mathcal{A}}\sum_{k=1}^{N} E\left[D_k(A_k - A_{k-1})\right].$$

其中，对任意 $A\in\mathcal{A}$, $A_0 = R$, $E(A_k - A_{k-1}) = \frac{R}{(1+r)^k}$, $k\geq 1$.

类比一个终期风险值的 $\mathcal{F}_t$-Coherent 风险度量的表示定理 ([6] 中的定理 2.3), 我们推而广之得到下面关于现金流风险的 $\mathcal{F}_t$-Coherent 风险度量的表示定理，这一结果是本文的主要贡献．

定理 3.2 假设 ϕ_k 是一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的满足 Fatou 性质和 relevant 性质的 $\mathcal{F}_k$- Coherent 风险调整值度量．那么存在一族满足 $\mathcal{F}_k$- 凸性的增过程 $\mathcal{A}_k$, 使得

$$\phi_k(D) = \frac{1}{R_k}\operatorname*{ess.inf}_{A\in\mathcal{A}_k}\Big\{\sum_{m=k}^{N} E[D_m(A_m - A_{m-1})|\mathcal{F}_k]\Big\},$$

并且对任意的 $A\in\mathcal{A}$, 当 $n<k$ 时， $A_n = 0$, 而当 $n\geq k$ 时， $E(A_n - A_{n-1}) = \frac{R_k}{(1+r)^{n-k}}$, 其中 $R_k^{-1} = \sum\limits_{m=k}^{N}\frac{1}{(1+r)^{m-k}}$.

2 问题描述及相关定义

首先假定时间集合 $\mathcal{I}$ 是离散的，即 $\mathcal{I} = \{0,1,2,\cdots,N\}$. 某一金融市场的不确定性由一个一般的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_N,\{\mathcal{F}\}_{n=0}^N,\mathbf{P})$ 所定义，其中 $\mathcal{F}_0$ 是平凡的．投资者在这一市场上选择金融资产进行组合投资时，他的组合头寸给他带来的收益并不总是体现为到期时间 N 时的收益，而是在每一个交易日 n 时， $0\leq n\leq N$, 都可能有损益发生．最典型的例子有期货交易，附息票债券投资等等．期货交易由于盯市操作而给投资者带来一个反映其投资损益的现金流；附息票债券投资由于每期息票的支付而给投资者带来一个反映其投资收益的现金流．

从数学上看，所谓现金流就是一个定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_N,\{\mathcal{F}\}_{n=0}^N,\mathbf{P})$ 上的关于域流 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}\}_{n=0}^N$ 适应的本性有界的随机过程 (或时间序列), $D = (D_0,D_1,\cdots,D_N)$, 其中 D_0 表示投资者选择这一现金流所代表的金融头寸的初始成本， D_n 表示在第 n 个交易日时的损益．所有的现金流的集合就是所有 $\mathcal{F}$- 适应的本性有界随机过程的集合，记作 $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ 中的不同元素我们用上指标加以区别，例如 $D^1, D^2\in\mathcal{D}$ 分别代表两个不同的现金流．如果定义 $\|D\|_\infty = \max\{\|D_n\|_\infty : 0\leq n\leq N\}$, 那么在这一范数之下 $\mathcal{D}$ 是一赋范线性

空间. 我们再引进记号 $D^{(k,N)}\triangleq(0,\cdots,0,D_k,\cdots,D_N)$ 表示现金流 $D=(D_0,D_1,\cdots,D_N)$ 在第 k 交易日之后的限制. 所有现金流在这种限制之下的全体记作 $\mathcal{D}^{(k,N)}$. 在不引起混淆的情况下, 我们将 $D^{(N,N)}=(0,\cdots,0,D_N)$ 与到期时的损益 D_N 视为等同, 那么在这种等同意义之下, 集合 $\mathcal{D}^{(N,N)}$ 与 $L^\infty(\mathcal{F}_N)$ 等同. 此外, 常数 r 表示市场无风险利率.

下面我们先给出定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的 Coherent 风险度量的有关定义 [6], 然后讨论现金流 $\mathcal{D}$ 上的 Coherent 风险度量的表示定理. 与 [6] 一样, 我们也是采用 Coherent 风险调整值度量这一术语来处理的, 它与 Coherent 风险度量相差一个负号.

定义 2.1 如果一个非线性映射 $\phi_k:\mathcal{D}\to L^\infty(\mathcal{F}_k)$ 满足如下性质:

(i) 历史独立性: $\phi_k(D)=\phi_k(D^{(k,N)})$, $\forall\, D\in\mathcal{D}$.

(ii) $\mathcal{F}_k$- 正齐性: $\phi_k(Z\cdot D)=Z\cdot\phi_k(D)$, $\forall\, Z\in L^\infty_+(\mathcal{F}_k)$.

(iii) 上可加性: $\phi_k(D^1+D^2)\geq\phi_k(D^1)+\phi_k(D^2)$, $\forall\, D^1,D^2\in\mathcal{D}$.

(iv) 单调性: $\phi_k(D^1)\geq\phi_k(D^2)$, 如果 $D^1_m\geq D^2_m$, $\forall\, m\geq k$.

(v) $\mathcal{F}_k$- 平移不变性: $\phi_k(D+Z\cdot\mathbf{1}_{\{m\}})=\phi_k(D)+\frac{Z}{(1+r)^{m-k}}$, $\forall\, Z\in L^\infty(\mathcal{F}_k)$, $k\leq m\leq N$, 其中 $\mathbf{1}_{\{m\}}=\big(\underbrace{0,\cdots,0}_{m},1,0,\cdots,0\big)$.

那么就称 ϕ_k 是一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的 $\mathcal{F}_k$-Coherent 风险调整值度量. 当 $k=0$ 时, 称 ϕ_0 为定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的 Coherent 风险调整值度量.

在这一定义中, k 是常数, 不是停时. 此外, 当 $k=N$ 时, $\mathcal{F}_N$-Coherent 风险度量 ϕ_N 在等同意义下是定义在 $L^\infty(\mathcal{F}_N)$ 上的恒同映射.

定义 2.2 假设 $\phi_k:\mathcal{D}\to L^\infty(\mathcal{F}_k)$ 是一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的 $\mathcal{F}_k$-Coherent 风险调整值度量. 如果 ϕ_k 满足下面的性质: 对任一一致有界的现金流序列 $\{D^n\}_{n\geq1}$, 即有常数 M 使得对任意 n 都有 $\|D^n\|_\infty\leq M$, 如果 D^n_0 收敛到 D_0, 并且对每一个 k, $1\leq k\leq N$, D^n_k 依概率收敛于 D_k, 那么 $E[\phi_k(D)]\geq\limsup E[\phi_k(D^n)]$, 其中, $D=(D_0,\cdots,D_N)$. 那么我们就称 ϕ_k 满足 Fatou 性质.

定义 2.3 假设 $\phi_k:\mathcal{D}\to L^\infty(\mathcal{F}_k)$ 是一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的 $\mathcal{F}_k$-Coherent 风险调整值度量. 如果对任意的 m, $k\leq m\leq N$, $A_m\in\mathcal{F}_m$, 其中 $\mathbf{P}(A_m)>0$, 都有 $E[\phi_k(-\mathbf{1}_{(A_m)}\cdot\mathbf{1}_{\{m\}})]<0$, 那么就称 ϕ_k 满足 Relevant 性质.

现在我们开始讨论以下一些问题:

(1) 对于一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的 Coherent 风险调整值度量 ϕ_0, 它有什么形式的表示定理呢?

(2) 更一般地, 对于一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的 $\mathcal{F}_k$-Coherent 风险调整值度量 ϕ_k, 它又有什么形式的表示定理?

3 表示定理推导

以下, 我们总假设 ϕ_0,ϕ_k, $k=1,2,\cdots,N$ 是定义在现金流之上的满足 Fatou 性质和 Relevant 性质 Coherent 风险调整值度量. 现在, 我们开始分析讨论 ϕ_0,ϕ_k 的表示定理.

首先构造乘积测度空间 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbf{P}})$ 如下：

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega} &= \{0, 1, \cdots, N\} \times \Omega, \\
\widetilde{\mathcal{F}} &= \sigma\left\{\{k\} \times B_k : 0 \le k \le N, B_k \in \mathcal{F}_k\right\}, \\
\widetilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{N} \times \mathbf{P},
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{N}$ 则是集合 $\{0, 1, \cdots, N\}$ 上的均匀分布所定义的概率测度，即对任意 $t \in \{0, 1, \cdots, N\}$，$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{N+1}$. 将每一个现金流 $D \in \mathcal{D}$, 视为是定义在 $\widetilde{\Omega}$ 上的函数．那么，

$$\mathcal{D} = L^\infty(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbf{P}}) \widehat{=} \widetilde{L}^\infty,$$

即是 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbf{P}})$ 上的所有本性有界函数构成的集合．

很显然，从定义 2.1 可知： $\phi_0 : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ 是定义在 $\widetilde{L}^\infty$ 上的 Coherent 风险调整值度量．不妨设 $\{D^n\}_{n\ge1}$ 是一个一致有界的现金流序列，对任意的 n 和 $s \in \{0, 1, \cdots, N\}$ 有 $|D_s^n| \le 1$, $\mathbf{P}$-a.s., 这等价于：对任意的 n, 有 $|D^n| \le 1$, $\widetilde{\mathbf{P}}$-a.s. 进一步，如果 D_s^n 依概率 $\mathbf{P}$ 收敛于 D_s, 那么就有 D^n 依概率 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 收敛于现金流 D. 因此 $\phi_0 : \widetilde{L}^\infty \to \mathbf{R}$ 是一个满足 Fatou 性质的 Coherent 风险调整值度量.

因为对任意 $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$ 总可以写成下面的形式：

$$A = \bigcup_{t \in \mathcal{I}} (\{t\} \times A_t),$$

其中，对任意 $t \in \mathcal{I}$, 截口 $A_t \in \mathcal{F}_t$. 要使 $\widetilde{\mathbf{P}}(A) > 0$, 当且仅当存在 $t \in \mathcal{I}$ 使得 $\mathbf{P}(A_t) > 0$. 所以 $\phi_0 : \widetilde{L}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}$ 是一个满足 Relevant 性质的 Coherent 风险调整值度量.

记 $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)$ 为单位现金流，那么根据定义 2.1 可得

$$\phi_0(\mathbf{1}) = \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{(1+r)^m} \widehat{=} R^{-1}.$$

令 α 是任一实常数，那么我们有

$$\phi_0(D + \alpha\mathbf{1}) = \phi_0(D) + \alpha R^{-1}.$$

从而有

$$R\phi_0(D + \alpha\mathbf{1}) = R\phi_0(D) + \alpha.$$

因此根据 Coherent 风险度量的表示定理 (见 [3] 中定理 3.5) 可知存在一族与 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 等价的概率测度 $\widetilde{\mathcal{P}}$, 且 $\widetilde{\mathcal{P}}$ 是一凸集，使得

$$R\phi_0(D) = \inf_{\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}} E_{\widetilde{Q}}(D).$$

因为

$$R\phi_0(\mathbf{1}_{\{m\}}) = \frac{R}{(1+r)^m} = \inf_{\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}} E_{\widetilde{Q}}(\mathbf{1}_{\{m\}}) = \inf_{\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}} \widetilde{Q}(\{m\} \times \Omega),$$

同时,

$$R\phi_0(-\mathbf{1}_{\{m\}}) = -\frac{R}{(1+r)^m} = -\sup_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}} E_{\widetilde{Q}}(\mathbf{1}_{\{m\}}) = -\sup_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}} \widetilde{Q}(\{m\}\times\Omega),$$

所以对任意测度 $\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}$, 都有

$$\widetilde{Q}(\{m\}\times\Omega) = \frac{R}{(1+r)^m}.$$

这说明了 $\{0,1,\cdots,N\}\times\Omega$ 上的凸测度集 $\widetilde{\mathcal{P}}$ 在集合 $\mathcal{I}=\{0,1,\cdots,N\}$ 上生成唯一的一个边际测度. 现在对任意 $\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}$, 我们将它关于测度 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 的 Radon-Nikodym 导数记为

$$\frac{d\widetilde{Q}}{d\widetilde{\mathbf{P}}} = f(k,\omega),$$

其中 $k\in\mathcal{I}$, 截口 $f_k\in\mathcal{F}_k$, 并且 $E(f_k)=(N+1)\frac{R}{(1+r)^k}$, 那么

$$E_{\widetilde{Q}}(D) = E_{\widetilde{\mathbf{P}}}(fD) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} E(f_k D_k).$$

如果令

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f_k}{N+1},$$

那么 $(A_n)_{n\in\mathcal{I}}$ 是一个 $\mathcal{F}$- 适应的增过程, 其中 $A_0=R$, 而且

$$E_{\widetilde{Q}}(D) = D_0A_0 + \sum_{k=1}^{N} E\big[D_k(A_k-A_{k-1})\big].$$

因此对于 $\phi_0:\mathcal{D}\to\mathbf{R}$, 我们有下面的表示定理.

定理 3.1 假设 ϕ_0 是一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 之上的满足 Fatou 性质和 Relevant 性质的 Coherent 风险调整值度量. 那么存在一族适应增过程 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 是一凸集, 使得

$$\phi_0(D) = D_0 + \frac{1}{R}\inf_{A\in\mathcal{A}}\sum_{k=1}^{N} E\left[D_k(A_k-A_{k-1})\right].$$

其中, 对任意 $A\in\mathcal{A}$, $A_0=R=\big(\sum\limits_{m=0}^{N}\frac{1}{(1+r)^m}\big)^{-1}$, $E(A_k-A_{k-1})=\frac{R}{(1+r)^k}$, $k\geq 1$.

类似于对 ϕ_0 所作的分析, 对于 ϕ_k 来说, $E[\phi_k(\cdot)]:\widetilde{L}^\infty\to\mathbf{R}$ 是一个满足 Fatou 性质和 Relevant 性质的 Coherent 风险调整值度量. 从 ϕ_k 的历史独立性可知,

$$E[\phi_k(\mathbf{1})] = \sum_{m=k}^{N}\frac{1}{(1+r)^{m-k}} \widehat{=} R_k^{-1}.$$

进而我们得到

$$R_kE[\phi_k(D+\alpha\mathbf{1})] = R_kE[\phi_k(D)]+\alpha.$$

因此根据 Coherent 风险度量的表示定理 (见 [3] 中的定理 3.5) 可知存在一族与 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 等价的概率测度 $\widetilde{\mathcal{P}}_k$, 使得

$$R_k E[\phi_k(D)] = \inf_{\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_k} E_{\widetilde{Q}}(D),$$

并且对任意的 $\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_k$, 它在 $\{0, 1, \cdots, k-1\} \times \Omega$ 上无负荷，即对任意的 $j < k$ 有

$$\widetilde{Q}(\{j\} \times \Omega) = 0,$$

同时当 $m \geq k$ 时有

$$\widetilde{Q}(\{m\} \times \Omega) = \frac{R_k}{(1+r)^{m-k}},$$

亦即 $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ 在 $\mathcal{I} = \{0, 1, \cdots, N\}$ 生成唯一的一个边际测度．同样地对 $\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_k$, 记

$$f(s, \omega) = \frac{d\widetilde{Q}}{d\widetilde{\mathbf{P}}},$$

那么

$$\begin{aligned} &f_j = 0, \qquad \forall\, j < k, \\ &E(f_m) = (N+1)\frac{R_k}{(1+r)^{m-k}}, \qquad \forall\, m \geq k. \end{aligned}$$

亦记

$$A_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{f_s}{N+1},$$

那么 $(A_n)_{n \in \mathcal{I}}$ 是一个 $\mathcal{F}$- 适应的增过程，其中当 $n < k$ 时， $A_n = 0$, 而当 $n \geq k$ 时，$E(A_n - A_{n-1}) = \frac{R_k}{(1+r)^{n-k}}$, 并且

$$E_{\widetilde{Q}}(D) = \sum_{m=k}^{N} E\big[D_m(A_m - A_{m-1})\big].$$

因此，对应于测度集 $\widetilde{\mathcal{P}}_k$, 我们得到一族增过程 $\mathcal{A}_k$, 使得

$$R_k E[\phi_k(D)] = \inf_{A \in \mathcal{A}_k} \sum_{m=k}^{N} E\big[D_m(A_m - A_{m-1})\big],$$

并且 $\mathcal{A}_k$ 可以满足下面的 $\mathcal{F}_k$- 凸性 [6]:

对任意两个增过程 $A^1, A^2 \in \mathcal{A}_k$ 和 $B \in \mathcal{F}_k$, 有 $\mathbf{1}_B A^1 + \mathbf{1}_{B^c} A^2 \in \mathcal{A}_k$.

记 $\mathcal{H}(D) = \{\eta_{D,A} : A \in \mathcal{A}_k\}$, 其中

$$\eta_{D,A} = R_k^{-1} \sum_{m=k}^{N} E[D_m(A_m - A_{m-1}) | \mathcal{F}_k].$$

由 $\mathcal{A}_k$ 的 $\mathcal{F}_k$- 凸性易知 $\mathcal{H}(D)$ 关于有限下端运算封闭，因此根据 [8, 第 7 章第 6 节定理 6.2] (本性确界存在定理) 和上面关于 $E[\phi_k(\cdot)]$ 的表达式可得：

$$E[\phi_k(D)] = \inf_{\eta \in \mathcal{H}(D)} E(\eta) = E[\text{ess.inf}\, \mathcal{H}(D)].$$

此外，由 $\phi_k(\cdot)$ 的 $\mathcal{F}_k$- 正齐性可知对任意的 $B \in \mathcal{F}_k$ 有

$$E[\phi_k(D)\mathbf{1_B}] = \mathbf{E}[\phi_\mathbf{k}(\mathbf{D}\mathbf{1_B})] = \inf_{\eta \in \mathcal{H}(\mathbf{D})} \mathbf{E}(\eta \mathbf{1_B}),$$

从而可得：

$$\phi_k(D) \le \eta, \qquad \forall\, \eta \in \mathcal{H}(D).$$

最终有

$$\phi_k(D) = \text{ess.inf}\mathcal{H}(D),$$

即

$$\phi_k(D) = \frac{1}{R_k} \underset{A \in \mathcal{A}_k}{\text{ess.inf}} \Big\{ \sum_{m=k}^{N} E[D_m(A_m - A_{m-1})|\mathcal{F}_k] \Big\}.$$

所以对于 $\phi_k : \mathcal{D} \to L^\infty(\mathcal{F}_k)$, 我们得到下面的表示定理.

定理 3.2 假设 ϕ_k 是一个定义在现金流 $\mathcal{D}$ 上的满足 Fatou 性质和 Relevant 性质的 $\mathcal{F}_k$- Coherent 风险调整值度量. 那么存在一族满足 $\mathcal{F}_k$- 凸性的增过程 $\mathcal{A}_k$, 使得

$$\phi_k(D) = \frac{1}{R_k} \underset{A \in \mathcal{A}_k}{\text{ess.inf}} \left\{ \sum_{m=k}^{N} E[D_m(A_m - A_{m-1})|\mathcal{F}_k] \right\},$$

并且对任意的 $A \in \mathcal{A}_k$, 当 $n < k$ 时， $A_n = 0$, 而当 $n \ge k$ 时， $E(A_n - A_{n-1}) = \frac{R_k}{(1+r)^{n-k}}$, 其中 $R_k^{-1} = \sum\limits_{m=k}^{N} \frac{1}{(1+r)^{m-k}}$.

致谢 对某一匿名审稿专家提出的公正无私的修改意见表示敬意和感谢. 正是这些意见指出了本文存在的几个不足之处，使得作者得以及时修正和改进.

参 考 文 献

[1] Artzner Ph, Delbaen F, Eber J -M, Heath D. Thinking Coherently. *Risk*, 1997, 10: 68–71

[2] Artzner Ph, Delbaen F, Eber J -M, Heath D. Coherent Risk Measures. *Mathematical Finance*, 1999, 9: 203–228

[3] Delbaen F. Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. Essays in Honour of Dieter Sondermann, Springer-Verlag, 2002

[4] Riedel, F. Dynamic Coherent Risk Measures. *Stoch. Proc. Appl.*, 2004, 112(2): 185–200

[5] Roorda B, Engwerda J C, Schumacher J M. Coherent Acceptability Measures in Multiperiod Models. *Mathematical Finance*, 2005, 15(4): 589–612

[6] Chen W, Xiong D, Ye Z. Information and Dynamic Coherent Risk Measures. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2007, 38(2): 79–96

[7] Artzner Ph, Delbaen F, Eber J -M, Heath D, Ku H. Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman's Principle. *Annals of Operations Research*, 2007, 152(1): 5–22

[8] 严加安. 《测度论讲义》. 北京：科学出版社，1998
(Yan J. Lectures on Measures Theory. Beijing: Publisher of Sciences, 1998)

Coherent Risk Measures Defined on Cash Flows

CHEN Wencai

(*Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang* 330031)

(*E-mail: chwc69@yahoo.com.cn*)

YE Zhongxing

(*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200240)

Abstract We discuss in this paper the representation theorem of coherent risk measures defined on cash flows. The representation theorem of coherent risk measures at 0 time is obtained, and the representation theorem of the $\mathcal{F}_t$-coherent risk measures at any time t is also solved explicitly.

Key words coherent risk measures; cash flows; representation theorems

MR(2000) Subject Classification 91B30; 60G35

Chinese Library Classification O211.9; F224.7