第 35 卷 第 2 期　应 用 数 学 学 报　Vol. 35 No. 2
2012 年 3 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　March, 2012

脉冲时滞 Hassell–Varley–Holling 功能性反应捕食者 — 食饵系统周期解存在的充要条件 *

钟敏玲

(华南师范大学数学科学学院，广州 510631)
(广东外语外贸大学信息科学技术学院，广州 510006)

刘秀湘

(华南师范大学数学科学学院，广州 510631)
(E-mail: liuxx@scnu.edu.cn)

摘　要　研究一类具 Hassell–Varley–Holling 功能性反应的非自治脉冲时滞捕食者 – 食饵系统的周期解存在性问题. 基于重合度理论的延拓定理，发展了一种新的解的估计技巧，并运用拓扑度的同伦不变性，得到了这类系统周期解存在的充要条件.

关键词　Hassell–Varley–Holling 功能性反应；捕食者 - 食饵系统；周期解

MR(2000) 主题分类　35K57; 92B05

中图分类　O175.1

1　引言

众所周知， Hassell, Varle[1] 于 1969 年首先发现捕食者种群之间的干扰影响捕食效率的实验证据并提出了现在被称作 Hassell–Varley 型的功能性反应

$$g_1(N,P)=\frac{\alpha N}{P^\sigma},\tag{1.1}$$

这里 N 和 P 分别代表食饵和捕食者种群规模 (或密度), α 是捕食者搜寻食饵的效率, σ 用来表示捕食者之间的干扰，一般介于 0 到 1 之间，现也常被称为 Hassell–Varley 常数. 此后， Arditi 和 Akcakaya[2], Sutherland[3] 以及 Schenk 等 [4] 根据实验分别建立了

本文 2009 年 8 月 20 日收到.
* 国家自然科学基金 (10801056, 10971057) 和高校博士点专项基金 (20094407110001) 资助项目.

下列营养函数

$$g_2(N,P)=\frac{\alpha(\frac{N}{P^\sigma})}{1+\alpha h(\frac{N}{P^\sigma})},\qquad g_3(N,P)=\frac{\alpha(\frac{N}{P^\sigma})^2}{1+\alpha h(\frac{N}{P^\sigma})^2},\tag{1.2}$$

其中 $h>0$ 代表捕食者捕食时间. 这两个功能性反应 g_2, g_3 是很有一般性的，包括了许多常见的功能性反应. 如 $\sigma=0$ 时它们分别为著名的 Holling (II) 和 (III) 型功能性反应，从而也有学者将 g_2,g_3 分别称为 Hassell–Varley–Holling (II) 和 (III) 型功能性反应. 如果 $\sigma=1$, g_2, g_3 则为众周所知的比率相关的功能性反应，这是由生态学家 Arditi, Ginzburg[5,6] 首先提出来的. 最近， Hsu[7] 等人研究了具功能性反应 g_2 的常微分方程模型的动力学行为. 但是对具有功能性反应 g_3 的模型的研究很少， Liu 等 [7] 研究了 $\sigma=1$ 时的偏微分方程模型的持续生存和周期解，本文研究 $\sigma\in(0,1)$ 的情形.

另一方面, 除了理想的情况, 时滞是存在于任何动力系统中的. 同时, 在生态控制, 经济生活和工程技术领域中上广泛地存在脉冲扰动. 脉冲泛函微分方程是同时刻画时滞和脉冲扰动的数学模型, 其数学理论仍在发展之中. 脉冲时滞系统作为非线性系统领域的一个新分支，具有广泛的理论意义和应用价值，引起了众多学者的关注，如傅希林教授专著 [9].

现假设 $x(t),y(t)$ 分别为 t 时刻食饵和捕食者的种群密度 (数量), 在 (1.2) 中令 $r=\alpha h$. 考虑到食饵种群的妊娠期和捕食者的生殖或成熟周期, 以及两类种群的脉冲扰动, 我们建立如下的 Hassell–Varley–Holling 功能性反应的非自治脉冲时滞捕食者 – 食饵模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(t)[a(t)-b(t)x(t-\tau_1)]-\dfrac{\alpha(t)x^2(t)y(t)}{r(t)x^2(t)+y^{2\sigma}(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-d(t)y(t)+\dfrac{\beta(t)x^2(t-\tau_2)y(t-\tau_2)}{r(t)x^2(t-\tau_2)+y^{2\sigma}(t-\tau_2)},\\ \Delta x(t)=c_{1k}x(t),\qquad t=t_k,\quad k\in\mathbb{N},\\ \Delta y(t)=c_{2k}y(t),\qquad t=t_k,\quad k\in\mathbb{N},\end{cases}\tag{1.3}$$

这里我们假设没有捕食者情形下，食饵种群的增长符合 Logistic 规律，即 a 是食饵种群的内禀增长率， a/b 表示食饵的最大环境容纳量； α 是捕食者搜寻食饵的效率， d 是捕食者种群的死亡率， β/α 是捕食者猎食食饵后的能量转化率，$\sigma\in(0,1)$ 代表了捕食者之间的干扰因素. $\tau_1>0$, $\tau_2>0$ 分别为食饵种群的妊娠期和捕食者的生殖 (成熟) 周期， $\{t_k\}$ 是脉冲时刻序列，满足 $t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$, c_{ik} 是脉冲效应，考虑到生态背景，一个自然的条件约束是 $1+c_{ik}>0$, $i=1,2$, $k\in\mathbb{N}$.

对于非自治系统，一个有趣的问题是其周期解的存在性. 重合度理论中的延拓定理是证明周期解存在性的一个非常有效的工具，现已有非常多的文献，如 [10,11]. 但是, 目前绝大多数的结果都是充分而非必要的, 因为运用这个定理的关键在于寻找相应算子方程的解的上下界以构造有界开集，不同精细程度的放缩估计就会得到强弱要求不同的条件 [12]. 因此，要得到较好的存在性条件需要运用各种分析技巧来估计相应算子方程的解的上下界. 本文发展了一种新的估计技巧研究系统 (1.3) 的周期解的存在性. 我们的技巧在于构造了两个辅助函数，利用这两个辅助函数的性质得到了相应算子方程

的解的下界，再利用拓扑度的同伦不变性得到了上述系统正周期解存在的充要条件.

2 预备工作

令 $\mathbb{Z},\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别为整数集，正整数集和实数集， $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$. 在本文中我们总假设下列条件成立：

(H1) $a(t),b(t),d(t),\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 均为正值的 ω- 周期函数;

(H2) 存在整数 $p\geq 1$ 使得 $[0,\omega]\cap\{t_k\}=\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}$, $t_{k+p}=t_k+\omega$, $c_{ik}=c_{i(k+p)}$ 且 $1+c_{ik}>0$, $i=1,2$, $k\in\mathbb{N}$.

我们的工具是重合度理论中延拓定理，为此首先介绍一下重合度理论中延拓定理相关的记号和定义 [13].

设 X,Y 是赋范向量空间， $L:\operatorname{Dom}L\subset X\to Y$ 为线性映射， $N:X\to Y$ 为连续映射. 如果 $\dim\operatorname{Ker}L=\operatorname{codim}\operatorname{Im}L<\infty$ 且 $\operatorname{Im}L$ 为 Y 中的闭子集，则称映射 L 为指标为零的 Fredholm 映射. 如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射且存在连续投影 $P:X\to X$ 及 $Q:Y\to Y$ 使得 $\operatorname{Im}P=\operatorname{Ker}L$, $\operatorname{Im}L=\operatorname{Ker}Q=\operatorname{Im}(I-Q)$, 则 $L|_{\operatorname{Dom}L\cap\operatorname{Ker}P}:(I-P)X\to\operatorname{Im}L$ 可逆，其逆映射记为 K_P. 设 Ω 为 X 中的有界开集，如果 $QN(\overline{\Omega})$ 有界且 $K_P(I-Q)N:\overline{\Omega}\to X$ 是紧的，则称 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的. 由于 $\operatorname{Im}Q$ 与 $\operatorname{Ker}L$ 同构，因而存在同构映射 $J:Q\to\operatorname{Ker}L$.

引理 2.1[13] 设 L 是指标为零的 Fredholm 映射， N 在 $\overline{\Omega}$ 是 L- 紧的，假设下述条件成立

(1) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$ 和 $x\in\partial\Omega$ 有 $Lx\neq\lambda Nx$;

(2) 对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$ 有 $QNx\neq 0$;

(3) $\deg\{JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}\neq 0$,

那么方程 $Lx=Nx$ 在 $\operatorname{Dom}L\cap\overline{\Omega}$ 内至少有一个解.

为了将系统转化为相应的算子方程，我们引入下述空间：

$$\mathrm{PC}_\omega=\left\{\phi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{(i)}\ \ \phi(t)\ \text{在}\ t\neq t_k\ \text{是连续的且是}\ \omega-\text{周期函数;}\\ \text{(ii)}\ \ \text{极限}\ \lim\limits_{s\to t_k-0}\phi(s)=\phi(t_k)\ \text{和}\ \lim\limits_{s\to t_k+0}\phi(s)=\phi(t_k^+)\ \text{存在.}\end{array}\right\}.$$

另外，我们记 $\mathrm{PC}^1_\omega=\{\phi\in\mathrm{PC}_\omega:\ \phi'\in\mathrm{PC}_\omega\}$.

下述定义和引理来源于 Bainov 和 Simenov 的专著 [14]:

定义 2.1 对于一个集合 $W\subset\mathrm{PC}_\omega$, 如果对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $x\in W$, $t',t''\in(t_{k-1},t_k]\cap[0,\omega]$, $k\in\mathbb{N}$ 且 $|t'-t''|<\delta$ 均有 $|x(t')-x(t'')|<\epsilon$ 成立，则称 W 在 $[0,\omega]$ 是拟等度连续的.

引理 2.2 集合 $W\subset\mathrm{PC}_\omega$ 是预紧的当且仅当 W 是有界的，也就是说，存在 $M>0$ 使得 $\|x\|\leq M$ 对任意 $x\in W$ 成立，且 W 在 $[0,\omega]$ 上是拟等度连续的.

在后文中，为方便我们引入下述记号：

$$\widehat{f}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 f 是一 ω- 周期函数. 为将 (1.3) 转化为等价的算子方程，作变量代换 $x_1(t)=\ln x(t)$, $x_2(t)=\ln y(t)$, 于是 (1.3) 变形为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=a(t)-b(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1)}-\dfrac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t)}}, & t\neq t_k,\\ \dot{x}_2(t)=-d(t)+\dfrac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t-\tau_2)}}, & t\neq t_k,\\ \Delta x_1(t)=\ln(1+c_{1k}), & t=t_k,\quad k\in\mathbb{N},\\ \Delta x_2(t)=\ln(1+c_{2k}), & t=t_k,\quad k\in\mathbb{N}.\end{cases}\tag{2.1}$$

容易看出,如果系统 (2.1) 有一 ω- 周期解 $(x_1^*(t),x_2^*(t))^{\mathrm{T}}$, 则 $(x^*(t),\ y^*(t))^{\mathrm{T}}=(\mathrm{e}^{x_1^*(t)},\mathrm{e}^{x_2^*(t)})^{\mathrm{T}}$ 是系统 (1.3) 的 ω- 正周期解. 因此我们只需证明 (2.1) 有 ω- 周期解即可.

令

$$X=\{x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathrm{PC}_{\omega},\ i=1,2\},\qquad Z=X\times\mathbb{R}^{2p}$$

且赋予范数

$$\begin{aligned}&\|x\|_X=\sum_{i=1}^{2}\sup_{t\in[0,\omega]}|x_i(t)|,\qquad x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X,\\&\|z\|_Z=\|x\|_X+\|y\|,\qquad z=(x,y)\in Z,\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^{2p}$ 中的 Euclidean 范数，则 X 和 Z 均为 Banach 空间. 定义

$$L:\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Z,\qquad Lx=(\dot{x},\Delta x(t_1),\cdots,\Delta x(t_p))$$

且 $\mathrm{Dom}\,L=\{x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathrm{PC}_{\omega}^1,\ i=1,2\}$. 又定义 $N:X\to Z$ 为

$$Nx=\begin{bmatrix}a(t)-b(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1)}-\dfrac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t)}}, & \ln(1+c_{11}),\cdots, & \ln(1+c_{1p})\\ -d(t)+\dfrac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t-\tau_2)}}, & \ln(1+c_{21}),\cdots, & \ln(1+c_{2p})\end{bmatrix},\quad x\in X.$$

利用这些记号我们可将 (2.1) 等价的算子方程 $Lx=Nx$, $x\in X$. 显然 $\mathrm{Ker}\,L=\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}\,L=\big\{z=(\phi,\gamma_1,\cdots,\gamma_p)\in Z:\ \int_0^{\omega}\phi(t)\mathrm{d}t+\sum\limits_{k=1}^{p}\gamma_k=0\big\}$ 是 Z 的闭子集, $\mathrm{dimKer}\,L=\mathrm{codimIm}\,L=2$. 所以， L 是一指标为零的 Fredholm 映射. 现定义两个投射 $P:X\to X$ 和 $Q:Z\to Z$ 分别为

$$\begin{aligned}&Px=\widehat{x},\qquad x\in X,\\&Qz=Q(x,\gamma_1,\cdots,\gamma_p)=\Big(\widehat{x}+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k,\ 0,\cdots,0\Big).\end{aligned}$$

不难验证 P, Q 是连续投射且

$$\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Ker}\, L, \qquad \mathrm{Ker} Q = \mathrm{Im} L = \mathrm{Im}(I - Q),$$

因此广义逆 K_P 存在. 为得到 $K_P : \mathrm{Im}L \to \mathrm{Ker}P \cap \mathrm{Dom}L$ 的表达式, 设 $z = (\phi, \gamma_1, \cdots, \gamma_p) \in \mathrm{Im}L$, 则存在 $x \in \mathrm{Dom}L \subset X$ 使得

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \phi(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t) = \gamma_k, & t = t_k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

直接积分我们有

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s + \sum_{t>t_k} \gamma_k. \tag{2.2}$$

注意到 $x \in \mathrm{Ker}P$, 即 $\int_0^\omega x(s)\mathrm{d}s = 0$, 联系到 (2.2) 得到

$$\omega x(0) + \int_0^\omega \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_0^\omega \sum_{t>t_k} \gamma_k \mathrm{d}t = 0,$$

因而

$$x(t) = \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s + \sum_{t>t_k} \gamma_k - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^p \gamma_k + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^p \gamma_k t_k$$

和

$$K_P z = \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s + \sum_{t>t_k} \gamma_k - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^p \gamma_k + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^p \gamma_k t_k.$$

这样的话，对 $x \in X$ 有

$$\begin{aligned} &QNx \\ =&\frac{1}{\omega}\begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^\omega \Big[a(t) - b(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1)} - \frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t)} + \mathrm{e}^{2\sigma x_2(t)}}\Big]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^p \ln(1+c_{1k}), & 0, & \cdots, & 0 \\ \displaystyle\int_0^\omega \Big[-d(t) + \frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)} + \mathrm{e}^{2\sigma x_2(t-\tau_2)}}\Big]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^p \ln(1+c_{2k}), & 0, & \cdots, & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

且

$$K_P(I-Q)Nx = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^t \Big[a(t) - b(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1)} - \frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t)} + \mathrm{e}^{2\sigma x_2(t)}}\Big]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^p \ln(1+c_{1k}) \\ \displaystyle\int_0^t \Big[-d(t) + \frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)} + \mathrm{e}^{2\sigma x_2(t-\tau_2)}}\Big]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^p \ln(1+c_{2k}) \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{\omega}\left[\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^\omega\int_0^t\left[a(s)-b(s)\mathrm{e}^{x_1(s-\tau_1)}-\frac{\alpha(s)\mathrm{e}^{x_1(s)+x_2(s)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(s)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(s)}}\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ \displaystyle+\omega\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{1k})-\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{1k})t_k\\ \displaystyle\int_0^\omega\int_0^t\left[-d(s)+\frac{\beta(s)\mathrm{e}^{2x_1(s-\tau_2)}}{r(s)\mathrm{e}^{2x_1(s-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(s-\tau_2)}}\right]\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\ \displaystyle+\omega\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{2k})-\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{2k})t_k\end{array}\right]$$

$$-\left(\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\left[\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^\omega\left[a(t)-b(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1)}-\frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t)}}\right]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{1k})\\ \displaystyle\int_0^\omega\left[-d(t)+\frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t-\tau_2)}}\right]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{2k})\end{array}\right].$$

显然 QN 和 $K_P(I-Q)N$ 是连续映射. 由 Arzela-Ascoli 定理和引理 2.2, 不难证明 $\overline{K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})}$ 对任意有界开集 $\Omega\subset X$ 是紧的. 另外 $QN(\overline{\Omega})$ 是有界的. 因此，对任意有界开集 $\Omega\subset X$, N 在 $\overline{\Omega}$ 是 L- 紧的. 因此我们可以利用引理 2.1 来研究系统 (2.1) 周期解的存在性.

3 主要结果

定理 3.1 系统 (1.3) 存在正 ω- 周期解当且仅当

$$0<\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{2k})<\widehat{\left(\frac{\beta}{r}\right)}\omega,\qquad \widehat{a}\omega+\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{1k})>0. \tag{3.1}$$

证 根据前面的分析, 我们只需研究系统 (2.1) 周期解的存在性. 首先证明必要性. 如果系统 (2.1) 存在 ω- 周期解 $(x_1^*(t),x_2^*(t))$, 由 (2.1) 第一和第三个方程我们有

$$\widehat{a}\omega+\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{1k})=\int_0^\omega\left[b(t)\mathrm{e}^{x_1^*(t-\tau_1)}+\frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1^*(t)+x_2^*(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1^*(t)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2^*(t)}}\right]\mathrm{d}t>0.$$

注意到

$$0<\int_0^\omega\frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1^*(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1^*(t-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2^*(t-\tau_2)}}\mathrm{d}t<\widehat{\left(\frac{\beta}{r}\right)}\omega.$$

因此由 (2.1) 的第 2 和第 4 个方程则得

$$0<\int_0^\omega\frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1^*(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1^*(t-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2^*(t-\tau_2)}}\mathrm{d}t=\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^p\ln(1+c_{2k})<\widehat{\left(\frac{\beta}{r}\right)}\omega.$$

必要性证毕.

我们下面证明充分性. 根据引理 2.1, 我们只需找到一个恰当有界开集 Ω. 相应于算

子方程 $Lx=\lambda Nx,\ \lambda\in(0,1)$, 系统 (2.1) 的形式为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\lambda\Big[a(t)-b(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1)}-\dfrac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t)}}\Big],\\ \dot{x}_2(t)=\lambda\Big[-d(t)+\dfrac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t-\tau_2)}}\Big],\\ \Delta x_1(t)=\lambda\ln(1+c_{1k}),\ t=t_k,\ k\in\mathbb{N},\\ \Delta x_2(t)=\lambda\ln(1+c_{2k}),\ t=t_k,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}\tag{3.2}$$

假设 $(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X$ 为 (3.2) 相应于某个 $\lambda\in(0,1)$ 的周期解，将 (3.2) 的第 1 和第 2 个方程分别在 $[0,\omega]$ 积分得到

$$\widehat{a}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k})=\int_0^{\omega}b(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_1)}\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}\frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t)}}\mathrm{d}t,\tag{3.3}$$

$$\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})=\int_0^{\omega}\frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(t-\tau_2)}}\mathrm{d}t,\tag{3.4}$$

从而又由 (3.2) 并注意到 $\lambda\in(0,1)$ 我们有下列估计式

$$\int_0^{\omega}|\dot{x}_1(t)|\mathrm{d}t\le 2\widehat{a}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k}),\qquad \int_0^{\omega}|\dot{x}_2(t)|\mathrm{d}t\le 2\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k}).\tag{3.5}$$

另外，对任意 $\xi\in[0,\omega]$ 下述不等式成立

$$\begin{aligned}x_i(t)&\ge x_i(\xi)-\int_0^{\omega}|\dot{x}(s)|\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+c_{ik})|,\\ x_i(t)&\le x_i(\xi)+\int_0^{\omega}|\dot{x}(s)|\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+c_{ik})|,\qquad i=1,2.\end{aligned}$$

因为 $(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X$, 故存在 $\zeta_i,\eta_i\in[0,\omega],\ i=1,2$ 使得

$$x_i(\zeta_i)(\text{or } x_i(\zeta_i^+))=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad x_i(\eta_i)\ (\text{or } x_i(\eta_i^+))=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\quad i=1,2.$$

我们只考虑下述情形：

$$x_i(\zeta_i)=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad x_i(\eta_i)=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad i=1,2.$$

对其它情形，只需在后文的证明中将 $\zeta_i(\eta_i)$ 换成 $\zeta_i^+(\eta_i^+)$ 即可.

接下来我们开始估计 (3.2) 的解. 由 (3.3) 易得 $\widehat{a}\omega+\sum\limits_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k})\ge\widehat{b}\omega\mathrm{e}^{x_1(\zeta_1)}$, 也就是

$$x_1(\zeta_1)\le\ln\frac{\widehat{a}\omega+\sum\limits_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k})}{\widehat{b}\omega}:=A_1.$$

联系到 (3.5) 便得到 x_1 的上界

$$x_1(t) \le A_1 + 2\widehat{a}\omega + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+c_{1k}) + \sum_{k=1}^{p} |\ln(1+c_{1k})| := H_1. \tag{3.6}$$

类似地由 (3.4)–(3.6) 有

$$\widehat{d}\omega - \sum_{k=1}^{p} \ln(1+c_{2k}) \le \int_0^{\omega} \frac{\beta(t)\exp\{2H_1\}}{\exp\{2\sigma x_2(\zeta_2)\}}\mathrm{d}t = \frac{\widehat{\beta}\omega\exp\{2H_1\}}{\exp\{2\sigma x_2(\zeta_2)\}}.$$

于是

$$x_2(\zeta_2) \le \frac{1}{2\sigma}\left(\ln\frac{\widehat{\beta}\omega}{\widehat{d}\omega - \sum\limits_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})} + 2H_1\right) := A_2,$$

从而得到 x_2 的上界

$$x_2(t) \le A_2 + 2\widehat{d}\omega - \sum_{k=1}^{p} \ln(1+c_{2k}) + \sum_{k=1}^{p} \ln|1+c_{2k}| := H_2. \tag{3.7}$$

下面我们寻求 (3.2) 解的下界．由 (3.3) 得到

$$\begin{aligned}\widehat{a}\omega + \sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k}) &\le \widehat{b}\omega\mathrm{e}^{x_1(\eta_1)} + \int_0^{\omega}\frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{2\sqrt{r(t)}\mathrm{e}^{x_1(t)+\sigma x_2(t)}}\mathrm{d}t \\ &\le \widehat{b}\omega\mathrm{e}^{x_1(\eta_1)} + \widehat{\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{r}}\right)}\omega\mathrm{e}^{(1-\sigma)x_2(\eta_2)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

上述不等式在我们的证明中起着重要的作用，对上述不等式进行细致的的分析是本文的一个重要技巧．现在我们就 $x_2(\eta_2) \ge x_1(\eta_1)$ 和 $x_2(\eta_2) < x_1(\eta_1)$ 两种情形分别进行讨论．

情形 1 $x_2(\eta_2) \ge x_1(\eta_1)$. 此时由 (3.8) 得到

$$\widehat{b}\mathrm{e}^{x_2(\eta_2)} + \widehat{\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{r}}\right)}\mathrm{e}^{(1-\sigma)x_2(\eta_2)} \ge \widehat{a} + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k}).$$

考虑辅助函数

$$g_1(u) = \widehat{b}u + \widehat{\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{r}}\right)}u^{(1-\sigma)} - \left[\widehat{a} + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})\right].$$

显然有 $g_1(\mathrm{e}^{x_2(\eta_2)}) > 0$. 由 $\sigma \in (0,1)$ 可知 $g_1'(u) > 0 \ \ (u > 0)$ 且 $\lim\limits_{u\to+\infty} g_1(u) = +\infty$. 由定理条件 (3.1) 知 $g_1(0) < 0$, 故存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $g_1(\delta_1) = 0$ 且 $x_2(\eta_2) > \delta_1$. 所以这种情形下 x_2 的下界为

$$x_2(t) > \ln\delta_1 - 2\widehat{d}\omega + \sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k}) - \sum_{k=1}^{p}\ln|1+c_{2k}| := h_2^{(1)}. \tag{3.9}$$

利用此式和 (3.4), 则得

$$\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})\le\int_0^{\omega}\frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1(t-\tau_2)}}{2\sqrt{r(t)}\mathrm{e}^{x_1(t-\tau_2)+\sigma x_2(t-\tau_2)}}\mathrm{d}t<\omega\widehat{\Big(\frac{\beta}{2\sqrt{r}}\Big)}\mathrm{e}^{x_1(\eta_1)}\mathrm{e}^{-\sigma h_2^{(1)}}.$$

于是得到

$$x_1(\eta_1)\ge\ln\Big[\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})\Big]-\ln\Big[\omega\widehat{\Big(\frac{\beta}{2\sqrt{r}}\Big)}\Big]+\sigma h_2^{(1)}:=A_3,$$

这样我们得到情形 (1) 时 x_1 的下界

$$x_1(t)\ge A_3-2\widehat{a}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})-\sum_{k=1}^{p}\ln|1+c_{2k}|:=h_1^{(1)}.\tag{3.10}$$

情形 2 $x_2(\eta_2)<x_1(\eta_1)$. 此时由 (3.8) 则得

$$\widehat{b}\mathrm{e}^{x_1(\eta_1)}+\widehat{\Big(\frac{\alpha}{2\sqrt{r}}\Big)}\mathrm{e}^{(1-\sigma)x_1(\eta_1)}\ge\widehat{a}+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k}).$$

与情形 (1) 的讨论类似，可得 $x_1(\eta_1)\ge\ln\delta_1$, 故这种情形下 x_1 的下界为

$$x_1(t)>\ln\delta_1-2\widehat{a}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})-\sum_{k=1}^{p}\ln|1+c_{2k}|:=h_1^{(2)}.\tag{3.11}$$

利用此式并由 (3.4) 得到

$$\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})>\int_0^{\omega}\frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2h_1^{(2)}}}{r(t)\mathrm{e}^{2h_1^{(2)}}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2(\eta_2)}}\,\mathrm{d}t.$$

现在考虑辅助函数

$$g_2(u)=\widehat{d}\omega-\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})-\int_0^{\omega}\frac{\beta(t)\mathrm{e}^{2h_1^{(2)}}}{r(t)\mathrm{e}^{2h_1^{(2)}}+u}\,\mathrm{d}t,$$

则 $g_2(\mathrm{e}^{2\sigma(x_2(\eta_2))})>0$. 根据定理条件 (3.1) 有 $g_2(0)<0$ 且 $\lim\limits_{u\to+\infty}g(u)=\widehat{d}\omega-\sum\limits_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})>0$, 另外 $u>0$ 时有 $g_2'(u)>0$. 故存在 $\delta_2>0$ 使得 $g_2(\delta_2)=0$ 且 $x_2(\eta_2)\ge\ln\delta_2/(2\sigma)$. 从而得到情形 (2) 下 x_2 的下界

$$x_2(t)\ge\frac{\ln\delta_2}{2\sigma}-2\widehat{d}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})-\sum_{k=1}^{p}\ln|1+c_{2k}|:=h_2^{(2)}.\tag{3.12}$$

令 $h_i=\min\{h_i^{(1)},\ h_i^{(2)}\},\ i=1,2$, 则 $x_i(t)\ge h_i,\ i=1,2$. 显然 $H_i,h_i,\ i=1,2$ 与 λ 无关. 这样我们得到了解的上下界估计.

为了方便计算拓扑度,我们要利用同伦不变性.为此我们考虑下述关于 $(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$ 的代数方程组

$$\begin{cases}\widehat{a}-\widehat{b}\mathrm{e}^{x_1}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k})-\dfrac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\dfrac{\mu\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1+x_2}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2}}\,\mathrm{d}t=0,\\ -\widehat{d}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})+\dfrac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\dfrac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2}}\,\mathrm{d}t=0,\end{cases}\tag{3.13}$$

并对其解进行估计，其中 $\mu\in[0,1]$. 将 $\alpha(t)$ 换成 $\mu\alpha(t)$, 关键的不等式 (3.8) 仍然成立且其形式变为

$$\begin{aligned}\widehat{a}\omega+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k})\leq&\widehat{b}\omega\mathrm{e}^{x_1(\eta_1)}+\int_0^{\omega}\frac{\mu\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{2\sqrt{r(t)}\mathrm{e}^{x_1(t)+\sigma x_2(t)}}\,\mathrm{d}t\\ \leq&\widehat{b}\omega\mathrm{e}^{x_1(\eta_1)}+\int_0^{\omega}\frac{\alpha(t)\mathrm{e}^{x_1(t)+x_2(t)}}{2\sqrt{r(t)}\mathrm{e}^{x_1(t)+\sigma x_2(t)}}\,\mathrm{d}t\\ \leq&\widehat{b}\omega\mathrm{e}^{x_1(\eta_1)}+\widehat{\Big(\frac{\alpha}{2\sqrt{r}}\Big)}\omega\mathrm{e}^{(1-\sigma)x_2(\eta_2)}.\end{aligned}$$

在对系统 (3.2) 的解的估计证明中将 $x_1(t),x_2(t)$ 分别换成常数周期解 x_1,x_2, 重复上述证明过程我们可证对 $\mu\in[0,1]$ 代数方程组 (3.13) 的解 (x_1^*,x_2^*) 有相同的估计：

$$h_i\leq x_i^*\leq H_i,\qquad i=1,2.\tag{3.14}$$

现取 $W>\max\{|h_1|,|H_1|\}+\max\{|h_2|,|H_2|\}$ 并定义 $\Omega=\{x\in X\mid\|x\|_X<W\}$, 很明显 Ω 满足引理 2.1 的条件 (1). 又若 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L=\partial\Omega\cap\mathbb{R}^2$, 则 x 是 $\mathbb{R}^2$ 中的常向量且 $\|x\|_X=W$, 易见 $QNx\neq0$, 故引理 2.1 的条件 (2) 满足.

最后为方便计算 Brouwer 度，引入同伦

$$B_\mu((x_1,x_2)^{\mathrm{T}})=\mu QN((x_1,x_2)^{\mathrm{T}})+(1-\mu)E((x_1,x_2)^{\mathrm{T}}),\qquad\mu\in[0,1],$$

其中

$$E((x_1,x_2)^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}\widehat{a}-\widehat{b}\mathrm{e}^{x_1}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k})\\ -\widehat{d}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})+\dfrac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\dfrac{\beta(t)\mathrm{e}^{2x_1}}{r(t)\mathrm{e}^{2x_1}+\mathrm{e}^{2\sigma x_2}}\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}.$$

由 (3.14) 知当 $\mu\in[0,1]$ 时 $B_\mu(x)\neq0$ for $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$. 另外,代数方程组 $E((x_1,x_2)^{\mathrm{T}})=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中显然有惟一解. 选同态映射 J 为恒等映射，利用拓扑度的同伦不变性，我们有

$$\deg(\mathrm{JQN},\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,\ 0)=\deg(QN,\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,\ 0)=\deg(E,\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,\ 0)\neq0,$$

其中 $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ 为 Brouwer 度.

至此我们证明了 Ω 满足引理 2.1 的所有条件. 因此系统 (2.1) 至少存在一个 ω- 周期解，设为 (x_1^*,x_2^*). 令 $x^*(t)=\mathrm{e}^{x_1^*(t)}$, $y^*(t)=\mathrm{e}^{x_2^*(t)}$, 则 $(x^*(t),y^*(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统 (1.3) 的 ω-正周期解. 定理证毕.

如果 $c_{ik}=0,\ i=1,2,\ k\in\mathbb{N}$, 系统 (1.3) 中脉冲效应消失了而变为一个连续系统. 注意到此时 (3.1) 中的不等式 $0<\widehat{d}\omega-\sum\limits_{k=1}^{p}\ln(1+c_{2k})$ 和 $\widehat{a}\omega+\sum\limits_{k=1}^{p}\ln(1+c_{1k})>0$ 自然成立. 因此我们有下述结论

定理 3.2 如果 $c_{ik}=0,\ i=1,2,k\in\mathbb{N}$, 系统 (1.3) 存在 ω- 正周期解的充要条件是 $\widehat{d}<\widehat{\left(\frac{\beta}{r}\right)}$.

注 3.1 为了证明过程中书写的简洁，系统 (1.3) 中的时滞假没为常数时滞，实际上，如果将 τ_1,τ_2 改为时变时滞 $\tau_1(t),\tau_2(t)$ (也是 ω- 周期的), 根据我们的证明过程，定理 3.2, 3.2 的结论仍然成立.

注 3.2 引理 3.1 是证明非自治系统周期解存在性一个非常有效和常用的工具. 但是, 用此引理得到的绝大部分结果都是充分而非必要的, 关键原因在于对解的界进行估计不够精细 (在种群系统中特别是下界), 如 [10,11]. 在笔者看来，本文对解的界的估计是非常恰当而得到了周期解存在的充要条件.

参 考 文 献

[1] Hassell M P, Varley G C. New Inductive Population Model for Insect Parasites and its Bearing on Biological Control. *Nature*, 1969, 223: 1133–1137

[2] Arditi R, Ackakaya H R. Underestimation of Mutual Interference of Predators. *Oeclogia*, 1990, 83: 358–361

[3] Sutherland W J. Aggregation and the ‘Idea Free Distribution’. *J. Anim. Ecol.*, 1983, 52: 821–828

[4] Schenk D, Bersier L, Bacher S. An Experimental Test of the Nature of Predation: Neither Prey-nor Ratio-dependent. *J. Animal Ecol.*, 2005, 74: 86–91

[5] Arditi R, Ginzburg L R. Coupling in Predator-prey Dynamics: Ratio Dependence. *J. Theor. Biol.*, 1989, 139: 311–326

[6] Arditi R, Ginzburg L R, Ackakaya H R. Variation in Plankton Densities Among Lakes-a Case for Ratio-dependent Predation Models. *American Naturalist*, 1991, 138: 1287–1296

[7] Hsu S B, Hwang T W, Kuang Y. Global Dynamics of a Predator-prey Model with Hassell-Varley Type Functional Response. *Dis. Cont. Dynam. Syst.* (Series B), 2008, 10: 857–871

[8] Liu X, Huang L. Permanence and Periodic Solutions for a Diffusive Ratio-dependent Predor-prey System. *Appl. Math. Modeling*, 2009, 33: 683–691

[9] 傅希林，闫宝强，刘衍胜. 脉冲微分系统引论. 北京：科学出版社， 2005
(Fu Xilin, Yan Baoqiang, Liu Yansheng. Introduction to Impulsive Differential Systems. Beijing: Science Press, 2005

[10] Bohner M, Fan M, Zhang J. Existence of Periodic Solutions in Predator-prey and Competition Dynamical Systems. *Nonlinear Anal. RWA*, 2006, 7: 1193–1204

[11] Fan M, Wang K. Dynamics of a Nonautonomous Predator-prey System with the Bedding-DeAngelis Functional Response. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, 295: 15–39

[12] Liu X, Huang L. Periodic Solutions for Impulsive Semi-ratio-dependent Predator-prey Systems. *Nonlinear Anal. RWA*, 2009, 10: 3266–3274

[13] Gaines R E, Mawhin J L. Coindience Degree and Non-linear Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1977

[14] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. England: Longman, 1993

Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Periodic Solutions in an Impulsive Predator-prey System with Hassell-Varley-Holling Response

ZHONG Minling

(*School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou* 510631)

(*School of Informatics, Guangzhou University of Foreign Studies, Guangzhou* 510006)

LIU Xiuxiang

(*School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou* 510631)

(*E-mail: liuxx@scnu.edu.cn*)

Abstract This paper considers the existence of periodic solutions in an impulsive predator-prey system with Hassell-Varley-Holling response. Based on continuous theorem of coindence theory, we develop a new estimate technique and obtain the necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions by the invariance property of homotopy.

Key words Hassell-Varley-Holling response; predator-prey model; periodic solutions

MR(2000) Subject Classification 35K57; 92B05

Chinese Library Classification O175.1