

文章编号:1003-207(2013)01-0001-07

基于非仿射随机波动率模型的期权定价研究

吴鑫育¹, 杨文昱², 马超群², 汪寿阳³

(1. 安徽财经大学金融学院, 安徽 蚌埠 233030; 2. 湖南大学工商管理学院, 湖南 长沙 410082;
3. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘 要: 本文应用快速傅里叶变换(FFT)方法, 考虑了标的资产服从非仿射随机波动率模型下的期权定价问题。首先, 应用偏微分方程扰动分析法, 得到了标的资产对数价格分布的近似特征函数; 然后, 应用傅里叶变换及其逆变换, 推导了欧式期权的拟闭型定价公式, 对此公式应用 FFT 方法可以快速得到高精度数值解。数值实验表明, FFT 期权定价方法是非常精确的和有效的; 最后, 给出了基于恒生指数认购权证的实证研究。实证结果表明, 非仿射随机波动率期权定价模型比经典的 Black-Scholes 模型具有更高的定价精确性。

关键词: 期权定价; 非仿射随机波动率; 快速傅里叶变换; 扰动法

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A

1 引言

1973 年, Black 和 Scholes^[1] 在股票价格服从几何布朗运动的假设下, 获得了著名的期权定价公式。在几何布朗运动假设下, 股票收益率服从正态分布并且波动率是常数。然而, 这些严格假设都偏离了实际情况, 造成期权定价的误差以及“波动率微笑”(volatility smile)现象。大量研究表明, 金融资产的收益率并非服从正态分布, 而是呈现出尖峰、厚尾和非对称性等特征; 波动率并非常数, 而具有时变性和波动率聚集(volatility clustering)特征; 收益率与波动率之间存在着负向相关关系, 即所谓的“杠杆效应”(leverage effect)^[2-3]。为了刻画金融资产收益率和波动率的这些特征, 众多学者对经典的 Black-Scholes 模型进行了扩展, 提出了许多有影响的替代模型, 例如 Cox 和 Ross^[4] 提出的不变方差弹性(constant elasticity of variance, CEV)模型, Merton^[5] 提出的跳跃-扩散模型, Hull 和 White^[6], Stein 和 Stein^[7] 和 Heston^[8] 提出的随机波动率模型等。

由于随机波动率模型能够刻画金融资产收益率波动的时变性、波动率聚集以及杠杆效应, 这类模

型在金融计量经济学文献中引起了广泛的关注。其中, Heston 模型是最著名的随机波动率模型之一。Heston 模型设定相对简单, 它是一个仿射(affine)随机波动率模型, 它最突出的优点在于能够给出普通欧式期权的闭型定价公式以及解释期权定价中的“波动率微笑”现象。因此, Heston 模型在金融市场上得到了广泛的关注和应用。然而, 近几年的大量研究发现, 仿射随机波动率模型对于波动过程的平方根设定并不能很好的刻画金融时间序列的非线性特征事实^[9-10], 越来越多的学者开始关注非仿射(non-affine)随机波动率模型^[10-13]。特别地, Chourdakis^[14] 通过构造连续时间马尔科夫链来模拟隐波动率过程, 提出了一个近似的方法对非仿射对数方差模型下的期权定价进行了研究。Christoffersen 等^[15] 采用 S&P 500 看涨期权价格数据为研究样本, 实证检验了仿射与非仿射随机波动率模型的定价效果。实证结果表明, 非仿射随机波动率模型比仿射随机波动率模型具有明显更优越的期权定价效果, 非仿射随机波动率模型期权定价的均方根误差比仿射随机波动率模型的要低 25 - 27%。Christoffersen 等^[16] 从实现波动率(realized volatilities)、S&P 500 收益、期权面板数据三个不同的数据源对仿射与非仿射随机波动率模型进行了实证比较研究。结果表明, 非仿射线性随机波动率模型(方差是线性扩散过程)在这三个数据源中都比仿射随机波动率模型具有更优越的表现。Durham^[17] 采用 S&P 500 指数及其期权数据为研究样本, 研究

收稿日期:2011-10-11; 修订日期:2012-07-17

基金项目:国家杰出青年科学基金项目(70825006); 教育部“长江学者和创新团队发展计划”项目(IRTO916); 国家自然科学基金创新研究群体科学基金项目(71221001)

作者简介:吴鑫育(1982-), 男(汉族), 湖南衡山人, 安徽财经大学金融学院, 讲师, 博士, 研究方向:金融工程与风险管理。

了仿射与非仿射随机波动率模型的风险中性建模。实证结果表明,非仿射对数波动率模型比仿射随机波动率模型具有明显更优越的表现。Hansis^[18]对仿射与非仿射随机波动率模型在模拟分布、期权定价以及资产配置方面的影响进行了研究。结果表明,出于实际应用中易于实现的考虑,可以使用仿射跳跃随机波动率模型,这与 Ignatieva 等^[19]的结果是一致的。Chourdakis 和 Dotsis^[20]采用极大似然方法研究了非仿射波动率过程的参数估计问题。Drimus^[21]基于变换方法,研究了 3/2 非仿射随机波动率模型下实现方差期权的定价与对冲问题。

然而,由于非仿射随机波动率模型标的资产对数价格分布的特征函数所满足的偏微分方程是非线性的,特征函数的精确解析解无法获得,通常不能得到欧式期权价格的闭型解。因此,为了计算非仿射随机波动率模型下的期权价格,学者们主要采用 Monte Carlo 模拟方法。虽然 Monte Carlo 方法可以得到较为精确的期权价格,但它具有计算量大、耗时长等缺点。此外, Monte Carlo 方法每次只能得到同个标的资产下的一个期权价格,无法满足非仿射随机波动率模型应用于实际期权定价的计算要求。总之,为了更好的描述资产价格的动态特征,我们有必要引入更现实的非仿射随机波动率模型。与此同时,需要寻找更为快速和有效的数值计算方法来计算非仿射随机波动率模型下的期权价格,本文,我们首先应用扰动法,将非仿射随机波动率模型的特征函数所满足的偏微分方程线性化,从而推导出特征函数的近似解析解;然后,应用傅里叶变换及其逆变换^[22],进而推导出非仿射随机波动率模型下欧式期权的拟闭型定价公式,该定价公式在数值上可以利用快速傅里叶变换(FFT)方法进行计算,并且应用 FFT 方法可以通过一次计算同时得到多个不同执行价格的欧式期权的价格,部分克服了 Monte Carlo 方法的缺点,具有较高的计算效率;继而利用 FFT 期权定价方法,我们研究了非仿射随机波动率模型隐含的“波动率微笑”;最后,采用香港金融市场上的恒生指数认购权证进行实证研究,比较了 Black-Scholes 模型和非仿射随机波动率期权定价模型的定价结果,表明了非仿射随机波动率期权定价模型的定价精确性。

2 非仿射随机波动率模型及其特征函数推导

2.1 非仿射随机波动率模型

设 S_t 是 t 时刻资产的价格, v_t 是 t 时刻资产收

益率的方差(波动率的平方),本文研究的非仿射随机波动率模型的形式如下:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1t} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma v_t^{\gamma/2} dW_{2t} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mu, \kappa, \theta, \sigma$ 和 γ 都是常数,且 κ, θ, σ 和 γ 都大于零。 θ 是资产收益率方差的长期均值, κ 是方差均值回归的速度, σ 是资产收益率方差的方差。 W_{1t} 和 W_{2t} 是两个标准的布朗运动,且相关系数 $corr(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho$ 。典型地, $\rho < 0$, 这意味着资产收益率与波动率之间存在负向相关关系,即负的收益率联系着一个波动率的增加,这代表“杠杆效应”^[23]。

从(1)中可以看到,波动率过程与 Chan 等^[24]提出的用来描述利率过程的 CEV 模型相似,因此,非仿射随机波动率模型(1)在很多文献中也被称为 CEV 模型。在非仿射随机波动率模型(1)中,对于不同的参数限定,可以得到不同的嵌套模型,例如 Heston 模型 ($\gamma = 1$) 和 Nelson^[25]提出的 GARCH 扩散模型 ($\gamma = 2$)。因此,我们研究的非仿射随机波动率模型具有较强的一般性,应用前景广泛。事实上,非仿射随机波动率模型(1)在金融计量经济学文献中已经引起了学者们的广泛关注,例如 Chacko 和 Viceira^[10], Chernov 等^[11], Jones^[12], Ait-Sahalia 和 Kimmel^[13], Chourdakis 和 Dotsis^[14], Christoffersen 等^[15-16]。

根据风险中性定价原理,为了计算期权的价格,我们需要确定风险中性概率测度下的随机过程。根据 Heston^[8]和 Jones^[12],假设方差风险溢价是方差的线性函数,即 $\lambda(S_t, v_t, t) = \lambda v_t$,则风险中性调整的非仿射随机波动率模型为:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1t}^* \\ dv_t &= \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma v_t^{\gamma/2} dW_{2t}^* \end{aligned} \quad (2)$$

其中 r 是无风险利率, $\kappa^* = \kappa + \lambda$, $\theta^* = \kappa\theta / (\kappa + \lambda)$ 。 W_{1t}^* 和 W_{2t}^* 是风险中性概率测度 P^* 下标准的布朗运动,且相关系数 $corr(dW_{1t}^*, dW_{2t}^*) = \rho$ 。

2.2 特征函数的推导

根据 Carr 和 Madan (1999)^[22],为了应用 FFT,我们需要计算风险中性概率测度下标的资产对数价格 $\ln S_T$ 的特征函数:

$$f^*(x, v, \tau; \varphi) = E^* [e^{i\varphi \ln S_T} | \ln S_t = x, v_t = v] \quad (3)$$

其中 $T \geq t, \tau = T - t, i = \sqrt{-1}, E^*[\cdot]$ 为风险中性概率测度下的期望。

给定风险中性概率测度下标的资产价格动态过程(2), 根据 Feynman-Kac 定理, 可知特征函数 $f^*(x, v, \tau; \varphi)$ 满足如下的偏微分方程

$$\frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho \sigma v^{(\gamma+1)/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v^\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (r - \frac{1}{2}v) \frac{\partial f}{\partial x} + \kappa^* (\theta^* - v) \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0 \quad (4)$$

边界条件为:

$$f^*(x, v, 0; \varphi) = e^{i\varphi \ln S_T} \quad (5)$$

显然, 方程(4)是一个非线性偏微分方程, 通常情况下我们无法获得其解析解。

下面, 我们应用扰动法^[10, 26], 使用线性偏微分方程对其进行近似。将 $v^{(\gamma+1)/2}$ 和 v^γ 在方差的长期均值 $v = \theta^*$ 处一阶泰勒近似展开, 得到:

$$v^{(\gamma+1)/2} \approx \theta^{*(\gamma+1)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \frac{\gamma+1}{2} \theta^{*(\gamma-1)/2} v \quad (6)$$

$$v^\gamma \approx \theta^{*\gamma} (1-\gamma) + \gamma \theta^{*\gamma-1} v \quad (7)$$

将(6)和(7)代入方程(4), 我们得到如下近似方程:

$$\frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho \left[\theta^{*(\gamma+1)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \frac{\gamma+1}{2} \theta^{*(\gamma-1)/2} v \right] \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left[\theta^{*\gamma} (1-\gamma) + \gamma \theta^{*\gamma-1} v \right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (r - \frac{1}{2}v) \times \frac{\partial f}{\partial x} + \kappa^* (\theta^* - v) \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0 \quad (8)$$

可以看到, 此时(8)是一个线性的偏微分方程。为了求解(8), 采用待定系数法, 假设特征函数 $f^*(x, v, t; \varphi)$ 具有如下的函数形式:

$$f^*(x, v, \tau; \varphi) = e^{C(\tau) + D(\tau)v + i\varphi x} \quad (9)$$

为了满足边界条件, 我们有:

$$C(0) = D(0) = 0 \quad (10)$$

将(9)代入方程(8), 我们有:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial D}{\partial \tau} v = \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^{*\gamma} (1-\gamma) D^2 + \left[\rho i \varphi \theta^{*(\gamma+1)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \kappa^* \theta^* \right] D + r i \varphi + \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \gamma \theta^{*\gamma-1} D^2 + \left[\rho i \varphi \frac{\gamma+1}{2} \theta^{*(\gamma-1)/2} - \kappa^* \right] D + \frac{1}{2} i \varphi (i \varphi - 1) \right] v \quad (11)$$

整理得:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^{*\gamma} (1-\gamma) D^2 +$$

$$\left[\rho i \varphi \theta^{*(\gamma+1)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \kappa^* \theta^* \right] D + r i \varphi \quad (12)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma \theta^{*\gamma-1} D^2 + \left[\rho i \varphi \frac{\gamma+1}{2} \theta^{*(\gamma-1)/2} - \kappa^* \right] D$$

$$+ \frac{1}{2} i \varphi (i \varphi - 1) \quad (13)$$

(12)和(13)是两个线性的常微分方程, 容易求得解为:

$$C(\tau) = i \varphi r \tau - \frac{1}{\gamma \theta^{*\gamma-1} \sigma^2} \left[\rho i \varphi \theta^{*(\gamma+1)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \kappa^* \theta^* \right] \times \left[2 \ln \left(\frac{2d - (d-g)(1-e^{-d\tau})}{2d} \right) + (d-g)\tau \right] + \frac{\sigma^2 \theta^{*\gamma} (1-\gamma)}{2 (\sigma^2 \gamma \theta^{*\gamma-1})^2} \left[-4g \ln \left(\frac{2d - (d-g)(1-e^{-d\tau})}{2d} \right) + \frac{(d^2 - g^2)(d-g)\tau + (d-g)^3 e^{-d\tau} \tau - 4d(d-g)(1-e^{-d\tau})}{2d - (d-g)(1-e^{-d\tau})} \right] \quad (14)$$

$$D(\tau) = \frac{2\zeta(1-e^{-d\tau})}{2d - (d-g)(1-e^{-d\tau})} \quad (15)$$

其中:

$$\zeta = -\frac{1}{2} (i \varphi + \varphi^2)$$

$$d = \sqrt{g^2 - 2\sigma^2 \zeta \gamma \theta^{*\gamma-1}}$$

$$g = \kappa^* - \rho \frac{\gamma+1}{2} \theta^{*(\gamma-1)/2} i \varphi$$

3 欧式期权定价

3.1 基于 FFT 的期权定价

根据 Carr 和 Madan^[22], 一旦得到了风险中性概率测度下标的资产对数价格分布的特征函数, 我们便可以利用傅里叶变换及其逆变换得到欧式期权的定价公式, 利用 FFT 可以实现定价公式的快速数值计算。

考虑到到期期限为 T 的欧式看涨期权, 设期权标的资产在期权到期日的即期价格为 S_T , 用 k 表示期权执行价格 K 的对数, 即 $k = \ln K$, $C_T(k)$ 表示期限为 T 、执行价格为 e^k 的看涨期权在当前时刻的理论价格。假设时刻 T 标的资产价格 S_T 的对数 $s_T = \ln S_T$ 在风险中性概率测度下的分布密度函数为 $q_T(s)$ 。根据风险中性定价原理, 欧式看涨期权的价格为:

$$C_T(k) = e^{-rT} \int_k^\infty (e^s - e^k) q_T(s) ds \quad (16)$$

然而, 考虑到 $C_T(k)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上不是平方可积的, Carr 和 Madan^[22] 定义了如下调整的看涨期权价格:

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k) \quad (17)$$

其中 $\alpha > 0$ 是阻尼因子。对 $c_T(k)$ 作傅里叶变换:

$$\psi_T(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi k} c_T(k) dk \quad (18)$$

将(16)和(17)代入(18), 我们有:

$$\begin{aligned} \psi_T(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi k} e^{ak} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^s - e^k) q_T(s) ds dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_{-\infty}^s (e^{s+ak} - e^{(\alpha+1)k}) e^{i\xi k} dk ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left[\frac{e^{(\alpha+1+i\xi)s}}{\alpha+i\xi} - \frac{e^{(\alpha+1+i\xi)s}}{\alpha+1+i\xi} \right] ds \\ &= \frac{e^{-rT} f^*(x, v, T; \varphi = \xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \end{aligned} \quad (19)$$

其中 f^* 是风险中性概率测度下标的资产对数价格 $s_T = \ln S_T$ 的特征函数。

从而, 通过傅里叶逆变换我们可以得到欧式看涨期权的价格:

$$\begin{aligned} C_T(k) &= \frac{e^{-ak}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \psi_T(\xi) d\xi \\ &= \frac{e^{-ak}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\xi k} \psi_T(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (20)$$

对积分(20)使用数值积分的复合梯形公式, 我们有:

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-ak_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{i\theta\xi_j} \psi_T(\xi_j) \eta \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_j &= \eta(j-1) \\ k_u &= -b + \frac{2b}{N}(u-1) \\ b &= \frac{N\lambda}{2} \\ \lambda\eta &= \frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

事实上, 期权定价公式(21)的精确性还可以进一步改进, 对(20)使用复合 Simpson 公式, 我们得到欧式看涨期权的价格为:

$$\begin{aligned} C_T(k_u) &\approx \frac{e^{-ak_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{i\theta\xi_j} \times \psi_T(\xi_j) \frac{\eta}{3} \\ &+ (-1)^j - \delta_{j-1} \end{aligned} \quad (22)$$

其中 δ_n 是 Kronecker- δ 函数, 即:

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

显然, 在数值计算上, (22)可以直接应用 FFT 进行计算。

3.2 数值实验

下面, 我们讨论 FFT 期权定价方法的定价精确性。FFT 期权定价算法采用 MATLAB 软件编程, 在 Intel Core2 1.79 GHz 计算机上实现。为比较起见, 我们采用 Monte Carlo 方法作为基准。根据风险中性定价方法, 到期期限为 T 、执行价格为

K 的欧式看涨期权的价格为:

$$C = e^{-rT} E^* [\max\{S_T - K, 0\}] \quad (23)$$

其中 $E^*[\cdot]$ 是风险中性概率测度下的期望。从而, 欧式看涨期权价格的 Monte Carlo 估计为:

$$\tilde{C} = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max\{S_T^{(i)} - K, 0\} \quad (24)$$

其中 M 是标的资产价格路径模拟数目。

为了实际应用 FFT 期权定价方法, 我们需要确定参数 η , N 和 α 。我们设定 $\eta = 0.25$ 和 $N = 4096$, 相应的对数执行价格的间隔为 $8\pi/4096 \approx 0.0061$, 这对于实际应用已经足够。对于阻尼因子 α , 我们设为 $\alpha = 3$ 。其它参数为 $\kappa = 10$, $\theta = 0.2$, $\sigma = 0.7$, $\rho = -0.5$, $\gamma = 2$, $\lambda = 0$, $v_0 = 0.2$, $r = 5\%$, $T = 1$, $S_0 = 1$ 。我们使用 FFT 期权定价方法计算看涨期权的价格, 然后将其与用 $M = 50000$ 抽样路径得到的 Monte Carlo 估计结果进行比较。表 1 给出了 FFT 期权定价的结果。可以看到, FFT 期权定价方法的绝对百分误差 ($|PE|$) 没有超过 1.6%, 表明 FFT 期权定价方法是非常精确的。而且, 在数值实验中, 我们发现 FFT 期权定价方法计算 4096 个对应不同执行价格的期权价格只需大约 0.03 秒, 而 Monte Carlo 模拟计算一个期权价格需要大约 12 秒, FFT 期权定价方法的计算速度比 Monte Carlo 模拟方法快 400 倍。实际应用中往往需要同时计算多个不同执行价格下的期权价格, 和 Monte Carlo 模拟相比, 显然 FFT 期权定价方法具有更高的计算效率和更快的计算速度。

表 1 看涨期权价格: FFT vs. Monte Carlo

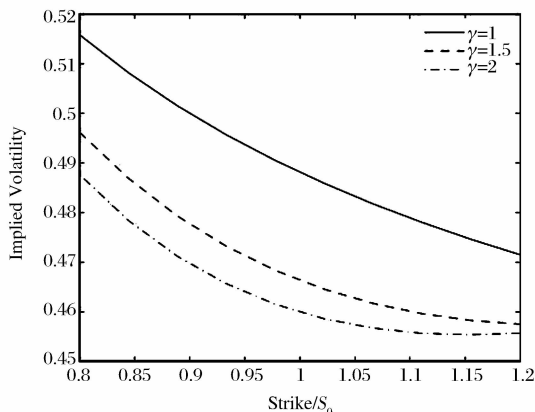
| 执行价格 | FFT | Monte Carlo | PE (%) |
|------|--------|----------------|---------|
| 0.3 | 0.7204 | 0.7159(0.0021) | 0.6288 |
| 0.4 | 0.6124 | 0.6222(0.0021) | -1.5736 |
| 0.5 | 0.5334 | 0.5319(0.0020) | 0.2816 |
| 0.6 | 0.4504 | 0.4474(0.0020) | 0.6652 |
| 0.8 | 0.3004 | 0.3038(0.0018) | -1.1194 |
| 1 | 0.1975 | 0.1978(0.0016) | -0.1362 |
| 1.2 | 0.1252 | 0.1253(0.0013) | -0.1259 |
| 1.4 | 0.0780 | 0.0780(0.0011) | -0.1007 |
| 1.6 | 0.0480 | 0.0482(0.0009) | -0.3768 |
| 1.8 | 0.0299 | 0.0296(0.0007) | 0.9756 |

注: 百分误差 $PE = (P_{FFT} - P_{MC})/P_{MC}$, 其中 P_{FFT} 和 P_{MC} 分别表示采用 FFT 期权定价方法和 Monte Carlo 模拟计算的结果。括号里是 Monte Carlo 估计的标准误差(Standard error)。

3.3 隐含波动率

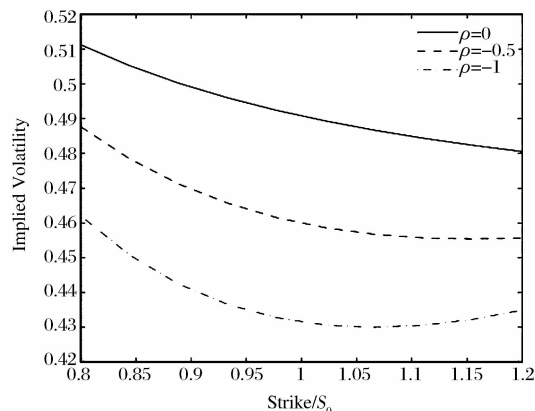
快速和精确的 FFT 期权定价方法允许我们进

一步研究非仿射随机波动率模型隐含的“波动率微笑”。图 1 和图 2 分别显示了不同的 γ 值 ($\gamma = 1, 1.5$ 和 2) 和相关系数 ρ 值 ($\rho = 0, -0.5$ 和 -1) 对隐含波动率曲线的影响。可以看到,随着 γ 或者负相关性的增加,隐含波动率都有很明显的下降趋势。



注:其它参数为 $\kappa=10, \theta=0.2, \sigma=0.7, \rho=-0.5, \lambda=0, v_0=0.2, r=5\%, T=1, S_0=1$ 。

图 1 对应于不同 γ 值下的隐含波动率曲线



注:其它参数为 $\kappa=10, \theta=0.2, \sigma=0.7, \gamma=2, \lambda=0, v_0=0.2, r=5\%, T=1, S_0=1$ 。

图 2 对应于不同 ρ 值下的隐含波动率曲线

4 实证研究

在期权定价模型的实际应用中,模型的参数估计一直是一个难点。通常,我们可以采用两种不同的估计方法:第一种是采用标的资产价格历史数据进行估计;第二种是采用期权价格数据估计市场隐含的模型参数。在第一种方法中,我们只能得到客观概率测度下的模型参数,而期权市场中的投资者更加关心市场期权价格数据中所隐含的模型参数(风险中性参数)。由于本文估计模型参数的主要目

的是为了定价,因此,我们采用第二种方法来估计模型参数。

在非仿射随机波动率模型中,有 6 个参数需要估计: $\kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho, \gamma$ 和 v_0 ,我们将通过求解如下的最小化问题来确定模型参数:

$$\min_{\Theta} \sum_{i=1}^N (C_i^{\Theta}(K_i, T_i) - C_i^M(K_i, T_i))^2 + p(\Theta, \Theta_0) \quad (25)$$

其中 $\Theta = (\kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho, \gamma, v_0)$ 是参数向量, Θ_0 是参数向量的初值, $C_i^{\Theta}(K_i, T_i)$ 和 $C_i^M(K_i, T_i)$ 分别表示执行价格为 K_i 、到期日为 T_i 的期权模型价格与市场价格, $p(\Theta, \Theta_0)$ 是一个罚函数。根据 Mikhailov 和 Nogel^[27], 本文我们取罚函数为 $p(\Theta, \Theta_0) = ||\Theta - \Theta_0||^2$ 。

可以看到,在最小化问题(25)中,我们需要计算权证的模型价格 C_i^{Θ} ,快速和精确的 FFT 期权定价方法为我们提供了一个非常有利的工具。最小化问题(25)可以通过不同的算法进行求解,例如模拟退火算法(simulated annealing, SA),自适应模拟退火算法(adaptive simulated annealing, ASA),Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) 算法,以及 Nelder-Mead 单纯形算法等。考虑到即使是在 B-S 模型下, C_i^{Θ} 是参数的非线性函数,最小化问题(25)的目标函数不一定是关于模型参数的凸函数,因此,为了避免陷入局部最优解,我们需要采用能得到全局最优解的算法。本文中我们采用 ASA 算法,它是一个全局最优化算法,可以得到模型参数的一个全局最优解。

我们采用 2011 年 3 月 3 日香港金融市场上的恒生指数认购权证数据估计非仿射随机波动率模型参数。数据来源于香港交易所(HKEX),包括 12 个不同到期日的 172 支权证(每个到期日包含不同的执行价的权证)。取参数向量的初值为 $\Theta_0 = (5, 0.5, 1, -0.5, 2.5, 0.1)$,采用 ASA 算法求解最小化问题(25),得到模型参数估计见表 2。从表 2 可以看到,恒生指数方差的长期均值为 $\theta^* = 0.0997$,相当于年化波动率约为 31.58%,方差均值回归的速度为 $\kappa^* = 0.6143$,杠杆效应参数 ρ 值为 -0.5934 ,它是一个负值,说明恒生指数收益率与波动率过程存在显著的负向相关关系,即杠杆效应。特别地,得到 γ 参数的估计值为 1.4711,显然它与仿射 Heston 模型对应的 γ 值 $\gamma = 1$ 不同。

表 2 非仿射随机波动率模型的参数估计结果

| κ^* | θ^* | σ | ρ | γ | v_0 |
|------------|------------|----------|---------|----------|--------|
| 0.6143 | 0.0997 | 1.9947 | -0.5934 | 1.4711 | 0.0394 |

进一步,为了评价模型的性能,我们采用 2011 年 3 月 4 日的恒生指数认购权证数据进行实证研究。通过比较非仿射随机波动率期权定价模型和经典的 Black-Scholes 模型的定价结果与实际观测到的市场价格的误差程度来反映模型的性能。采用香港银行间一年期同业拆借利率(HIBOR)作为无风险利率,得到考察日的无风险利率为 $r = 0.64714\%$,标的资产恒生指数价格为 $S_0 = 23408.86$ 。采用非仿射随机波动率期权定价模型和 Black-Scholes 模型计算所得结果如表 3 所示。可以看到,基于非仿射随机波动率期权定价模型计算的权证价格与权证的实际价格非常接近,其绝对百分定价误差($|PE|$)在 3% 以内。与 B-S 模型的结果表明,基于非仿射随机波动率期权定价模型的权证定价效果明显优于 B-S 模型。

表 3 恒生指数认购权证的定价结果

| 权证名称 | $T-t$ (年) | P_{BS} (港元) | P_{SV} (港元) | P_{Actual} (港元) | PE_{BS} (%) | PE_{SV} (%) |
|---------------|--------------|------------------|------------------|----------------------|------------------|------------------|
| 恒指美林 二零五 D | 0.2384 | 0.0597 | 0.0591 | 0.0590 | 1.2110 | 0.2228 |
| 恒指比联 二零六 I | 0.3205 | 0.1752 | 0.1649 | 0.1610 | 8.8048 | 2.4088 |
| 恒指汇丰 二零六 D | 0.3205 | 0.1370 | 0.1309 | 0.1320 | 3.7909 | -0.8615 |
| 恒指野村 二零六 A | 0.3205 | 0.0989 | 0.1080 | 0.1060 | -6.7276 | 1.8776 |
| 恒指荷合 二零六购 | 0.3205 | 0.1370 | 0.1309 | 0.1310 | 4.5832 | -0.1048 |

注: P_{BS} 和 P_{SV} 分别表示采用 Black-Scholes 模型和非仿射随机波动率期权定价模型计算的结果, P_{Actual} 表示权证的实际市场价格。 PE_{BS} 和 PE_{SV} 分别表示 Black-Scholes 模型和非仿射随机波动率期权定价模型的百分定价误差。

5 结语

目前,随机波动率模型下的期权定价问题已经成为学者们研究的热点。然而,已有的研究主要集中于仿射随机波动率模型(例如 Heston 模型),主要是因为仿射随机波动率模型下普通欧式期权价格存在闭型解,这给实际应用带来很大的方便。然而,最近越来越多的研究表明,非仿射随机波动率模型比仿射随机波动率模型能够更好的描述资产价格运动。基于此,本文探讨了非仿射随机波动率模型下的期权定价问题。通过分别应用扰动法和傅里

叶变换及其逆变换,得到了非仿射随机波动率模型下标的资产对数价格分布的近似特征函数和欧式期权的拟闭型定价公式。该定价公式在数值上可以用 FFT 方法进行计算。数值实验表明,FFT 期权定价方法是非常精确的和有效的。最后,采用香港金融市场上的恒生指数认购权证的数据进行了实证研究,结果表明非仿射随机波动率期权定价模型比经典的 Black-Scholes 模型具有更高的定价精确性。

参考文献:

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] Black F. Studies of stock price volatility changes [C]. Proceedings of the 1976 Meeting of Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, 1976.
- [3] Christie A A. The stochastic behavior of common stock variances: value, leverage, and interest rate effects[J]. Journal of Financial Economics, 1982, 10(4): 407-432.
- [4] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1-2): 145-166.
- [5] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1-2): 125-144.
- [6] Hull J C, White A D. The pricing of options on asset with stochastic volatilities [J]. Journal of Finance, 1987, 42(2): 281-300.
- [7] Stein E M, Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach[J]. Review of Financial Studies, 1991, 4: 727-752.
- [8] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options [J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327-343.
- [9] Andersen T G, Benzoni L, Lund J. Estimating jump-diffusions for equity returns[J]. Journal of Finance, 2002, 57: 1239-1284.
- [10] Chacko G, Viceira L. Spectral GMM estimation of continuous-time processes [J]. Journal of Econometrics, 2003, 116: 259-292.
- [11] Chernov M, Gallant A R, Ghysels E, Tauchen G. Alternative models for stock price dynamics [J]. Journal of Econometrics, 2003, 116: 225-257.
- [12] Jones C. The dynamics of stochastic volatility: evidence from underlying and options markets [J]. Journal of Econometrics, 2003, 116: 181-224.

- [13] Ait-Sahalia Y, Kimmel R. Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models[J]. *Journal of Financial Economics*, 2007, 83: 413–452.
- [14] Chourdakis K. Non-affine option pricing [J]. *Journal of Derivatives*, 2004, 11(3): 10–25.
- [15] Christoffersen P, Jacobs K, Mimouni K. An empirical comparison of affine and non-affine models for equity index options [R]. Working Paper, 2006.
- [16] Christoffersen P, Jacobs K, Mimouni K. Volatility dynamics for the S&P 500: evidence from realized volatility, daily returns, and option prices[J]. *Review of Financial Studies*, 2010, 23(8): 3141–3189.
- [17] Durham G B. Risk-neutral modelling with affine and non-affine models [R]. Working Paper, 2010.
- [18] Hansis A. Affine versus non-affine stochastic volatility and the impact on asset allocation [R]. Working Paper, 2010.
- [19] Ignatieva K, Rodrigues P J M, Seeger N. Stochastic volatility and jumps: exponentially affine yes or no? an empirical analysis of S&P 500 dynamics[R]. Working Paper, 2009.
- [20] Chourdakis K, Dotsis G. Maximum likelihood estimation of non-affine volatility processes [J]. *Journal of Empirical Finance*, 2011, 18(3): 533–545.
- [21] Drimus G G. Options on realized variance by transform methods; a non-affine stochastic volatility model[J]. *Quantitative Finance*, forthcoming, 2012.
- [22] Carr P, Madan D. Option valuation using the fast Fourier transform[J]. *Journal of Computational Finance*, 1999, 2: 61–73.
- [23] Yu Jun. On leverage in a stochastic volatility model [J]. *Journal of Econometrics*, 2005, 127: 165–178.
- [24] Chan K C, Karolyi G A, Longstaff F A, et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate[J]. *Journal of Finance*, 1992, 47(3): 1209–1227.
- [25] Nelson D B. ARCH models as diffusion approximations [J]. *Journal of Econometrics*, 1990, 45: 7–38.
- [26] Kevorkian J, Cole J D. Perturbation methods in applied mathematics[M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [27] Mikhailov S, Nogel U. Heston's stochastic volatility model implementation, calibration and some extensions [M]//Wilmott P. *The best of Wilmott*. Chichester: John Wiley & Sons, 2005.

Option Pricing under Non-Affine Stochastic Volatility Model

WU Xin-yu¹, YANG Wen-yu², MA Chao-qun², WANG Shou-yang³

(1. School of Finance, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233030, China;

2. School of Business Administration, Hunan University, Changsha 410082, China;

3. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: By applying the fast Fourier transform (FFT) method, the problem of option pricing when the underlying asset follows the non-affine stochastic volatility models is considered in this paper. Firstly, by utilizing a perturbation method to the partial differential equation of the characteristic function for the underlying log-asset price, an approximate solution for the characteristic function is derived. Then, a quasi-analytical approximate formula for European options is attained by means of Fourier transform and its inverse. This formula is easy to implement and can be accurately and quickly computed by the FFT algorithm. Numerical examples show that the FFT-based option pricing method is very accurate and efficient. Finally, an empirical study of call warrants on Hang Seng index is presented. Empirical results demonstrate that the non-affine stochastic volatility option pricing model is more accurate than the classical Black-Scholes model.

Key words: option pricing; non-affine stochastic volatility; fast Fourier transform; perturbation method