第 35 卷 第 3 期 应用数学学报 Vol. 35 No. 3
2012 年 5 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA May, 2012

证券组合有效子集的统计推断 *

蒋春福

(深圳大学数学与计算科学学院，深圳 518060)

(E-mail: jiangcf@szu.edu.cn)

彭泓毅

(华南农业大学理学院，广州 510642)

(E-mail: penghyi@yahoo.com.cn)

摘　要　本文在奇异协方差阵下研究了证券组合有效子集的统计推断，得到了有效子集的一些新的判定条件，并导出了相应的检验统计量及其渐近性质，同时通过对有效子集假设检验问题及其检验统计量进行分解，本文还给出了相关检验统计量的一些经济含义．最后，为验证本文结果，我们还给出了一些随机模拟和实证分析的例子.

关键词　证券组合；有效子集；统计推断

MR(2000) 主题分类　62P05

中图分类　O29; F224

1　引言

对于 Markowitz 问题的研究，以往的文献大都假定协方差阵为正定，但是随着资产种类的增加和金融衍生产品的大量涌现，必然会出现协方差阵奇异的情况．此外，当考虑大规模投资组合问题时，也会出现协方差奇异的情形． Szegö[1] 曾猜想当协方差阵的秩小于 $n-1$ 时证券市场要么存在套利，要么存在有效子集，即存在冗余证券. Markowitz[2] 也曾指出，当考虑大规模投资组合问题时，我们不能要求协方差阵为正定，因为此时可能存在证券组合的有效子集．我国学者姚海祥等 [3] 对奇异协方差阵下组合前沿的特征进行了分析，史树中和杨杰 [4] 指出协方差阵奇异时有可能存在有效子集，还给出了判定证券子集是否为有效子集的充要条件．在 [5] 中我们给出了证券组合有效子集的一个等价定义，并得到了奇异协方差阵下证券组合有效子集存在及判定的充分

本文 2010 年 12 月 2 日收到．2011 年 4 月 11 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (71101095) 和广东省自然科学基金 (2008276) 资助项目

必要条件. 此外, 王金才等 [6] 在 [4] 给定的有效子集意义下, 给出了证券组合有效子集的逐个判别搜索算法.

与证券组合有效子集相关联的是传统的 "共同基金分离定理", 即对于给定的 n 种证券构成的证券全集, 是否存在它的 k 种基金组合可以张成 (spanning) 资产集的所有组合. 如果这个问题有非平凡解, 即 $k < n$, 那么就可以通过引入 k 种基金来简化证券集, 剔除冗余信息. 这一问题具有重要的应用价值, 比如, 增加一些新的证券能否改善投资业绩, 给定的定价因子能否生成整个市场的收益率等. 关于这些问题的研究, 最早是 Huberman 和 Kandel[7] 提出 "均值 - 方差张成" (mean-variance spanning) 的概念, 并得到了广泛的应用. 最近 Cheung 等 [8] 研究了均值 - 方差张成的性质, Glabadanidis[9] 研究了均值 - 方差张成的经济意义. 目前我国学界对这一问题研究较少, 主要有吴国清和周远航 [10] 利用均值 - 方差张成研究了规模组合和因子定价问题, 李传乐 [11] 借助两基金分离定理, 在 HJ 随机折现因子 (即 Hansen 和 Jagannathan[12] 提出的最小方差随机折现因子) 框架下得到了一些张成条件.

目前关于证券组合有效子集及均值 - 方差张成的研究均存在一些应用上的问题, 比如在上述关于证券组合有效子集的研究中, [4–6] 得到的有效子集的判定条件及搜索算法等都是用期望收益向量和协方差阵的秩表示的, 然而由于计算精度的问题, 这些判定条件在实际应用通常是无效的, 此外, 这种判定方法还没有考虑参数估计的风险. 均值 - 方差张成虽然考虑了参数估计的风险问题, 然而相关研究均是在协方差阵正定的条件下进行的, 当出现协方差阵奇异时, 我们发现其检验条件既不是充分条件, 也不是必要条件. 为了弥补上述这些缺陷, 本文在奇异协方差阵下研究有效子集的存在条件及统计检验方法, 得到了一些新的有效子集判定条件, 并利用这些条件导出了有效子集假设检验问题的分解及相关检验统计量的渐近性质.

本文第 2 节将给出证券组合有效子集的数学表述, 第 3 节将导出有效子集的一些新的判定条件, 并给出一些经济解释, 第 4 节从统计推断的角度研究有效子集的统计检验问题, 第 5 节给出了一些随机模拟和实证的例子, 最后一节是结语.

2 证券组合有效子集问题的描述

设 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为投资者所考虑的全部 n 种证券 (风险或无风险的) 组成的集合, 并称之为证券全集, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)'$ 为 n 种证券的收益率向量, 其中 r_i 表示第 i 种证券的收益率; $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)'$ 为 n 种证券的期望收益率向量, 这里 $\mu_i = \mathrm{E}(r_i)$ 为第 i 种证券的期望收益率; $V = \mathrm{Var}(\boldsymbol{r})$ 为收益率向量 $\boldsymbol{r}$ 的协方差阵. 称 n 种证券上的投资比例向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)'$ 为证券组合, 这里 ω_i 为第 i 种证券上的投资比例, 满足 $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$. 证券全集 S_n 上的证券组合全体记为

$$W = \big\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)' \in \mathbb{R}^n \mid \omega'\mathbf{1} = 1\big\}, \tag{2.1}$$

其中 $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)'$. 设 $\omega \in W$ 为 S_n 上的任一证券组合, 用 $r_\omega = \boldsymbol{r}'\omega$ 表示证券组合的收益率, $\mu_\omega = \mu'\omega$ 表示证券组合的期望收益率, $\sigma_\omega^2 = \omega' V \omega$ 表示证券组合的风险.

Markowitz 的基本问题就是在给定收益下使组合风险最小，或者等价地，在给定风险下使组合收益最大. 证券全集上的 Markowitz 基本问题可描述为如下的均值 - 方差模型

$$\begin{cases} \min & \sigma_\omega^2 = \omega' V \omega, \\ \text{s.t.} & \omega' \mathbf{1} = 1, \\ & \omega' \mu = r_p. \end{cases} \tag{2.2}$$

模型 (2.2) 的解称为称之为前沿组合，前沿组合的全体在其风险 - 收益平面上的点集称为组合前沿. 组合前沿在 “收益大，风险小” 半序下的点集称为有效前沿，有效前沿所对应的组合称为有效证券组合，简称有效组合.

熟知，证券全集上的有效组合在证券子集上未必仍然有效，那么自然地我们要问：是否存在这样的证券子集，使得其上的有效组合在证券全集中仍然有效？如果有的话，又如何判断和检验？为把这些问题形式化，设 $S_k \subset S_n$ 为任一含有 k 种证券的子集，不妨假定 $S_k = \{1, 2, \cdots, k\}$, 并记 $S_{n-k} = S_n \setminus S_k = \{k+1, k+2, \cdots, n\}$. 证券子集 S_k 的证券组合全体记为

$$W^{(k)} = \left\{ \omega^{(k)} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)' \in \mathbb{R}^{(k)} \,\middle|\, (\mathbf{1}_k)' \omega^{(k)} = 1 \right\}, \tag{2.3}$$

其中 $\mathbf{1}_k$ 为 k 维元素全为 1 的列向量. 与划分 $S_n = S_k \cup S_{n-k}$ 相对应，对收益率向量进行分块

$$\boldsymbol{r} = \left((\boldsymbol{r}^{(k)})', (\boldsymbol{r}_{(n-k)})' \right)',$$

这里 $\boldsymbol{r}^{(k)} = (r_1, r_2, \cdots, r_k)'$, $\boldsymbol{r}_{(n-k)} = (r_{k+1}, r_{k+2}, \cdots, r_n)'$ 分别为 $\boldsymbol{r}$ 的前 k 维子向量和后 $n-k$ 维子向量，并记 $\mu^{(k)} = \mathrm{E}(\boldsymbol{r}^{(k)})$, $\mu_{(n-k)} = \mathrm{E}(\boldsymbol{r}_{(n-k)})$.

类似地，对协方差阵 V 也进行相应的分块

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $V_{11} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{r}^{(k)})$, $V_{22} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{r}_{(n-k)})$, $V_{12} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}_{(n-k)})$, $V_{21} = V_{12}'$.

称 S_k 为 S_n 的 **有效子集** 是指对任意 $\omega \in W$, 总存在 $\omega^{(k)} \in W^{(k)}$, 使得

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{r}'\omega) \le \mathrm{E}((\boldsymbol{r}^{(k)})'\omega^{(k)}), \qquad \mathrm{Var}(\boldsymbol{r}'\omega) \ge \mathrm{Var}((\boldsymbol{r}^{(k)})'\omega^{(k)}).$$

在均值 - 方差意义下，S_k 为 S_n 的有效子集等价于 S_k 与 S_n 有相同的组合前沿和有效前沿，也就是说证券全集 S_n 生成的组合前沿可由 S_k 张成，从而 S_{n-k} 包含的证券成为冗余证券. 因此，若 S_n 存在有效子集 S_k, 那么对于投资者来说，选择投资在 S_k 上可节省一些交易费用.

在上述关于证券组合有效子集的定义下，史树中和杨杰 [5] 得到了判定证券子集 S_k 为 S_n 的有效子集的充要条件是

$$\mathrm{Rank}\,[\,V_{11} \quad \mathbf{1}_k \quad \mu^{(k)}\,] = \mathrm{Rank} \begin{bmatrix} V_{11} & \mathbf{1}_k & \mu^{(k)} \\ V_{21} & \mathbf{1}_{n-k} & \mu_{(n-k)} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

然而，需要指出的是，由于模型参数估计风险问题，上述条件在实际中很难应用．本文我们将研究证券组合有效子集的等价条件，并进一步分析有效子集的统计推断方法．

由于下文需要，我们在这里说明一些记号的含意．对于给定的矩阵 A, $\mathcal{M}(A)$ 表示由 A 的列向量张成的线性空间， A^- 表示 A 的广义逆，即 A^- 满足 $AA^-A=A$; A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 逆，即 A^+ 满足： $AA^+A=A$, $A^+AA^+=A^+$, $(AA^+)'=AA^+$, $(A^+A)'=A^+A$.

3 证券组合有效子集的新的判定条件

根据有效子集的定义可知， S_k 为 S_n 的有效子集等价于证券子集 S_k 上的有效组合在证券全集中仍然是有效组合．为此我们考虑如下带有约束的证券组合选择问题

$$\begin{cases} \min & \sigma_\omega^2=\omega' V\omega, \\ \text{s.t.} & \omega'\mu=r_p, \\ & \omega'\mathbf{1}=1, \\ & \omega_{(n-k)}=0. \end{cases} \tag{3.1}$$

这里 $\omega_{(n-k)}$ 为投资者在证券子集 S_{n-k} 上的投资权重向量．模型 (3.1) 实际是一种特殊仿射约束下的证券组合选择问题．显然，在这种约束条件下的有效组合在证券全集 S_n 中未必仍是有效的 [13]．为对模型 (3.1) 进行求解，作如下变换

$$v=\begin{bmatrix} v^{(k)} \\ v_{(n-k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & V_{11}^-V_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega^{(k)} \\ \omega_{(n-k)} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

其中 I 为适当阶数的单位矩阵．再引入记号：

$$V_{22.1}=V_{22}-V_{21}V_{11}^-V_{12}, \qquad \mu_{2.1}=\mu_{(n-k)}-V_{21}V_{11}^-\mu^{(k)}, \qquad \mathbf{1}_{2.1}=\mathbf{1}_{n-k}-V_{21}V_{11}^-\mathbf{1}_k,$$

则不难得到

$$\omega' V\omega=\left(v^{(k)}\right)'V_{11}v^{(k)}+(v_{(n-k)})'V_{22.1}v_{(n-k)}, \qquad \omega'\mu=\left(v^{(k)}\right)'\mu^{(k)}+(v_{(n-k)})'\mu_{2.1}. \tag{3.3}$$

由 (3.3) 可知，模型 (3.1) 等价于

$$\begin{cases} \min & \left(v^{(k)}\right)'V_{11}v^{(k)}, \\ \text{s.t.} & \left(v^{(k)}\right)'\mu^{(k)}=r_p, \\ & \left(v^{(k)}\right)'\mathbf{1}_k=1. \end{cases} \tag{3.4}$$

模型 (2.2) 等价于

$$\begin{cases} \min & \left(v^{(k)}\right)'V_{11}v^{(k)}+\left(v_{(n-k)}\right)'V_{22.1}v_{(n-k)}, \\ \text{s.t.} & \left(v^{(k)}\right)'\mu^{(k)}+(v_{(n-k)})'\mu_{2.1}=r_p, \\ & \left(v^{(k)}\right)'\mathbf{1}_k+(v_{(n-k)})'\mathbf{1}_{2.1}=1. \end{cases} \tag{3.5}$$

对于模型 (3.4) 的求解，通过构造拉格朗日函数可得如下方程

$$V_{11}v^{(k)}-\frac{1}{\lambda}\mu^{(k)}-\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{1}_k=0, \tag{3.6}$$

$$(v^{(k)})'\mu^{(k)}=r_p, \tag{3.7}$$

$$(v^{(k)})'\mathbf{1}_k=1. \tag{3.8}$$

类似地，对于模型 (3.5), 通过构造拉格朗日函数可得如下方程

$$V_{11}v^{(k)}-\frac{1}{\lambda}\mu^{(k)}-\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{1}_k=0, \tag{3.9}$$

$$V_{22.1}v_{(n-k)}-\frac{1}{\lambda}\mu_{2.1}-\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{1}_{2.1}=0, \tag{3.10}$$

$$(v^{(k)})'\mu^{(k)}+(v_{(n-k)})'\mu_{2.1}=r_p, \tag{3.11}$$

$$(v^{(k)})'\mathbf{1}_k+(v_{(n-k)})'\mathbf{1}_{2.1}=1. \tag{3.12}$$

由于本文中我们对 V 的秩没作任何限制，即 $V\geq 0$, 从而也无需对风险证券和无风险证券进行分别讨论．显然此时有可能存在满足 $V\pi=0$ 的证券组合，我们称这样的证券组合 π 为零风险组合，零风险组合的全体记为 W_f, 即

$$W_f=\big\{\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)'\in\mathbb{R}^n\mid \pi'\mathbf{1}=1,\ V\pi=0\big\}.$$

在无套利假设下，零风险组合的收益率均相同，即为一个常数，否则将存在套利机会. 特别地，若 S_n 中包含收益率为 r_f 的无风险证券，则对任一零风险组合 $\pi\in W_f$, 有 $\mu_\pi=\mu'\pi=r_f$ 成立．关于零风险组合，由 [14] 我们有如下两个引理.

引理 3.1 对于模型 (2.2), 若 $\mathbf{1}\notin\mathcal{M}(V)$, 则零风险组合全体 W_f 可表示为

$$W_f=\Big\{\pi\in\mathbb{R}^n\Big|\,\pi=\frac{P^\perp\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}+\Big(P^\perp-\frac{P^\perp\mathbf{1}\mathbf{1}'P^\perp}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}\Big)\xi,\ \xi\in\mathbb{R}^n\Big\},$$

且任给零风险组合 $\pi\in W_f$ 都有

$$\mu_\pi=\frac{\mu'P^\perp\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}, \tag{3.13}$$

其中 $P^\perp=I-VV^+$.

引理 3.2 对于模型 (2.2), 不存在套利组合当且仅当以下两个之一成立

(i) $\mathbf{1}\in\mathcal{M}(V),\mu\in\mathcal{M}(V)$;

(ii) $\mathbf{1}\notin\mathcal{M}(V)$, 且任给 $\pi\in W_f$ 有 $\mu-\mu_\pi\mathbf{1}\in\mathcal{M}(V)$.

定理 3.1 假设市场无套利，且不存在常数使得 $\mu=c\mathbf{1}$, 那么 S_k 为 S_n 的有效子集的充分必要条件是对 S_k 上的任意有效组合 $\omega^{(k)}$, 都有

$$\eta_{2.1}=\mu_{2.1}-\mu_{zcp}\mathbf{1}_{2.1}=0, \tag{3.14}$$

其中 μ_{zcp} 为 $\omega^{(k)}$ 的零协方差对偶组合的期望收益率.

证 **必要性** 由引理 3.2 可知，在无套利假设下上述问题需要分两种情形进行讨论.

(1) 若 $\mathbf{1} \in \mathcal{M}(V)$, $\mu \in \mathcal{M}(V)$, 设 $\omega^{(k)}$ 为 S_k 上的任一有效组合，令 $\omega_{(n-k)} = 0$, 则由 (3.2) 可得 $v^{(k)} = \omega^{(k)}$. 另一方面，由于 $\omega^{(k)}$ 为有效组合，因此存在 λ, λ_1 使得 (3.6) 成立，从而有

$$v^{(k)} = \frac{1}{\lambda} V_{11}^{-} \mu^{(k)} + \frac{1}{\lambda_1} V_{11}^{-} \mathbf{1}_k, \tag{3.15}$$

其中 V_{11}^{-} 为 V_{11} 的广义逆. 将 (3.15) 代入到 (3.7) 和 (3.8) 可求得

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{C_k - B_k r_p}{A_k C_k - B_k^2}, \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{A_k r_p - B_k}{A_k C_k - B_k^2}, \tag{3.16}$$

其中 $A_k = \mathbf{1}_k' V_{11}^{-} \mathbf{1}_k$, $B_k = \mathbf{1}_k' V_{11}^{-} \mu^{(k)}$, $C_k = (\mu^{(k)})' V_{11}^{-} \mu^{(k)}$.

将 (3.16) 代入到 (3.15) 可得

$$v^{(k)} = \frac{1}{\lambda} V_{11}^{-} (\mu^{(k)} - \mu_{zcp} \mathbf{1}_k), \tag{3.17}$$

其中

$$\mu_{zcp} = -\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{C_k - B_k r_p}{B_k - A_k r_p}$$

表示与有效组合 $\omega^{(k)}$ 形成对偶的前沿组合 $\omega_{zcp}^{(k)}$ 的期望收益率，即满足 $\mathrm{Cov}(r_p, r_{zcp}) = 0$, 这里 $r_p = (\omega^{(k)})' \boldsymbol{r}^{(k)}$, $r_{zcp} = (\omega_{zcp}^{(k)})' \boldsymbol{r}^{(k)}$. 通常称 $\omega_{zcp}^{(k)}$ 为 $\omega^{(k)}$ 的零协方差对偶组合，显然 $\mu_{zcp} = \mathrm{E}(r_{zcp})$ 为零协方差对偶组合的期望收益率.

另一方面，注意到 $\mathbf{1} \in \mathcal{M}(V), \mu \in \mathcal{M}(V)$ 还蕴含着 $\mathbf{1}_{2.1} \in \mathcal{M}(V_{22.1}), \mu_{2.1} \in \mathcal{M}(V_{22.1})$. 因此由方程 (3.10), 可类似地得到

$$v_{(n-k)} = \frac{1}{\lambda} V_{22.1}^{-} (\mu_{2.1} - \mu_{zcp} \mathbf{1}_{2.1}).$$

若 S_k 为 S_n 的有效子集，那么必然有

$$\eta_{2.1} = \mu_{2.1} - \mu_{zcp} \mathbf{1}_{2.1} = 0. \tag{3.18}$$

(2) 若 $\mathbf{1} \notin \mathcal{M}(V)$, 且任给 $\pi \in W_f$, 有 $\mu - \mu_\pi \mathbf{1} \in \mathcal{M}(V)$. 此时对于证券子集 S_k, 在无套利假设下仍存在两种情况：

(i) $\mu^{(k)} \in \mathcal{M}(V_{11})$, $\mathbf{1}_k \in \mathcal{M}(V_{11})$;

(ii) $\mathbf{1}_k \notin \mathcal{M}(V_{11})$, 且任给 $\pi^{(k)} \in W_f^{(k)}$, 有 $\mu^{(k)} - \mu_{\pi^{(k)}} \mathbf{1}_k \in \mathcal{M}(V_{11})$, 这里 $W_f^{(k)}$ 表示 S_k 上的零风险组合全体， $\mu_{\pi^{(k)}}$ 表示 S_k 上零风险组合收益率，其计算类似于 (3.13).

若出现 (i), 注意到 $\mu - \mu_\pi \mathbf{1} \in \mathcal{M}(V)$ 蕴含着

$$\mu^{(k)} - \mu_\pi \mathbf{1}_k \in \mathcal{M}(V_{11}), \qquad \mu_{2.1} - \mu_\pi \mathbf{1}_{2.1} \in \mathcal{M}(V_{22.1}).$$

因此，类似第一种情形的证明可得定理成立.

若出现 (ii), 将方程 (3.6) 两边同乘 $P_k^{\perp}$ 可得

$$\frac{1}{\lambda} P_k^{\perp} \mu^{(k)} + \frac{1}{\lambda_1} P_k^{\perp} \mathbf{1}_k = 0,$$

这里 $P_k^{\perp}=I-V_{11}V_{11}^{+}$. 在无套利假设下进而有

$$\frac{\lambda}{\lambda_1}=-\frac{(\mu^{(k)})'P_k^{\perp}\mathbf{1}_k}{(\mathbf{1}_k)'P_k^{\perp}\mathbf{1}_k}=-\mu_{\pi^{(k)}}. \tag{3.19}$$

将其代入 (3.6), 可解得

$$v^{(k)}=\frac{1}{\lambda}V_{11}^{-}\Big(\mu^{(k)}+\frac{\lambda}{\lambda_1}\mathbf{1}_k\Big)=\frac{1}{\lambda}V_{11}^{-}(\mu^{(k)}-\mu_{\pi^{(k)}}\mathbf{1}_k). \tag{3.20}$$

注意到 $\pi^{(k)}\in W_f^{(k)}$, 令 $\pi=\big((\pi^{(k)})',0\big)'$, 则显然有 $\pi\in W_f$. 由引理 3.1 知 $\mu_{\pi^{(k)}}=\mu_\pi$, 从而 $\mu-\mu_\pi\mathbf{1}\in\mathcal{M}(V)$ 蕴含着

$$\mu^{(k)}-\mu_{\pi^{(k)}}\mathbf{1}_k\in\mathcal{M}(V_{11}),\qquad \mu_{2.1}-\mu_{\pi^{(k)}}\mathbf{1}_{2.1}\in\mathcal{M}(V_{22.1}).$$

这表明方程 (3.10) 相容，且不难得到

$$v_{(n-k)}=\frac{1}{\lambda}V_{22.1}^{-}(\mu_{2.1}-\mu_\pi\mathbf{1}_{2.1}).$$

因此，若 S_k 为 S_n 的有效子集，则有

$$\eta_{2.1}=\mu_{2.1}-\mu_\pi\mathbf{1}_{2.1}=0. \tag{3.21}$$

最后，需要指出的是，对于上述第 2 种情形，由于存在零风险组合，有效前沿在 $(\sigma_\omega,\mu_\omega)$ 平面上是通过 $(0,\,\mu_\pi)$ 的射线，因此任何有效组合的零协方差对偶组合的期望收益均为零风险组合的收益率，即 $\mu_{zcp}=\mu_\pi$. 再由 (3.18) 和 (3.21) 立得必要性成立.

充分性 设 $\omega^{(k)}\in W^{(k)}$ 为 S_k 上的任一有效组合，定义 $\omega=\big((\omega^{(k)})',0\big)'\in W$, 并令

$$v=\begin{bmatrix}v^{(k)}\\ v_{(n-k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & V_{11}^{-}V_{12}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^{(k)}\\ \omega_{(n-k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega^{(k)}\\ 0\end{bmatrix},$$

则由 $\omega^{(k)}$ 的有效性知，存在 λ,λ_1 满足 (3.6)–(3.8). 类似地可以证明

$$\frac{1}{\lambda_1}=-\frac{1}{\lambda}\mu_{zcp},$$

因此，对于 S_k 上的任一有效组合 $\omega^{(k)}$, 若

$$\eta_{2.1}=\mu_{2.1}-\mu_{zcp}\mathbf{1}_{2.1}=0,$$

则不难验证上述定义的 v,λ,λ_1 满足 (3.9)–(3.12). 因此 S_k 为 S_n 的有效子集. 证毕.

推论 3.1 设 $W_f^{(k)}$ 表示 S_k 上的零风险组合集，在定理 3.1 条件下，我们有

(1) 若不存在 S_k 上的零风险组合，即 $W_f^{(k)}$ 为空，则 S_k 为 S_n 的有效子集的充要条件是

$$\mu_{2.1}=\mu_{(n-k)}-V_{21}V_{11}^{-}\mu^{(k)}=0,\qquad \mathbf{1}_{2.1}=\mathbf{1}_{n-k}-V_{21}V_{11}^{-}\mathbf{1}_k=0. \tag{3.22}$$

(2) 若存在 S_k 上的零风险组合 $\pi^{(k)}\in W_f^{(k)}$, 则 S_k 为 S_n 的有效子集的充要条件是

$$\eta_{2.1}=\mu_{2.1}-\mu_{\pi^{(k)}}\mathbf{1}_{2.1}=0, \tag{3.23}$$

其中 $\mu_{\pi^{(k)}}=(\mu^{(k)})'\pi^{(k)}$ 为零风险组合 $\pi^{(k)}$ 的收益率.

证　对于 (1), 注意到 (3.14) 对任意前沿组合 $\omega^{(k)}$ 的对偶组合的期望收益率 μ_{zcp} 都成立，这显然蕴含着 (3.22) 成立．对于 (2), 设存在零风险组合 $\pi^{(k)}\in W_f^{(k)}$, 由 [13] 知此时组合前沿为两条相交的射线，因此任意前沿组合的对偶组合均为零风险组合，从而 $\mu_{zcp}=\mu_{\pi^{(k)}}$. 证毕.

推论 3.2　设市场包含 1 种无风险证券和 n 种风险证券，第 $n+1$ 种证券为无风险证券，其收益率为 r_f, 记 $S_{k+1}=S_k\cup\{n+1\}$, $S_{n+1}=S_n\cup\{n+1\}$, 若市场无套利，且不存在常数 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $\mu=c\mathbf{1}$, 则 S_{k+1} 为 S_{n+1} 的有效子集的充要条件是

$$\eta_{2.1}=\mu_{2.1}-r_f\mathbf{1}_{2.1}=0. \tag{3.24}$$

证　根据推论 3.1 可知，只需证明 $\mu_{\pi^{(k+1)}}=r_f$ 即可．事实上，令

$$\widetilde{V}_{11}=\begin{bmatrix}V_{11}&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad \mu^{(k+1)}=\begin{bmatrix}\mu^{(k)}\\r_f\end{bmatrix},$$

则显然有 $\mathbf{1}_{k+1}\notin\mathcal{M}(\widetilde{V}_{11})$. 根据引理 3.2, 市场无套利当且仅当任给 $\pi^{(k+1)}\in W_f^{(k+1)}$, 有

$$\eta^{(k+1)}=\mu^{(k+1)}-\mathbf{1}_{k+1}\mu_{\pi^{(k+1)}}\in\mathcal{M}(\widetilde{V}_{11}),$$

这里 $W_f^{(k+1)}$ 为 S_{k+1} 上的零风险组合全体， $\mu_{\pi^{(k+1)}}$ 为零风险组合 $\pi^{(k+1)}$ 的收益率.

注意到 $\pi_0^{(k+1)}=(0,0,\cdots,0,1)'$ 为一零风险组合，所以

$$\eta_0^{(k+1)}=\mu^{(k+1)}-\mathbf{1}_{k+1}\mu_{\pi_0^{(k+1)}}\in\mathcal{M}(\widetilde{V}_{11}),$$

从而 $\widetilde{P}^{\perp}\eta_0^{(k+1)}=0$, 这里 $\widetilde{P}^{\perp}=I-\widetilde{V}_{11}\widetilde{V}_{11}^{+}$. 再由引理 3.1 知，任给 $\pi^{(k+1)}\in W_f^{(k+1)}$, 有

$$\begin{aligned}\mu_{\pi^{(k+1)}}=&\frac{(\mu^{(k+1)})'\widetilde{P}^{\perp}\mathbf{1}_{k+1}}{\mathbf{1}_{k+1}'\widetilde{P}^{\perp}\mathbf{1}_{k+1}}=\frac{(\eta_0^{(k+1)})'\widetilde{P}^{\perp}\mathbf{1}_{k+1}}{\mathbf{1}_{k+1}'\widetilde{P}^{\perp}\mathbf{1}_{k+1}}+\mu_{\pi_0^{(k+1)}}\\=&\mu_{\pi_0^{(k+1)}}=(\mu^{(k+1)})'\pi_0^{(k+1)}=r_f.\end{aligned}$$

注 3.1　定理 3.1 中的 μ_{zcp} 是前沿组合 $\omega^{(k)}$ 的对偶组合的期望收益率．事实上，对 S_k 上的任意一个前沿组合 $\omega^{(k)}$, 其在风险 - 收益平面上都对应着一个对偶组合，沿着该组合在组合前沿上作切线与期望收益率坐标轴上的截距就是组合 $\omega^{(k)}$ 的期望收益率 $\mu_{\omega^{(k)}}$. 对偶组合实际上是一个切点组合，由于它与其对应的对偶组合的收益率的协方差为零，因此也被称为零 - 协方差组合或零 -β 组合，在零 -β 资本资产定价模型中起着类似无风险证券的作用．根据两基金分离定理，切点组合与其对偶组合可张成全部的前沿组合，因此投资者在进行投资决策时，考虑全部证券的组合与考虑这两个基金组合的组合是一样的.

注 3.2 定理 3.1 的结果蕴含着在期望收益率轴上任一以 μ_{zcp} 为截距的切点组合在 S_{n-k} 中证券的投资比例将全部为零. 事实上, 由于在证券全集 S_n 中, 在期望收益率轴上以 μ_{zcp} 为截距所对应的切点组合为

$$\omega = \frac{1}{\lambda}V^{-}(\mu - \mu_{zcp}\mathbf{1}), \tag{3.25}$$

其中 $\lambda = B - A\mu_{zcp}$, $A = \mathbf{1}'V^{-}\mathbf{1}$, $B = \mathbf{1}'V^{-}\mu$. 根据分块矩阵广义逆

$$V^{-} = \begin{bmatrix} V_{11}^{-} + V_{11}^{-}V_{12}V_{22.1}^{-}V_{21}V_{11}^{-} & -V_{11}^{-}V_{12}V_{22.1}^{-} \\ -V_{22.1}^{-}V_{21}V_{11}^{-} & V_{22.1}^{-} \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

不难验证: 若 (3.14) 成立, 则有 $\omega_{(n-k)} = 0$, 这里 $\omega_{(n-k)}$ 表示切点组合 ω 中在证券子集 S_{n-k} 上的投资权重向量. 熟知, 在风险 - 收益平面上, 切点组合的 Sharpe 指数 (也称 Sharpe 比率) 是最大的, 这里 Sharpe 指数是指单位风险能获得的超额收益, 其定义为

$$S_p = \frac{\mu_\omega - \mu_b}{\sigma_\omega}, \tag{3.27}$$

其中 μ_b 表示标杆收益率水平, 通常选择无风险收益率. 当然, 投资者也可以根据自身风险承受能力选择其它标杆水平 [15]. 假设投资者选择在 $\mu_b = \mu_{zcp}$ 下通过最大化 Sharpe 指数来选择投资组合, 也就是通过最大化以 μ_{zcp} 为截距的切线的斜率 (这与均值方差模型实际是等价的, 可参看 Glabadanidis[9]), 那么定理 3.1 的结果表明 S_{n-k} 中的证券是冗余的, 从而为了节省交易费用, 投资者不必考虑 S_{n-k} 中的证券. 此外, 若用 $S_p(\omega)$ 表示切点组合 ω 的 Sharpe 指数, 并记 $\eta = \mu - \mu_{zcp}\mathbf{1}$, 则由 (3.25) 及 (3.27) 我们还可得到 Sharpe 指数的平方, 即

$$S_p^2(\omega) = \left(\frac{\mu_\omega - \mu_{zcp}}{\sigma_\omega}\right)^2 = \eta'V^{-}\eta.$$

综上可知, 对于 S_n 上的任一证券组合 ω, 它为 S_n 上的前沿组合的充分必要条件是其对应的 Sharpe 指数的平方等于 $\eta'V^{-}\eta$, 这里 η 同上, $\mu_{zcp} = (C - B\mu_\omega)/(B - A\mu_\omega)$ 为 ω 的对偶组合的期望收益率, 其中 $C = \mu'V^{-}\mu$. 因此我们也可用 Sharpe 指数的平方来衡量证券组合的有效性.

再记 $\Delta = AC - B^2$, 对于 S_n 上的前沿组合, 我们还可得如下更一般的基金分离定理.

定理 3.2 (三基金分离定理) 设 S_k 为 S_n 的一个证券子集, 则在均值 - 方差模型下 S_n 上的全部前沿组合均可由三个基金组合张成, 其中前两个基金组合由证券子集 S_k 中的证券构成, 第三个基金组合由证券全集 S_n 中的证券构成, 即对于 S_n 上的任一前沿组合 ω, 我们有

(1) 若不存在 S_k 上的零风险组合, 则

$$\omega = \lambda A_k \begin{bmatrix} \omega_g^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma B_k \begin{bmatrix} \omega_d^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -V_{11}^{-}V_{12} \\ I \end{bmatrix} V_{22.1}^{-}(\mu_{2.1} - \mu_{zcp}\mathbf{1}_{2.1}), \tag{3.28}$$

其中 $\mu_{zcp}=\frac{C-B\mu_\omega}{B-A\mu_\omega}$ 为 ω 的对偶组合的期望收益率,

$$\begin{aligned}
&\lambda=\frac{C-B\mu_\omega}{\Delta}, && \gamma=\frac{A\mu_\omega-B}{\Delta},\\
&\omega_g^{(k)}=A_k^{-1}V_{11}^{-}\mathbf{1}_k, && \omega_d^{(k)}=B_k^{-1}V_{11}^{-}\mu^k,\\
&A_k=\mathbf{1}_k'V_{11}^{-}\mathbf{1}_k, && B_k=\mathbf{1}_k'V_{11}^{-}\mu^k.
\end{aligned}$$

(2) 若存在 S_k 上的零风险组合 $\pi^{(k)}\in W_f^{(k)}$, 则

$$\omega=\lambda G_k\begin{bmatrix}\omega_\pi^{(k)}\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}\pi^{(k)}\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-V_{11}^{-}V_{12}\\I\end{bmatrix}V_{22.1}^{-}(\mu_{2.1}-\mu_{\pi^{(k)}}\mathbf{1}_{2.1}),\tag{3.29}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\lambda=\frac{\mu_\omega-\mu_{\pi^{(k)}}}{H}, && \gamma=1-\lambda G,\\
&G=B-A\mu_{\pi^{(k)}}, && H=C-2B\mu_{\pi^{(k)}}+A\mu_{\pi^{(k)}}^2,\\
&\omega_\pi^{(k)}=G_k^{-1}V_{11}\eta^{(k)}, && G_k=B_k-A_k\mu_{\pi^{(k)}}.
\end{aligned}$$

证　(1) 根据两基金分离定理，证券全集 S_n 上的前沿组合可表示为

$$\omega=\theta\frac{V^{-}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'V^{-}\mathbf{1}}+(1-\theta)\frac{V^{-}\mu}{\mathbf{1}'V^{-}\mu}.$$

由 $\mu_\omega=\mu'\omega$ 可得 $\theta=A(C-B\mu_\omega)/\Delta$. 令

$$\lambda=\theta/A=(C-B\mu_\omega)/\Delta,\qquad \gamma=(1-\theta)/B=(A\mu_\omega-B)/\Delta.$$

利用 (3.26) 不难得到 (3.28) 成立, 其中 $\omega_g^{(k)},\omega_d^{(k)}$ 分别为 S_k 上的两个基金组合, 而 (3.28) 中的第三项为 S_n 种的一个基金组合乘以一个权重系数．此外，注意到如下分解

$$A=A_k+A_{2.1},\qquad B=B_k+B_{2.1},\tag{3.30}$$

这里 $A_{2.1}=\mathbf{1}_{2.1}'V_{22.1}^{-}\mathbf{1}_{2.1}$，$B_{2.1}=\mathbf{1}_{2.1}'V_{22.1}^{-}\mu_{2.1}$, 以及

$$\gamma\mathbf{1}_{2.1}'V_{22.1}^{-}(\mu_{2.1}-\mu_{zcp}\mathbf{1}_{2.1})=\lambda A_{2.1}+\gamma B_{2.1},$$

因此，我们还可以验证三个基金组合前面的权重系数之和为

$$\lambda A_k+\gamma B_k+\lambda A_{2.1}+\gamma B_{2.1}=1.$$

由此可知， S_n 上的任一前沿组合 ω 都可通过上述三个基金组合张成.

(2) 对于存在零风险组合的情形，根据两基金分离定理，此时 S_n 上的任一前沿组合均可表示为切点组合和零风险组合的仿射组合，即

$$\omega=\theta\omega_\pi+(1-\theta)\pi,\tag{3.31}$$

其中 $\omega_\pi = \frac{1}{\mathbf{1}'V^-\eta}V^-\eta$ 为切点组合， $\pi \in W_f$ 为 S_n 上的零风险组合，这里 $\eta = \mu - \mu_\pi\mathbf{1}$.

由分块矩阵广义逆 (3.26), 计算可得

$$V^-\eta = \begin{bmatrix} V_{11}^-\eta^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_{11}^-V_{12} \\ I \end{bmatrix} V_{22.1}^-(\mu_{2.1} - \mu_\pi\mathbf{1}_{2.1}). \tag{3.32}$$

另一方面，由蒋春福和戴永隆 [14] 可知，零风险组合也可表示为 $\pi = T^-\mathbf{1}$, 这里

$$T = V + \mathbf{1}\mathbf{1}' = \begin{bmatrix} V_{11} + \mathbf{1}_k\mathbf{1}_k' & V_{12} + \mathbf{1}_k\mathbf{1}_{n-k}' \\ V_{21} + \mathbf{1}_{n-k}\mathbf{1}_k' & V_{22} + \mathbf{1}_{n-k}\mathbf{1}_{n-k}' \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

由于 $T \geq 0$, 因此对 T 进行上述分块后，其广义逆显然可类似 (3.26) 得到，从而可得

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_{11}^-T_{12} \\ I \end{bmatrix} T_{22.1}^-(\mathbf{1}_{n-k} - T_{21}T_{11}^-\mathbf{1}_k), \tag{3.33}$$

这里 $T_{22.1} = T_{22} - T_{21}T_{11}^-T_{12}$, $\pi^{(k)} = T_{11}^-\mathbf{1}_k$ 为 S_k 上的零风险组合.

注意到 $\mathbf{1}_k \in \mathcal{M}(T_{11})$, $\mathcal{M}(V_{12}) \subset \mathcal{M}(T_{11})$, 因此 $V_{21}T_{11}^-\mathbf{1}_k$, $\mathbf{1}_k'T_{11}^-\mathbf{1}_k$ 与广义逆 T_{11}^- 的选择无关. 另一方面，我们也注意到 $\mathbf{1}_k \notin \mathcal{M}(V_{11})$, $\mathcal{M}(V_{12}) \subset \mathcal{M}(V_{11})$, 因此选择 Moore-Penrose 逆 T_{11}^+, 则由蒋春福和戴永隆 [14] 引理 2.3 知

$$V_{21}T_{11}^-\mathbf{1}_k = V_{21}T_{11}^+\mathbf{1}_k = 0, \qquad \mathbf{1}_k'T_{11}^-\mathbf{1}_k = \mathbf{1}_k'T_{11}^+\mathbf{1}_k = 1,$$

从而

$$\mathbf{1}_{n-k} - T_{21}T_{11}^-\mathbf{1}_k = 0, \qquad \mu_\pi = \mu_{\pi^{(k)}}. \tag{3.34}$$

综合 (3.30)–(3.33) 可得 (3.29) 成立. 最后，由于

$$\lambda\mathbf{1}_{2.1}V_{22.1}^-(\mu_{2.1} - \mu_{\pi^{(k)}}\mathbf{1}_{2.1}) = \lambda G_{2.1},$$

其中 $G_{2.1} = B_{2.1} - A_{2.1}\mu_\pi$, 因此，不难验证 (3.29) 中三个基金组合前的权重系数之和为

$$\lambda G_k + \gamma + \lambda G_{2.1} = \lambda(G_k + G_{2.1}) + 1 - \lambda G = 1.$$

这说明 S_n 上的任一前沿组合均是 (3.29) 中的三个基金组合的仿射组合. 证毕.

从定理 3.2 可以看出，在某个证券集上增加新的证券后，新的证券集上的前沿组合通常不能由原证券集的基金组合张成，除非原来的证券集是新的证券集的有效子集. 有趣的是，我们还可验证：如果 S_k 为 S_n 的有效子集，那么对于分别来自 S_n 和 S_k 的两个有相同期望收益率的前沿组合，它们的对偶组合也将具有相同的期望收益率. 比如，对于不存在零风险组合的情形，设 ω 和 $\omega^{(k)}$ 为分别来自 S_n 和 S_k 的两个前沿组合，且 $\mu_\omega = \mu_{\omega^{(k)}}$, 则有

$$\mu_{zcp} = \frac{C - B\mu_\omega}{B - A\mu_\omega} = \frac{C_k - B_k\mu_{\omega^{(k)}}}{B_k - A_k\mu_{\omega^{(k)}}}. \tag{3.35}$$

事实上，令 $C_{2.1} = \mu_{2.1}'V_{22.1}^-\mu_{2.1}$, 则对 C 可进行类似于 (3.28) 的分解 $C = C_k + C_{2.1}$. 因此，如果 S_k 为 S_n 的有效子集，则由推论 3.1(1) 易知 $A_{2.1} = B_{2.1} = C_{2.1} = 0$, 从而立得

(3.28) 成立．对于存在零风险组合的情形，由于所有前沿组合的对偶组合均为零风险组合，因此在无套利条件下，零风险组合自然具有相同的收益率，这一结果也可从 (3.33) 中得到验证．

注 3.3 定理 3.2 从基金分离定理角度给出了定理 3.1 的一些经济解释．事实上，如果用 Merton[16] 关于证券组合收益率张成的概念来表述，定理 3.1 的经济涵义还在于新增证券不改变原证券集上的组合前沿，或者说不改变原证券集上的总体 “风险 - 收益” 状况的充分必要条件是新增证券的收益率可由原证券集中的证券收益率张成．沿用定理 3.1 中的记号，就是说证券子集 S_k 为证券全集 S_n 的有效子集意味着对任一证券 $i \in S_{n-k}$, 存在实数组 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ik}$ 使得

$$r_i - r_{zcp} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}(r_j - r_{zcp}) + \varepsilon_i, \qquad i \in S_{n-k}, \tag{3.36}$$

这里 r_{zcp} 为任一固定的前沿组合 $\omega^{(k)}$ 的对偶组合的收益率， ε_i 为残差项，满足

$$\mathrm{E}\left[\varepsilon_i | r_1, r_2, \cdots, r_k\right] = 0, \qquad \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, r_j) = 0, \qquad j \in S_k.$$

事实上，将定理 3.1 中的 (3.14) 改写为

$$\mu^{(n-k)} - \mu_{zcp}\mathbf{1}_{n-k} = V_{21}V_{11}^{-}(\mu^{(k)} - \mu_{zcp}\mathbf{1}_k), \tag{3.37}$$

我们不难发现 (3.37) 蕴含在 (3.36) 之中．另一方面，将 (3.36) 改写成

$$r_i = \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\right) r_{zcp} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} r_j + \varepsilon_i, \qquad i \in S_{n-k}, \tag{3.38}$$

这可视为一个线性回归模型，那么类似 Cheung 等 [8] 和 Steven[17] 关于协方差阵的结构分析可知 $V_{21}V_{11}^{-}$ 渐进地等于 $r_{k+1}, r_{k+2}, \cdots, r_n$ 关于 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 的回归系数．此外，根据是否存在 S_k 上的零风险组合，对 (3.37) 还可进一步简化．比如，对于不存在零风险组合的情形，由 r_{zcp} 的任意性可知回归系数 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ik}$ 满足

$$1 - \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} = 0, \qquad i \in S_{n-k},$$

这相当于推论 3.1(1) 中条件 $V_{21}V_{11}^{-}\mathbf{1}_k = \mathbf{1}_{n-k}$．对于存在零风险组合 $\pi^{(k)} \in W_f^{(k)}$ 的情形，显然有 $r_{zcp} = \mu_{zcp} = \mu_{\pi^{(k)}}$, 特别地，若存在无风险证券，则 $r_{zcp} = \mu_{zcp} = r_f$.

最后，联系 Rothschild 和 Stigliz[18] 给出的如下关于随机收益率的半序关系：

$$r_a \succeq r_b \Longleftrightarrow r_b = r_a + \varepsilon, \qquad E\left[\varepsilon | r_a\right] = 0, \tag{3.39}$$

其中 ε 为随机噪声项，那么定理 3.1 蕴含的经济涵义将更明显．对于风险厌恶投资者来说，上述半序关系表明 r_b 比 r_a 更有风险，或者说 r_a 比 r_b 更好，因为 r_b 比 r_a 多了一

项残差风险．从这个意义上来理解，如果 S_k 为 S_n 的有效子集，那么 S_{n-k} 中的证券将对风险厌恶的投资者将不具有吸引力，因为 r_i 与下面的组合资产

$$r_p = \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\right) r_{zcp} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} r_j \tag{3.40}$$

有相同的期望收益率, 然而由于残差风险的原因, 即 $r_i = r_p + \varepsilon_i$, 从而由 (3.40) 知 $r_p \succeq r_i$. 事实上，由于 r_p 复制了 r_i 的期望收益率，并且由 (3.39) 可得残差风险为

$$\mathrm{Var}(\varepsilon) = V_{22} - V_{12} V_{11}^{-} V_{12} = V_{22.1} \geq 0,$$

这里 $\varepsilon = (\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \cdots, \varepsilon_n)'$, 这表明 S_{n-k} 中的证券的确比其复制组合更有风险，因此对于风险厌恶的投资者来说， S_{n-k} 中的证券将是冗余的．

4 证券组合有效子集的统计推断

根据有效子集的定义，为检验 S_k 是否为 S_n 的有效子集，只需考虑对于 S_k 上的任意有效组合 $\omega^{(k)}$, 其张成的组合 $\omega = \left((\omega^{(k)})', 0\right)'$ 是否为 S_n 上的有效组合．为此，我们需要解决这样两个方面的问题．一是对于任一给定的证券组合 $\omega^{(k)} \in W^{(k)}$, 如何检验它在 S_k 上的有效性，二是如何检验 $\omega^{(k)}$ 张成的组合 ω 在 S_n 上的有效性.

根据前一节的分析，为检验 $\omega^{(k)}$ 的有效性，可引入如下的零假设

$$H_{0,1} = \{\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda V_{11} \omega^{(k)} = \eta^{(k)}\}. \tag{4.1}$$

类似地，对于任一给定的 $\omega \in W$, 为检验其有效性，可引入如下的零假设

$$H_{0,e} = \{\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda V \omega = \eta\}, \tag{4.2}$$

这里 $\mathbb{R}^+$ 为正实数集．对于上述假设检验问题，类似 [13] 我们有如下两个分解定理.

定理 4.1 对于某个给定的 $\lambda \in \mathbb{R}^+$, 记零假设 $H_{0,e}(\lambda) = \{\lambda V \omega = \eta\}$, 则有如下分解

$$H_{0,e}(\lambda) = H_{0,1}(\lambda) \cap H_{0,2.1}(\lambda), \tag{4.3}$$

其中

$$\begin{aligned} &H_{0,e}(\lambda) = \{\lambda V \omega = \eta\}, \\ &H_{0,1}(\lambda) = \{\lambda V_{11} v^{(k)} = \eta^{(k)}\}, \\ &H_{0,2.1}(\lambda) = \{\, \lambda V_{22.1} v_{(n-k)} = \eta_{2.1}\}. \end{aligned}$$

证 若 $H_{0,e}(\lambda)$ 成立，即 λ 满足 $\lambda V \omega = \eta$, 那么

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -V_{21} V_{11}^{-} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{(k)} \\ \omega_{(n-k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -V_{21} V_{11}^{-} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^{(k)} \\ \eta_{(n-k)} \end{bmatrix},$$

可得

$$\lambda\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ 0 & V_{22.1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega^{(k)}\\ \omega_{(n-k)}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ 0 & V_{22.1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -V_{11}^{-}V_{12}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^{(k)}\\ v_{(n-k)}\end{bmatrix}$$
$$=\lambda\begin{bmatrix}V_{11} & 0\\ 0 & V_{22.1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^{(k)}\\ v_{(n-k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta^{(k)}\\ \eta_{2.1}\end{bmatrix}.$$

由上可知 $H_{0,1}(\lambda)$ 和 $H_{0.2.1}(\lambda)$ 成立，因此

$$H_{0,e}(\lambda)\subset H_{0,1}(\lambda)\cap H_{0,2.1}(\lambda).$$

反之，若 $H_{0,1}(\lambda)$ 与 $H_{0,2.1}(\lambda)$ 成立，则不难得到 $H_{0,e}(\lambda)$ 成立，从而

$$H_{0,1}(\lambda)\cap H_{0,2.1}(\lambda)\subset H_{0,e}(\lambda),$$

因此有 (4.3) 成立．证毕.

定理 4.2 对于假设检验问题 $H_{0,e}$, 有如下的分解

$$H_{0,e}=H_{0,1}\cap H_{0,2.1}\cap H_{0,\lambda}, \tag{4.4}$$

其中

$$H_{0,1}=\{\exists\lambda_1:\ \lambda_1 V_{11}v^{(k)}=\eta^{(k)}\},$$
$$H_{0,2.1}=\{\exists\lambda_{2.1}:\ \lambda_{2.1}V_{22.1}v_{(n-k)}=\eta_{2.1}\},$$
$$H_{0,\lambda}=\{\lambda_1=\lambda_{2.1}\}.$$

证 这一定理的证明可由定理 3.1 和定理 4.1 直接得到.

定理 4.2 不但给出了零假设 $H_{0,e}$ 的一个分解, 同时也给出了有效组合的一个分解. 从这一分解可以发现， S_k 和 S_n 上的有效组合分别与 $V_{11}^{-}\eta^{(k)}$ 和 $V^{-}\eta$ 呈比例关系，并且如果 S_k 为 S_n 的有效子集，那么它们之间的这一比例系数必然是相等的.

由定理 4.1 和定理 4.2 可知，为对有效子集进行统计检验，需导出零假设 $H_{0,e}$ 的检验统计量.

设 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_T$ 为 n 种证券收益率向量的独立样本，则 μ 和 V 的样本估计分别为

$$\widehat{\mu}_T=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{r}_t,\qquad \widehat{V}_T=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{r}_t-\widehat{\mu}_T)(\boldsymbol{r}_t-\widehat{\mu}_T)'. \tag{4.5}$$

引理 4.1[13,19] 关于估计量 $\widehat{\mu}_T$ 和 $\widehat{V}_T$, 有如下结论成立：

(1) $\widehat{\mu}_T$ 和 $\widehat{V}_T$ 分别是 μ 和 V 的一致性估计，并且是渐近正态的；

(2) $\sqrt{T}[\widehat{\mu}_T-\mu]\xrightarrow{d}N(0,V)$;

(3) 如果收益率向量的三阶中心矩为零，那么 $\widehat{\mu}_T$ 和 $\widehat{V}_T$ 是渐近独立的.

定理 4.3 在 $H_{0,1}$ 下， Wald 统计量

$$\widehat{\xi}_1=T\frac{\widehat{S}_1-\widehat{S}_1(\omega)}{1+\widehat{S}_1(\omega)}\xrightarrow{d}\chi^2(q_1-1),$$

这里 $\widehat{S}_1=(\widehat{\eta}^{(k)})'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{\eta}^{(k)}$, $\widehat{S}_1(\omega)=\frac{[(\widehat{\eta}^{(k)})'v^{(k)}]^2}{(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}$, $q_1=\mathrm{Rank}\,(V_{11})$.

证 对于零假设 $H_{0,1}$, 我们分两步来构建其检验统计量. 首先，我们固定 λ, 考虑

$$H_{0,1}(\lambda)=\{\lambda V_{11}v^{(k)}=\eta^{(k)}\}$$

的统计检验量，然后再考虑 $H_{0,1}$ 的统计检验. 我们不难发现

$$H_{0,1}=\bigcup_{\lambda>0}H_{0,1}(\lambda).$$

对于给定的 λ, 定义残差

$$\widehat{e}_{1T}(\lambda)=\lambda\widehat{V}_{11}v^{(k)}-\widehat{\eta}^{(k)},$$

由引理 4.1, 在 $H_{0,1}(\lambda)$ 下， $\sqrt{T}\widehat{e}_{1T}(\lambda)$ 渐近服从正态分布，均值为零，渐近方差为

$$\begin{aligned}V_{as}\big[\sqrt{T}\widehat{e}_{1T}(\lambda)\big]=&V_{as}[\sqrt{T}\widehat{\eta}^{(k)}]+\lambda^2V_{as}[\sqrt{T}\widehat{V}_{11}v^{(k)}]\\=&V_{11}+\lambda^2\big[(v^{(k)})'V_{11}v^{(k)}V_{11}+V_{11}v^{(k)}(v^{(k)})'V_{11}\big]\\=&(1+\lambda^2(v^{(k)})'V_{11}v^{(k)})V_{11}+\lambda^2V_{11}v^{(k)}(v^{(k)})'V_{11}.\end{aligned}$$

因此， $H_{0,1}(\lambda)$ 的 Wald 统计量为

$$\widehat{\xi}_1(\lambda)=\big(\sqrt{T}\widehat{e}_{1T}(\lambda)\big)'\big(\widehat{V}_{as}[\sqrt{T}\widehat{e}_{1T}(\lambda)]\big)^{-}\sqrt{T}\widehat{e}_{1T}(\lambda).\tag{4.6}$$

利用矩阵求逆公式可知

$$\big[\widehat{V}_{as}(\sqrt{T}\widehat{e}_{1T}(\lambda))\big]^{-}=\frac{1}{1+\lambda^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}\Big[\widehat{V}_{11}^{-}-\frac{\lambda^2v^{(k)}(v^{(k)})'}{1+2\lambda^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}\Big].\tag{4.7}$$

将 (4.7) 代入 (4.6) 得

$$\widehat{\xi}_1(\lambda)=T\frac{(\widehat{e}_{1T}(\lambda))'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\lambda)}{1+\lambda^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}-T\frac{\lambda^2[(\widehat{e}_{1T}(\lambda))'v^{(k)}]^2}{(1+\lambda^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)})(1+2\lambda^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)})}.\tag{4.8}$$

由于 $V_{11}v^{(k)}\in\mathcal{M}(V_{11})$, 因此

$$\mathrm{Rank}(V_{as}[\sqrt{T}\widehat{e}_{1T}(\lambda)])=\mathrm{Rank}(V_{11}).$$

由 Wald 统计量的性质知， $\widehat{\xi}_1(\lambda)$ 渐近服从 $\chi^2(q_1)$ 分布，这里 $q_1=\mathrm{Rank}(V_{11})$.

下面考虑 $H_{0,1}$ 的检验问题，设 λ 可变，并记

$$\xi_1=\min_{\lambda}\widehat{\xi}_1(\lambda).\tag{4.9}$$

下面我们证明估计量

$$\widehat{\lambda}=\frac{(v^{(k)})'\widehat{\eta}^{(k)}}{(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}$$

使得 (4.9) 渐近成立. 为此记 $\lambda_1=\widehat{\lambda}+\delta$, 则在 $H_{0,1}$ 下，有

$$\begin{aligned}(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}_1))'v^{(k)}&=\big[(\widehat{\lambda}+\delta)\widehat{V}_{11}v^{(k)}-\widehat{\eta}^{(k)}\big]'v^{(k)}\\&=(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}))'v^{(k)}+\delta(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}\\&=\delta(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}.\end{aligned}$$

最后一个等号成立是因为在 $H_{0,1}$ 下有 $(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}))'v^{(k)}=0$. 同理

$$\begin{aligned}(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}_1))'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}_1)=&[\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})+\delta\widehat{V}_{11}v^{(k)}]'\widehat{V}_{11}^{-}[\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})+\delta\widehat{V}_{11}v^{(k)}]\\=&(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}))'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})+\delta(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})\\&+\delta(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}))'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{V}_{11}v^{(k)}+\delta^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{V}_{11}v^{(k)}\\=&(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}))'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})+\delta^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)},\end{aligned}$$

因此，由 (4.8) 可得

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}_1(\widehat{\lambda}+\delta)=&T\frac{\big(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})\big)'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})}{1+\lambda_1^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}+T\frac{\delta^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}{1+\lambda_1^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}\\&-T\frac{\lambda_1^2\delta^2[(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}]^2}{(1+\lambda_1^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)})(1+2\lambda_1^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)})}\\=&T\frac{(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}))'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})}{1+\lambda_1^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}+T\frac{\delta^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}{1+2\lambda_1^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

注意到在 $H_{0,1}$ 下 $\big(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})\big)'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda})\approx 0$, 并且由 (4.10) 可知 δ^2 前的系数非负，因此渐近地有 $\delta=0$ 时 $\widehat{\xi}_1(\widehat{\lambda}+\delta)$ 取到最小值 $\widehat{\xi}_1(\widehat{\lambda})$, 从而立得 (4.9) 成立.

最后，我们将 $\widehat{\lambda}$ 代入得 (4.8), 并注意到在 $H_{0,1}$ 下有 $(\widehat{e}_{1T}(\widehat{\lambda}))'v^{(k)}=0$, 可得

$$\widehat{\xi}_1(\widehat{\lambda})=T\frac{\big(\widehat{\lambda}\widehat{V}_{11}v^{(k)}-\widehat{\eta}^{(k)}\big)'\widehat{V}_{11}^{-}\big(\widehat{\lambda}\widehat{V}_{11}v^{(k)}-\widehat{\eta}^{(k)}\big)}{1+\widehat{\lambda}^2(v^{(k)})'\widehat{V}_{11}v^{(k)}}=T\frac{\widehat{S}_1-\widehat{S}_1(\omega)}{1+\widehat{S}_1(\omega)}.$$

由定理 4.3 知 $\widehat{\xi}_1\xrightarrow{d}\chi^2(q_1-1)$, 这里自由度为 q_1-1, 是因为使用了 λ 的估计 $\widehat{\lambda}$. 证毕.

特别地，在定理 4.3 中取 $S_k=S_n$, 或等价地 $S_{n-k}=\varnothing$, 可得如下推论.

推论 4.1 在 $H_{0,e}$ 下， Wald 统计量

$$\widehat{\xi}_e=T\frac{\widehat{S}-\widehat{S}(\omega)}{1+\widehat{S}(\omega)}\xrightarrow{d}\chi^2(q-1),$$

这里 $\widehat{S}=\widehat{\eta}'\widehat{V}^{-}\widehat{\eta}$, $\widehat{S}(\omega)=\frac{[\widehat{\eta}'v]^2}{v'\widehat{V}v}$, $q=\mathrm{Rank}(V)$.

定理 4.4 在 $H_{0,2.1}$ 下， Wald 统计量

$$\widehat{\xi}_{2.1}=T\frac{\widehat{S}_{2.1}}{1+\widehat{S}_1}\xrightarrow{d}\chi^2(q_2),$$

这里 $\widehat{S}_{2.1}=(\widehat{\eta}_{2.1})'\widehat{V}_{22.1}^{-}\widehat{\eta}_{2.1}$, $q_2=\mathrm{Rank}(V_{22.1})$.

证 类似定理 4.3 的证明，定义残差

$$\widehat{e}_{2.1,T}(\lambda)=\lambda\widehat{V}_{22.1}v_{(n-k)}-\widehat{\eta}_{2.1}=-\widehat{\eta}_{2.1}.$$

由于

$$\widehat{\eta}_{2.1}=\widehat{\eta}_{(n-k)}-\widehat{V}_{21}\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{\eta}^{(k)}=(-\widehat{V}_{21}\widehat{V}_{11}^{-},\mathbf{I}_{n-k})\widehat{\eta},$$

从而有

$$\begin{aligned}V_{as}(\sqrt{T}(\widehat{\eta}_{2.1}-\eta_{2.1}))=&(-V_{21}V_{11}^{-},\mathbf{I}_{n-k})V_{as}[\sqrt{T}(\widehat{\eta}-\eta)]\begin{bmatrix}-V_{11}^{-}V_{12}\\ \mathbf{I}_{n-k}\end{bmatrix}\\&+V_{as}\big[\sqrt{T}(\widehat{V}_{21}\widehat{V}_{11}^{-}-V_{21}V_{11}^{-})\widehat{\eta}^{(k)}\big]\\=&(-V_{21}V_{11}^{-},\ \mathbf{I}_{n-k})V\begin{bmatrix}-V_{11}^{-}V_{12}\\ \mathbf{I}_{n-k}\end{bmatrix}+(\eta^{(k)})'V_{11}^{-}\eta^{(k)}\otimes V_{22.1}\\=&(1+(\eta^{(k)})'V_{11}^{-}\eta^{(k)})V_{22.1}.\end{aligned}$$

因此，零假设 $H_{0,2.1}(\lambda)$ 的 Wald 检验统计量为

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}_{2.1}(\lambda)=&T(\widehat{e}_{2.1,T}(\lambda))'(\widehat{V}_{as}(\sqrt{T}\widehat{e}_{2.1,T}(\lambda)))^{-}\widehat{e}_{2.1,T}(\lambda)\\=&\frac{T}{1+(\widehat{\eta}^{(k)})'\widehat{V}_{11}^{-}\widehat{\eta}^{(k)}}\ \widehat{\eta}_{2.1}'\widehat{V}_{22.1}^{-}\widehat{\eta}_{2.1}.\end{aligned}$$

注 4.1 定理 4.2 对有效性假设 $H_{0,e}$ 进行了分解，事实上，其检验统计量 $\widehat{\xi}_e$ 也存在相应的分解，即有

$$\widehat{\xi}_e=\widehat{\xi}_{1,e}+\widehat{\xi}_{2.1}\sim\chi^2(q-1) \tag{4.11}$$

为 $H_{0,e}$ 的检验统计量，其中

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}_1&=T\frac{\widehat{S}_1-\widehat{S}_1(\omega)}{1+\widehat{S}_1(\omega)}\sim\chi^2(q_1-1),\\ \widehat{\xi}_{2.1}&=T\frac{\widehat{S}_{2.1}}{1+\widehat{S}_1}\sim\chi^2(q_2)\end{aligned}$$

分别为 $H_{0,1},H_{0,2.1}$ 的检验统计量，并且 $\widehat{\xi}_1,\widehat{\xi}_{2.1}$ 还是相互独立的.

注 4.2 对于上述检验统计量，下面我们给出一些经济解释．事实上，在均值 - 方差模型下，由于 S_k 为 S_n 的有效子集蕴含着 S_k 与 S_n 有相同的组合前沿．根据注 3.2 的分析可知，这显然也等价于它们有相同的 Sharpe 指数最优组合．因此，若 S_k 为 S_n 的有效子集，那么在任意标杆收益率水平下，投资者在 S_k 上的最优组合与在 S_n 上的最优组合应有相同的 Sharpe 指数，反之，若在任意标杆收益率水平下， S_k 与 S_n 上的前沿组合均都有相同的 Sharpe 指数，那么 S_k 也必然为 S_n 的有效子集．这说明一个证券子集是否为有效子集可用 Sharpe 指数来衡量和判断．定理 4.3 和定理 4.4 中的 $\widehat{S}(\omega)$ 和 $\widehat{S}_1(\omega)$ 其实正是 Sharpe 指数的平方，即

$$S(\omega)=\frac{(\eta'\omega)^2}{\omega'V\omega},\qquad S_1(\omega)=\frac{((\eta^{(k)})'v^{(k)})^2}{(v^{(k)})'V_{11}v^{(k)}},\qquad S_{2.1}(\omega)=\frac{((\eta_{2.1})'v_{(n-k)})^2}{(v_{(n-k)})'V_{22.1}v_{(n-k)}}.$$

显然这些指标也也反映了证券组合 ω 的业绩. 该度量指标越大表明 ω 越接近有效组合. 再记

$$S=\eta' V^{-}\eta, \qquad S_1=(\eta^{(k)})' V_{11}^{-}\eta^{(k)}, \qquad S_{2.1}=(\eta_{2.1})' V_{22.1}^{-}\eta_{2.1},$$

则不难得到如下分解

$$S=S_1+S_{2.1}.$$

若 ω 为 S_n 上的有效组合，则有 $S=S(\omega)$. 然而 $S_1=S_1(\omega)$ 以及 $S_{2.1}=S_{2.1}(\omega)$ 未必成立，这是因为 ω 在 S_k 上的投资权重 $\omega^{(k)}$ 未必是 S_k 上的有效组合. 但是反过来若 $\omega^{(k)}$ 为 S_k 上的有效组合，且其张成的证券组合 $\omega=\big((\omega^{(k)})',0\big)'$ 在 S_n 上也是有效的，那么 S_k 为 S_n 的有效子集，此时必然有

$$S_1=S_1(\omega), \qquad S=S(\omega), \qquad S_{2.1}=0.$$

显然，定理 4.3 和定理 4.4 中的 $\widehat{\xi}_e,\widehat{\xi}_1,\widehat{\xi}_{2.1}$ 正是分别检验这些等式是否成立的检验统计量.

5　随机模拟和实证分析

本节我们将采用 Matlab 软件对前文的结果进行 Monte-Carlo 模拟实验分析，并结合我国沪深股市交易数据进行实证分析，以检验本文结果的正确性.

表 1　检验统计量渐近分布的 Monte-Carlo 模拟分析结果

收益率分布	$n-k$	k	T	p-value ξ_e	ξ_1	$\xi_{2.1}$
正态分布	10	10	1	0.1778	0.5337	0.1014
			3	0.6935	0.4020	0.2649
			5	0.7900	0.3842	0.2218
		50	1	0.1211	0.3254	0.0955
			3	0.2669	0.3796	0.1013
			5	0.3190	0.1244	0.1053
t 分布	10	10	1	0.1208	0.1832	0.0504
			3	0.2144	0.1339	0.3506
			5	0.3079	0.4064	0.5486
		50	1	0.1031	0.2530	0.0000
			3	0.2435	0.2499	0.0547
			5	0.5360	0.3504	0.1042

5.1　随机模拟

首先选择正态分布模拟证券收益率, 同时考虑到证券收益率分布的肥尾特征，我们也选用了 t 分布作为比较分析, 其中正态分布的模型参数 μ,σ 分别是在区间 $[-0.05,0.05]$ 和 $[0.1,0.5]$ 上随机生成，　t 分布的自由度为 5. 此外，为验证检验统计量渐近结果的稳

健性, 我们对 k 和 n 以及样本数量都做了不同的对比. 对每种情形均重复模拟 200 次, 得到检验统计量 ξ_e, ξ_1 和 $\xi_{2.1}$ 的 200 个模拟结果.

然后采用 Kolmogorov-Smirnov 检验对统计量 ξ_e, ξ_1 和 $\xi_{2.1}$ 的渐近分布进行了检验, 得到分布拟合检验的 p 值, 分析结果见表 1. 表中 k 为证券子集 S_k 中证券数量, n 为证券全集 S_n 中证券数量, T 表示年, 并假设每年有 255 个交易日.

从表 1 可以看出, 检验统计量 $\xi_e, \xi_1, \xi_{2.1}$ 的模拟结果有下面几个特点:

(1) 分布拟合检验的 p 值随 n 的增大有减少趋势, 这说明随着 n 的增加, 检验统计量的概率分布偏离其渐近分布.

(2) 分布拟合检验的 p 值随 T 的增大有增加趋势, 这说明随着样本期 T 长度增大, 渐进结果拟合效果越好.

(3) 当证券收益率分布采用有厚尾现象的 t 分布时, 分布拟合检验的 p 值有减少趋势, 拟合效果不如正态分布, 但从表中结果也可以看出, 当样本量适当增加时, 拟合效果能得到改善, 这与本文的渐近结果是一致的.

5.2 实证分析

从我国 A 股市场选择采掘业的 39 只股票的月收益数据进行实证分析, 这 39 只股票的代码如附表所示, 时间区间为 2000 年 2 月至 2010 年 9 月, 共 128 个历史月份. 根据附表中的股票序号我们定义证券子集 $S_k = \{1, 2, \cdots, k\}$, 证券全集为 $S_n = \{1, 2, \cdots, 39\}$. 选择显著性水平 $\alpha = 0.05$, 利用 Matlab 软件得到分析结果如表 2 所示.

表 2 证券子集 S_k 的有效性检验结果

k	$\xi_{2.1}$	$\chi^2_{1-\alpha}(n-k)$	H	k	$\xi_{2.1}$	$\chi^2_{1-\alpha}(n-k)$	H
20	33.7172	30.1435	0	30	11.3187	16.9190	1
21	33.7028	28.8693	0	31	67.6430	15.5073	1
22	33.6899	27.5871	0	32	7.4830	14.0671	1
23	33.1016	26.2962	0	33	7.0031	12.5916	1
24	20.7205	24.9958	1	34	5.3313	11.0705	1
25	20.2632	23.6848	1	35	5.0442	9.4877	1
26	13.4158	22.3620	1	36	4.9513	7.8147	1
27	12.5248	21.0261	1	37	4.2288	5.9915	1
28	12.0760	19.6751	1	38	3.5742	3.8415	1
29	11.6367	18.3070	1	39	0	NaN	1

表 2 中 $H = 0$ 表示 $\xi_{2.1} > \chi^2_{1-\alpha}(n-k)$, 从而可以认为 S_k 不是 S_n 的有效子集, 反之 $H = 1$ 则表示 S_k 是 S_n 的有效子集. 需要指出是当 $k = 1, 2, \cdots, 19$ 时, 我们得到 $H = 0$, 限于篇幅, 这部分结果没有列出. 从表 2 可以看出, 当 $k \geq 24$ 时, 可以认为 S_k 为 S_n 的有效子集. 图 1 和图 2 分别列出了证券子集 S_{15}, S_{25} 以及证券全集 S_n 的有效前沿和收益率序列的对比图, 从图中可以看出证券子集 S_{25} 相对于 S_{15} 来说更接近有效子集. 实证分析也表明, 证券组合有效子集不唯一, 从表 2 来看 S_{24} 是表中所含证券数量最小的有效子集.

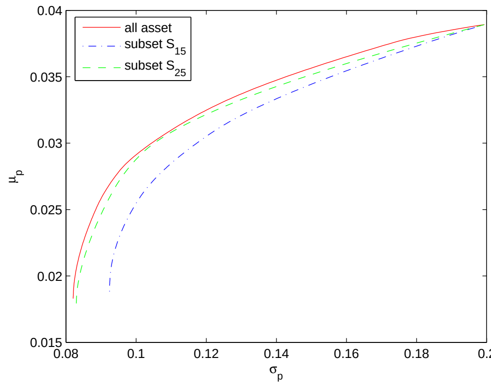

图 1 证券全集与证券子集的有效前沿

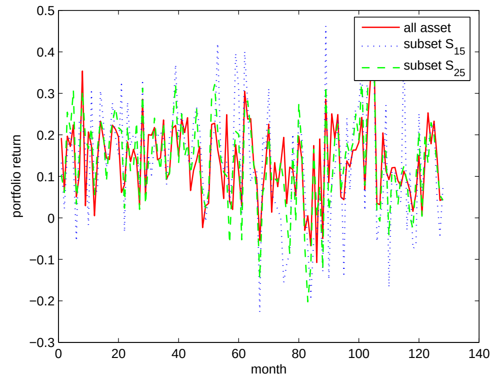

图 2 证券全集与证券子集的收益率序列

另一方面，我们注意到证券组合的有效子集应该具有传递性，即若 C 是 B 的有效子集， B 是 A 的有效子集，那么 C 应是 A 的有效子集．由表 2 可知，当 $k \geq 24$ 时，S_k 均为 S_n 的有效子集，因此满足这一性质．然而，如果我们按照判定条件 (2.4) 进行判定，得到的结果却与这一性质不符，并且需要在一定的误差下才有意义，结果如图 3 所示．

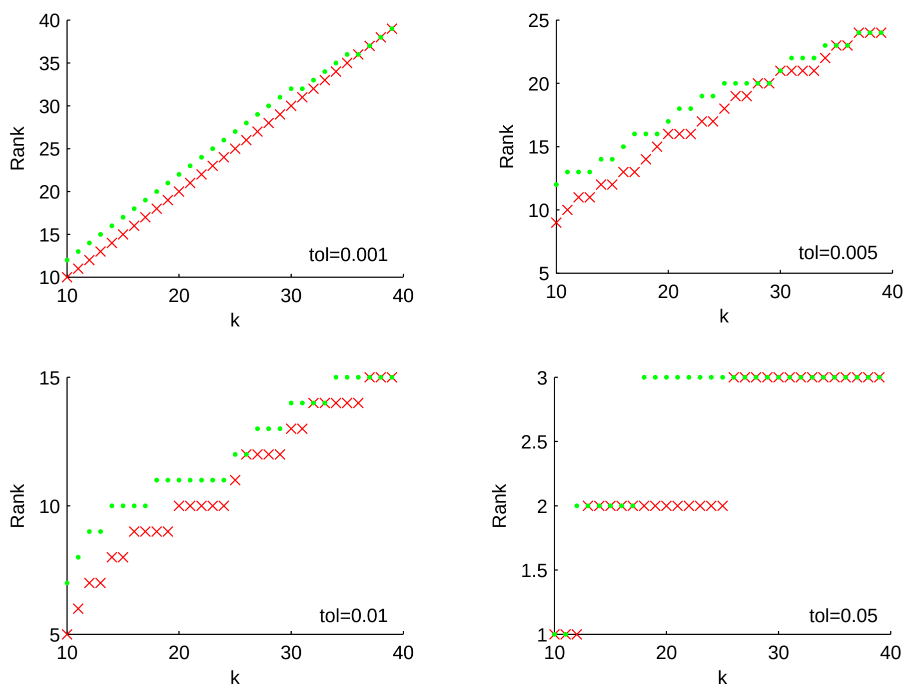

图 3 不同允许误差下的矩阵秩判别法的分析结果

图中绿色圆点表示判定条件 (2.4) 右边的值，红色叉号表示 (2.4) 左边的值．两个值相等则表示对应的证券子集为有效子集．图中 tol 为 Matlab 命令 rank 中的参数，表

示在一定误差条件下判定矩阵的秩. 从图可以看出, 误差精度要求越高, 有效子集数量越少, 比如当 tol=0.001 时, 只有当 $k \geq 36$ 时, S_k 才是 S_n 的有效子集. 而当 tol 增大时, 有效子集的数量也增加. 另一方面, 从图中也可以看出, 当 k 从 10 开始增加到 39, 有效子集的判定结果出现不稳定的现象, 并且不满足传递性. 比如对于 tol=0.05 的情形, 当 $13 \leq k \leq 17$ 时, S_k 为 S_n 的有效子集, 而当 $18 \leq k \leq 25$ 时, S_k 不是 S_n 的有效子集, 然后当 $26 \leq k \leq 39$ 时, S_k 又成为 S_n 的有效子集.

附表 中国沪深股市样本股票的序号及代码

序号	股票代码	序号	股票代码	序号	股票代码
1	000026	14	200056	27	600755
2	000028	15	600056	28	600774
3	000416	16	600058	29	600778
4	000417	17	600120	30	600807
5	000419	18	600128	31	600814
6	000516	19	600153	32	600821
7	000679	20	600628	33	600824
8	000759	21	600683	34	600826
9	000882	22	600693	35	600828
10	000889	23	600694	36	600830
11	000906	24	600697	37	600838
12	200026	25	600738	38	600859
13	200028	26	600739	39	600861

6 结束语

在投资组合管理的实践中, 投资者常常会筛选出自认为优良的证券来进行组合投资, 然而这些被筛选出来的“优质”证券组合往往并没有出现投资者所期望的业绩表现. 对于这一问题, 我国学者史树中和杨杰 [4] 提出了有效子集概念, 即如果存在某个证券子集使得对风险厌恶型投资者来说, 在该证券子集上选择投资组合与在证券全集上选择投资组合无差异, 那么这样的证券子集被称为有效子集. 有效子集的含义在于证券全集中可能存在冗余证券. 在本文中, 我们利用矩阵广义逆得到了证券组合有效子集判定的一些新的结果, 并给出了有效子集的统计检验方法, 这使得有效子集在应用上成为可行, 从而弥补了 [4] 中结果难以直接应用的缺陷.

本文也对证券组合有效子集进行了一些随机模拟和实证分析. 从实证结果来看, 有效子集并不唯一, 因此本文的进一步研究将是如何刻画及搜索最小有效子集, 即所包含的证券数量最小的有效子集. 事实上, 对于这一问题, 根据定理 3.1 及注 3.3 的分析我们不难证明: 对于不存在零风险组合的情形, S_k 是 S_n 的最小有效子集的当且仅当对任一证券 $i \in S_{n-k}$, 存在一组数 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ik}$ 使得 (3.36) 成立, 且协方差阵 V 的秩等于 S_k 中证券的数量, 或等价地

$$V_{22.1} = V_{22} - V_{21} V_{11}^{-1} V_{12} = 0.$$

对于存在零风险组合 $\pi^{(k)} \in W_f^{(k)}$ 的情形， S_k 是 S_n 的最小有效子集的当且仅当任给 $i \in S_{n-k}$, 存在实数 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ik}$ 使得

$$r_i = \Big(1 - \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}\Big)\mu_{\pi^{(k)}} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} r_j + \varepsilon_i,$$

且协方差阵 V 的秩等于 $k-1$, 这里 $\mu_{\pi^{(k)}}$ 为零风险组合 $\pi^{(k)}$ 的收益率， ε_i 的说明同 (3.36). 如果用 Szegö[1] 和 Merton[16] 中的 k 基金分离定理来表述，就是说 S_k 为 S_n 的最小有效子集当且仅当 S_{n-k} 中所有证券的收益率均可由 S_k 中 k 种 (基金) 证券张成，同时 S_k 中所有证券的收益率均不能由除自身以外的其它 (基金) 证券张成. 特别地，若随机残差项等于零，则表明 S_{n-k} 中的证券可由 S_k 复制得到. 当然，以上仅是对最小有效子集所满足的一些特殊条件的初步探讨，关于其更深刻的条件及统计推断方法有待进一步深入研究.

致谢 我们对审稿专家提出的宝贵意见表示衷心的感谢！

参 考 文 献

[1] Szegö G P. Portfolio Theory: with Application to Bank Asset Management. New York: Academic Press, 1980

[2] Markowitz H, Lacey R, Plymen J, Dempster M A H, Tompkins R G. The General Mean-Variance Portfolio Selection Problem (and Discussion). *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 1994, 347(1684): 543–549

[3] 姚海祥，易建新，李仲飞. 奇异方差 - 协方差矩阵的 n 种风险资产有效边界的特征. 数量经济技术经济研究， 2005, 22(1): 107–113
(Yao H X, Yi J X, Li Z F. The Efficient Frontier Feature of Risky Assets with Singular Variance-covariance Matrix. *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 2005, 22(1): 107–113)

[4] 史树中，杨杰. 证券组合选择的有效子集. *应用数学学报*, 2002, 25(1): 176–186
(Shi S Z, Yang J. Efficient Subset for Portfolio Selection. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2002, 25(1): 176–186)

[5] 蒋春福，戴永隆. 奇异协方差阵下证券组合的有效子集. *应用概率统计*, 2008, 24(5): 484–492
(Jiang C F, Dai Y L. Efficient Subset for Portfolio with Singular Covariance Matrix. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2008, 24(5): 484–492)

[6] 王金才，徐伟，郭丹. 证券组合选择有效子集的分类和搜索方法. *数学的实践和认识*, 2006, 36(2): 115–118
(Wang J C, Xu W, Guo D. A Classifying and Searching Method for Efficient Subset.*Mathematics in Practice and Theory*, 2006, 36(2): 115–118)

[7] Huberman G, Kandel S. Mean-Variance Spanning. *Journal of Finance*, 1987, 42(4): 873–888

[8] Cheung C S, Kwan C C, Mountain D C. On the Nature of Mean-variance Spanning. *Finance Research Letters*, 2009, 6(2): 106–113

[9] Glabadanidis P. Measuring the Economic Significance of Mean-variance Spanning. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 2009, 49(2): 596–616

[10] 吴国清, 周远航. 规模组合、因子定价与均值 - 方差张成. *数量经济技术经济研究*, 2005, 22(11): 57–67
(Wu G Q, Zhou Y H. Size Portfolio, Factor Pricing and Mean-variance Spanning. *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 2005, 22(11): 57–67)

[11] 李传乐. HJ 随机折现因子框架下的均值 - 方差张成研究. *华南师范大学学报* (自然科学版), 2009, 1(4): 35–38
(Li C L. Study of Mean-Variance Spanning Under the Framework of HJ SDF. *Journal of South China Normal University* (Natural Science Edition), 2009, 1(4): 35–38)

[12] Hansen L P, Jagannathan R. Implication of Security Market Data for Models of Dynamic Economies. *Journal of Political Economy*, 1991, 99(2): 225–262

[13] Gouriéroux C, Jouneau F. Econometrics of Efficient Fitted Portfolios. *Journal of Empirical Finance*, 1999, 6(1): 87–118

[14] 蒋春福, 戴永隆. 奇异协方差阵下有效前沿及有效组合的解析解. *系统科学与数学*, 2008, 28(9): 1134–1147
(Jiang C F, Dai Y L. Analytic Solutions of Efficient Frontier and Efficient Portfolio with Singular Covariance Matrix. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2008, 28(9): 1134–1147)

[15] Buckley I, Saunders D, Seco L. Portfolio Optimization When Asset Returns Have Gaussian Mixtures Distribution. *European Journal of Operational Research*, 2008, 185(3): 1434–1461

[16] Merton R C. Continuous-Time Finance. Oxford: Blackwell, 1992

[17] Stevens G V G. On the Inverse of the Covariance Matrix in Portfolio Analysis *Journal of Finance*, 1998, 53(5): 1821–1827

[18] Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing Risk I : A Definition. *Journal of Economic Theory*, 1970, 2(3): 225–243

[19] Anderson T W. An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1984

Statistical Inference of Portfolio Efficient Subset

JIANG Chunfu

(College of Mathematics and Computational Science, Shenzhen University, Shenzhen 518060)

(E-mail: jiangcf@szu.edu.cn)

PENG Hongyi

(College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou 510642)

(E-mail: penghyi@yahoo.com.cn)

Abstract This paper is concerned with the statistical inference of the portfolio efficient subset under singular covariance matrice. Some new conditions for determining efficient subset are obtained, and the statistics for testing efficient subset and its asymptotical properties are also derived by constructing a Wald statistic. Moreover, we give the economic signification of statistic by decomposing of statistic and efficiency hypothesis. Finally, we show some examples of random simulation and empirical investigation to prove the results in this paper.

Key words portfolio; efficient subset; statistical inference

MR(2000) Subject Classification 62P05

Chinese Library Classification O29; F224