第 35 卷 第 3 期　应 用 数 学 学 报　Vol. 35 No. 3
2012 年 5 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　May, 2012

二阶常微分方程 Neumann 边值问题正解的全局分歧 *

陈瑞鹏

(西北师范大学数学与信息科学学院，兰州 730070)

(E-mail: ruipengchen@126.com)

马如云

(西北师范大学数学与信息科学学院，兰州 730070)

(E-mail: mary@nwnu.edu.cn)

闫东明

(四川大学数学学院，成都 610064)

(yandong_ming@126.com)

摘　要　本文考虑二阶常微分方程 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} u'' = f(t,u), & t \in (0,1), \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}=(-\infty,+\infty))$ 为连续函数. 运用 Dancer 全局分歧定理建立了上述问题正解的全局分歧，并且获得了保证上述问题存在正解的若干最优充分条件.

关键词　Neumann 边值问题； Dancer 全局分歧定理；正解；最优条件

MR(2000) 主题分类　34B15

中图分类　O175.8

本文 2010 年 12 月 13 日收到. 2012 年 1 月 6 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11061030) 资助项目.

1 引言

近年来，许多学者对非线性二阶常微分方程 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} u''+\rho u+f(t,u)=0, & t\in(0,1), \\ u'(0)=0, & u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性及多解性进行了深入研究，其中 $\rho\in(-\infty,0)\cup(0,\pi^2/4)$ 为常数，并且获得了许多深刻的结果，见 [1–4] 及其参考文献．上述文献所用的主要工具为锥拉伸与锥压缩不动点定理 [5].

最近， [6] 研究了带一般微分算子的非线性 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -(p(t)u')'+q(t)u=f(t,u), & t\in(0,1), \\ u'(0)=0, & u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.2}$$

非平凡解及正解的存在性，其中 $p\in C^1[0,1]$, $q\in C[0,1]$ 满足 $p(t)>0$, $q(t)\geq 0$, $t\in[0,1]$, $f\in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. 运用拓扑度理论，该文建立了 Neumann 边值问题 (1.2) 非平凡解及正解的存在性结果． [6] 中的非线性项 f 是变号的且可以下无界．

然而，上述文献对 Neumann 边值问题正解存在性的研究都是在非共振情形下进行的，对于共振情形下 Neumann 边值问题正解存在性的研究却相对较少 (见 [7,8] 及其参考文献). 并且，共振情形下 Neumann 边值问题正解的全局分歧还没有被研究过．鉴于此，本文试图考虑二阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} u''=f(t,u), & t\in(0,1), \\ u'(0)=0, & u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

正解的全局分歧．本文总假定

(H1) $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数.

由于线性问题

$$\begin{cases} u''=0, & t\in(0,1), \\ u'(0)=0, & u'(1)=0 \end{cases}$$

有非平凡解 $u(\cdot)\equiv c\in\mathbb{R}$, 所以, 本文所考虑的问题 (1.3) 是共振问题. 进一步, 由 (H1) 可知非线性项 f 是变号的且是下无界的，这将会对问题 (1.3) 正解存在性的研究带来较大的困难. 此外, 在其他边值条件下的常微分方程边值问题正解的全局分歧已被许多作者研究过, 见 [9–14] 及其参考文献. 但是, 很少有文献研究非线性二阶常微分方程 Neumann 边值问题正解的全局分歧．本文的研究将会进一步丰富二阶常微分方程 Neumann 边值问题正解的存在性理论.

2　预备知识

本节将构造线性问题

$$\begin{cases} u''+a(t)u=0, & t\in(0,1),\\ u'(0)=0, & u'(1)=0 \end{cases} \tag{2.1}$$

的格林函数并讨论其性质. 假设函数 $a(\cdot)$ 满足

(H2) $a\in C[0,1]$ 且 $0<\underline{a}:=\inf\limits_{t\in[0,1]}\sqrt{a(t)},\ \overline{a}:=\sup\limits_{t\in[0,1]}\sqrt{a(t)}<\frac{\pi}{2}$;

或者

(H3) $a\in C[0,1]$ 且 $a(t)<0,\ t\in[0,1]$.

引理 2.1[15] 假设函数 $h(t,u,v)$ 在 $[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上连续，并且微分方程

$$u''(t)+h(t,u(t),u'(t))=0 \tag{2.2}$$

具有以下性质：

(i) 所有初值问题在整个区间 $[a,b]$ 上存在唯一解;

(ii) (2.2) 的两个不同的解在区间 $[a,b]$ 上的公共点不多于一个，即任意第一边值问题的解唯一，如果存在的话.

设 v 为在区间 $[a,b]$ 上满足 $v''(t)+h(t,v(t),v'(t))\geq 0$ 的二次连续可微函数，则

(1) 如果 u 为 (2.2) 的解，且与 v 在某点 $t_0\in[a,b]$ 的值与斜率均相等，则对于 $t\neq t_0$, 有 $v(t)\geq u(t)$;

(2) 如果 u 为 (2.2) 的解，且与 v 在 a, b 的值相等，则对于 $t\neq a,b$, 有 $v(t)\leq u(t)$. 以上各式的不等号可以全部颠倒过来.

引理 2.2[16] 假设 (H2) 成立. 设 φ 和 ψ 分别是初值问题

$$\begin{cases} \varphi''+a(t)\varphi=0, & t\in(0,1),\\ \varphi'(0)=0, & \varphi(0)=1 \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} \psi''+a(t)\psi=0, & t\in(0,1),\\ \psi'(1)=0, & \psi(1)=1 \end{cases}$$

的唯一解，则

(i) $\varphi(t)>0,\ t\in[0,1]$, 且 $\varphi'(t)<0,\ t\in(0,1]$;

(ii) $\psi(t)>0,\ \ t\in[0,1]$, 且 $\psi'(t)>0,\ \ t\in[0,1)$.

为方便起见，我们给出此引理的证明.

证　在此仅给出 (i) 的证明， (ii) 同理可证. 易见线性问题

$$\begin{cases} x''+\overline{a}^2x=0, & t\in(0,1),\\ x'(0)=0, & x(0)=1 \end{cases}$$

有唯一解 $x(t)=\cos\overline{a}t,\ t\in[0,1]$. 由 (H2) 可知 $\cos\overline{a}t>0,\ t\in[0,1]$. 另一方面,

$$(\cos\overline{a}t)''+a(t)\cos\overline{a}t=-\overline{a}^2\cos\overline{a}t+a(t)\cos\overline{a}t=(a(t)-\overline{a}^2)\cos\overline{a}t\le 0,\qquad t\in[0,1].$$

由引理 2.1 可知, $\cos\overline{a}t\le\varphi(t),\ t\in[0,1]$. 因此, $0<\cos\overline{a}t\le\varphi(t),\ t\in[0,1]$. 从而,

$$\varphi''(t)=-a(t)\varphi(t)<0,\qquad t\in[0,1].$$

这结合事实 $\varphi'(0)=0$ 可知 $\varphi'(t)<0,\ t\in[0,1]$.

引理 2.3[16] 假设 (H2) 成立. 则对任意的 $y\in C[0,1]$, 线性问题

$$\begin{cases} u''+a(t)u=y(t), & t\in(0,1),\\ u'(0)=0, & u'(1)=0 \end{cases}\tag{2.3}$$

等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s,\tag{2.4}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\psi'(0)}\begin{cases}\psi(t)\varphi(s), & 0\le s\le t\le 1,\\ \psi(s)\varphi(t), & 0\le t\le s\le 1.\end{cases}\tag{2.5}$$

注 2.1 由引理 2.2 可知, 格林函数 G 满足 $G(t,s)>0,\ (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$.

定义

$$m:=\min_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}G(t,s),\qquad M:=\max_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}G(t,s).\tag{2.6}$$

引理 2.4 假设 (H3) 成立. 设 α 和 β 分别是初值问题

$$\begin{cases}\alpha''+a(t)\alpha=0, & t\in(0,1),\\ \alpha'(0)=0, & \alpha(0)=1\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\beta''+a(t)\beta=0, & t\in(0,1),\\ \beta'(1)=0, & \beta(1)=1\end{cases}$$

的唯一解, 则

(i) $\alpha(t)>1,\ t\in(0,1]$, 且 $\alpha'(t)>0,\ t\in(0,1]$;

(ii) $\beta(t)>1,\ t\in[0,1)$, 且 $\beta'(t)<0,\ t\in[0,1)$.

证 仅给出 (i) 的证明, (ii) 的证明类似.

注意到 $\alpha(0)=1$ 蕴含了存在 0 的右邻域 $U(0)$, 使得 $\alpha(t)>0,\ t\in U(0)$.

我们宣称

$$\alpha(t)>0,\qquad t\in[0,1].\tag{2.7}$$

反设存在 $\delta\in(0,1]$, 使得

$$\alpha(\delta)=0\quad 且\quad \alpha(t)>0,\qquad t\in[0,\delta),\tag{2.8}$$

则

$$\alpha''(t) = -a(t)\alpha(t) > 0, \qquad t \in [0, \delta). \tag{2.9}$$

对 (2.9) 两边从 0 到 $t \in (0, \delta)$ 积分，再结合条件 (H3) 可知

$$\alpha'(t) > 0, \qquad t \in (0, \delta). \tag{2.10}$$

于是， $\alpha(\delta) > 1$, 这与 (2.8) 矛盾．因此， (2.7) 成立．进一步，由 (H3) 及 (2.7) 可知 $\alpha''(t) = -a(t)\alpha(t) > 0$, $t \in [0, 1]$. 这结合事实 $\alpha'(0) = 0$ 可得 $\alpha'(t) > 0$, $t \in (0, 1]$, 于是， $\alpha(1) > 1$ 且 $\alpha'(1) > 0$.

引理 2.5 假设 (H3) 成立．则对任意的 $h \in C[0, 1]$, 线性问题

$$\begin{cases} u'' + a(t)u = h(t), & t \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

等价于积分方程

$$u(t) = \int_0^1 K(t, s)h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, 1], \tag{2.12}$$

其中

$$K(t, s) = \frac{1}{\beta'(0)} \begin{cases} \alpha(t)\beta(s), & 0 \le t \le s \le 1, \\ \alpha(s)\beta(t), & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

证　首先证明 (2.11) 的唯一解可以由 (2.12) 表示.

由引理 2.4 可知 $\alpha(0)\beta'(0) - \beta(0)\alpha'(0) = \beta'(0) \neq 0$, 所以微分方程 $u'' + a(t)u = 0$ 有两个已知的线性无关解 α 及 β. 由常数变易法可证，问题 (2.11) 的唯一解为

$$u(t) = \int_0^1 K(t, s)h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, 1],$$

其中格林函数 K 如 (2.13) 定义．另一方面，由 (2.12) 可知

$$u(t) = \int_0^t \frac{1}{\beta'(0)}\beta(t)\alpha(s)h(s)\,\mathrm{d}s + \int_t^1 \frac{1}{\beta'(0)}\beta(s)\alpha(t)h(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.14}$$

$$u'(t) = \beta'(t)\int_0^t \frac{1}{\beta'(0)}\alpha(s)h(s)\,\mathrm{d}s + \alpha'(t)\int_t^1 \frac{1}{\beta'(0)}\beta(s)h(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} u''(t) = {} & \beta''(t)\int_0^t \frac{\alpha(s)h(s)}{\beta'(0)}\,\mathrm{d}s + \alpha''(t)\int_t^1 \frac{\beta(s)h(s)}{\beta'(0)}\,\mathrm{d}s \\ & + \beta'(t)\frac{\alpha(t)h(t)}{\beta'(0)} - \alpha'(t)\frac{\beta(t)h(t)}{\beta'(0)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

从而

$$u''(t)+a(t)u(t) = \frac{1}{\beta'(0)}\big(\alpha(t)\beta'(t)-\beta(t)\alpha'(t)\big)h(t) = \frac{1}{\beta'(0)}\big(\alpha(0)\beta'(0)-\beta(0)\alpha'(0)\big)h(t) = h(t).$$

最后，由 (2.15) 容易验证 $u'(0) = 0$ 且 $u'(1) = 0$.

注 2.2 由引理 2.4 可知，格林函数 K 满足 $K(t,s)<0,\ (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$.

定义

$$l:=\min_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}K(t,s),\qquad L:=\max_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}K(t,s).\tag{2.17}$$

最后，我们叙述一个关于参数化非线性算子方程正解集合的全局结构的结果．此结果为 Dancer 全局分歧定理 (见 [17, 定理 2]) 的推论．

假设 $\mathbb{E}$ 为一个实 Banach 空间，其上范数为 $\|\cdot\|$．令 $K\subset\mathbb{E}$ 为一个锥．一个非线性映射 $A:[0,\infty)\times K\to\mathbb{E}$ 叫做是正的，如果 $A([0,\infty)\times K)\subset K$．上述非线性映射 A 叫做是 K- 全连续的，如果算子 A 连续且把 $[0,\infty)\times K$ 中的有界子集映为 $\mathbb{E}$ 中的相对紧集．最后，一个定义在 $\mathbb{E}$ 上的正线性算子 V 叫做是 A 的线性弱函数，如果 $A(\lambda,u)\geq\lambda V(u),\ (\lambda,u)\in[0,\infty)\times K$. 对于定义在 $\mathbb{E}$ 上的连续线性算子 B, 我们用 $r(B)$ 表示算子 B 的谱半径.

引理 2.6[11] 假设

(i) K 有非空内部且 $\mathbb{E}=\overline{K-K}$.

(ii) $A:[0,\infty)\times K\to\mathbb{E}$ 为 $K-$ 全连续的正算子．对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 有 $A(\lambda,0)=0$; 对任意的 $u\in K$, 有 $A(0,u)=0$, 且 $A(\lambda,u)=\lambda Bu+F(\lambda,u)$, 其中 $B:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ 为定义在 $\mathbb{E}$ 上的强正线性紧算子且满足 $r(B)>0$, $F:[0,\infty)\times K\to\mathbb{E}$ 满足：当 $\|u\|\to0$ 时, $\|F(\lambda,u)\|=\circ(\|u\|)$ 对 λ 局部一致成立,

则存在集合

$$\mathcal{D}_K(A)=\big\{(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K:u=A\lambda u,\quad u\neq0\big\}\cup\big\{(r(B)^{-1},0)\big\}$$

的一个无界连通子集 $\mathcal{C}$, 使得 $(r(B)^{-1},0)\in\mathcal{C}$. 进一步，若 A 有一个线性弱函数 V, 且存在一个 $(\mu,y)\in(0,\infty)\times K$, 使得 $\|y\|=1$ 且 $\mu Vy\geq y$, 则 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{D}_K(A)\cap([0,\mu]\times K)$ 中存在.

3 主要结果及证明

定义锥

$$P^+=\Big\{u\in C[0,1]:u(t)\geq0,\ t\in[0,1],\quad \min_{t\in[0,1]}u(t)\geq\frac{m}{M}\|u\|_\infty\Big\},$$

其中 $\|\cdot\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}u(t)$. 对常数 $0<r<R$, 定义

$$\gamma^*(t):=\frac{f(t,\frac{m}{M}r)+a(t)\frac{m}{M}r}{\frac{m}{M}r},\qquad \Gamma^*(t):=\frac{f(t,\frac{M}{m}R)+a(t)\frac{M}{m}R}{\frac{M}{m}R};\tag{3.1}$$

$$\widetilde{f}(t,u)=\begin{cases}\Gamma^*(t)u, & u\geq\dfrac{M}{m}R,\\ f(t,u)+a(t)u, & \dfrac{m}{M}r\leq u\leq\dfrac{M}{m}R,\\ \gamma^*(t)u, & 0\leq u\leq\dfrac{m}{M}r,\end{cases}\tag{3.2}$$

$$\underline{\gamma}(t) := \min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[\frac{m}{M}r, r\Big]\Big\},$$

$$\overline{\Gamma}(t) := \max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[R, \frac{M}{m}R\Big]\Big\}; \tag{3.3}$$

$$\overline{\gamma}(t) := \max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[\frac{m}{M}r, r\Big]\Big\},$$

$$\underline{\Gamma}(t) := \min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[R, \frac{M}{m}R\Big]\Big\}. \tag{3.4}$$

定理 3.1 假设 (H1), (H2) 成立．设存在常数 $0 < r < R$, 使得

$$f(t,u)+a(t)u > 0, \qquad (t,u) \in [0,1] \times \Big[\frac{m}{M}r, \frac{M}{m}R\Big], \tag{$A+$}$$

则当条件

(i) $\mu_0(\underline{\gamma}) < 1 < \mu_0(\overline{\Gamma})$;

(ii) $\mu_0(\underline{\Gamma}) < 1 < \mu_0(\overline{\gamma})$

之一成立时， Neumann 边值问题 (1.3) 有一个正解，其中 $\mu_0(\beta)$ 表示线性特征值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)u = \mu\beta(t)u, \qquad t \in (0,1), \\ u'(0)=0, \qquad u'(1)=0 \end{cases} \tag{3.5}$$

的主特征值.

注 3.1 假设 (H2) 成立且 $\beta(t) > 0,\ t \in [0,1]$, 则 $\mu_0(\beta) > 0$. 进一步， $\mu_0(\beta)$ 是简单的，并且它对应的特征函数 $\psi_0 \in \mathrm{int}\, P^+$. 事实上，问题 (3.5) 等价于算子方程

$$u(t) = \mu\int_0^1 G(t,s)\beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s =: \mu\mathcal{A}u(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

因为 $G(t,s) > 0,\ (t,s) \in [0,1]\times[0,1]$, 于是

$$\mathcal{A}(P^+) \subset \mathrm{int}\ P^+. \tag{3.7}$$

由 Krein-Rutman 定理 [5] 易知上述结论成立.

定理 3.1 的证明　仅给出 (i) 的证明．(ii) 的证明类似.

为了研究问题 (1.3) 正解的存在性．我们需要考虑参数化问题

$$\begin{cases} u''+a(t)u = \mu\widetilde{f}(t,u), \qquad t \in (0,1), \\ u'(0)=0, \qquad u'(1)=0 \end{cases} \tag{3.8}$$

注意到 $\widetilde{f}(t,u) = \gamma^*(t)u + \xi(t,u),\ \widetilde{f}(t,s) = \Gamma^*(t)s + \zeta(t,s)$ 且

$$\lim_{u\to 0}\frac{\xi(t,u)}{u} = 0, \qquad \lim_{s\to+\infty}\frac{\zeta(t,s)}{s} = 0, \qquad t \in [0,1].$$

于是，问题 (3.8) 可以改写为

$$\begin{cases} u''+a(t)u = \mu\gamma^*(t)u + \mu\xi(t,u), \qquad t \in (0,1), \\ u'(0)=0, \qquad u'(1)=0. \end{cases} \tag{3.9}$$

记 $E=\{u\in C^1[0,1]:u'(0)=0,\ u'(1)=0\}$, 其上范数为 $\|u\|=\max\{\|u\|_\infty,\ \|u'\|_\infty\}$. 令

$$\Phi^+:=\{u\in C^1[0,1]:u(t)>0,\ t\in[0,1],\quad u'(0)=0,\ u'(1)=0\}.$$

由引理 2.6 可知: 存在问题 (3.9) 解的一个连通分支 C^+, 且 C^+ 在 Φ^+ 中连接 $(\mu_0(\gamma^*),0)$ 到无穷远. 进一步, $C^+\backslash\{(\mu_0(\gamma^*),0)\}\subset\Phi^+$.

下面，我们分两步来证明本定理.

第 1 步 我们将证明连通分支 C^+ 在 Φ^+ 中连接 $(\mu_0(\gamma^*),0)$ 到 $(\mu_0(\Gamma^*),\infty)$. 于是, 问题 (3.9) 至少有一个正解 u.

假设 $(\eta_k,y_k)\in C^+$ 且满足 $|\eta_k|+\|y_k\|\to\infty,\ k\to\infty$. 我们首先证明 $\{\eta_k\}$ 有界.

事实上，由 $\widetilde{f}$ 的定义及假设 (A+) 可知：存在 $e\in C[0,1],\ e(t)>0,\ t\in[0,1]$, 使得

$$\frac{\widetilde{f}(t,s)}{s}\geq e(t),\qquad (t,s)\in[0,1]\times(0,\infty).\tag{3.10}$$

我们宣称：若 $\eta_k\to\infty$, 则 y_k 在区间 $[0,1]$ 上变号.

由于 $y_k''(t)+a(t)y_k=\eta_k\frac{\widetilde{f}(t,y_k)}{y_k}y_k$, 定义线性算子 $Ly_k:=y_k''(t)+a(t)y_k$, 则

$$Ly_k=\eta_k\frac{\widetilde{f}(t,y_k)}{y_k}y_k.$$

结合事实 (3.10) 可知 $\eta_k\frac{\widetilde{f}(t,y_k)}{y_k}y_k\to\infty,\ k\to\infty$. 于是，由 Sturm 比较定理可知对充分大的 k, y_k 在区间 $[0,1]$ 中至少有一个零点，这与 $y_k>0$ 矛盾！因此， $\{\eta_k\}$ 是有界的. 进一步， $\|y_k\|\to\infty,\ k\to\infty$.

现在， $\{(\eta_k,y_k)\}$ $(k\in\mathbb{N})$ 满足

$$\begin{cases} y_k''+a(t)y_k=\eta_k\Gamma^*(t)y_k+\eta_k\zeta(t,y_k), & t\in(0,1),\\ y_k'(0)=0, \qquad y_k'(1)=0.\end{cases}\tag{3.11}$$

令 $v_k:=\frac{y_k}{\|y_k\|}$, 则

$$\begin{cases} v_k''+a(t)v_k=\eta_k\Gamma^*(t)v_k+\eta_k\dfrac{\zeta(t,y_k)}{y_k}v_k, & t\in(0,1),\\ v_k'(0)=0, \qquad v_k'(1)=0.\end{cases}\tag{3.12}$$

(3.12) 等价于

$$v_k(t)=\eta_k\int_0^1G(t,s)\Big(\Gamma^*(s)v_k(s)+\frac{\zeta(s,y_k(s))}{y_k(s)}v_k(s)\Big)\,\mathrm{d}s,$$

令 $w_k(t):=\Gamma^*(t)v_k(t)+\frac{\zeta(t,y_k(t))}{y_k(t)}v_k(t)$. 因为 $\widetilde{f}(t,y_k(t))=\Gamma^*(t)y_k(t)+\zeta(t,y_k(t))$, 由 $\widetilde{f}$

的定义结合事实 $y_k(t) > 0,\ t \in [0,1]$ 可知

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{\zeta(t,y_k(t))}{y_k(t)}\Big| \le \big|\Gamma^*(t)\big| + \Big|\frac{\widetilde{f}(t,y_k(t))}{y_k(t)}\Big| \\
\le&\big|\Gamma^*(t)\big| + \big|\gamma^*(t)\big| + \big|\Gamma^*(t)\big| + \big|a(t)\big| + \max\Big\{\Big|\frac{f(t,y_k(t))}{y_k(t)}\Big| :\ \frac{mr}{M} \le y_k(t) \le \frac{MR}{m}\Big\} \\
\le&\big|\Gamma^*(t)\big| + \big|\gamma^*(t)\big| + \big|\Gamma^*(t)\big| + \big|a(t)\big| + \max\Big\{\Big|\frac{f(t,\tau)}{\tau}\Big| :\ \frac{mr}{M} \le \tau \le \frac{MR}{m}\Big\},
\end{aligned}
$$

于是，存在一个不依赖于 k 的函数 $\sigma \in C[0,1]$, 使得 $\big|\frac{\zeta(t,y_k(t))}{y_k(t)}\big| \le \sigma(t),\ t \in [0,1]$. 因此，由 (A+) 及 (3.1) 可得 $\{w_k(t)\}$ $(k \in \mathbb{N})$ 在 $C[0,1]$ 中一致有界．并且，不难验证

$$\Big\{\eta_k \int_0^1 G(t,s) w_k(s)\,\mathrm{d}s\Big\} \subset C^1[0,1],$$

这结合事实 $C^1[0,1]$ 紧嵌入 $C[0,1]$ 表明：存在 v_k 的子列 (不妨仍记为 v_k), 使得对某个 $v^* \in C[0,1]$ 及 $\eta^* \in [0,\infty)$, 有 $v_k \to v^*$ 且 $\eta_k \to \eta^*$ $(k \to \infty)$. 运用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$v^*(t) = \eta^* \int_0^1 G(t,s)\Gamma^*(s) v^*(s)\,\mathrm{d}s.$$

这蕴含了 $v^* \in C^2[0,1]$ 且

$$\begin{cases} {v^*}'' + a(t) v^* = \eta^* \Gamma^*(t) v^*, & t \in (0,1), \\ {v^*}'(0) = 0, \quad {v^*}'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

于是， $\eta^* = \mu_0(\Gamma^*)$. 因此，连通分支 C^+ 在 Φ^+ 中连接 $\big(\mu_0(\gamma^*),0\big)$ 及 $\big(\mu_0(\Gamma^*),\infty\big)$.

第 2 步 我们证明 u 确实为 Neumann 边值问题 (1.3) 的解.

为此，我们只需证明问题

$$\begin{cases} u'' + a(t) u = \widetilde{f}(t,u), & t \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

没有正解 y 能够满足条件 $\|y\|_\infty < r$ 或 $\|y\|_\infty > \frac{M}{m}R$.

事实上，若问题 (3.14) 有一个正解 y 满足 $\|y\|_\infty < r$, 则由 (3.2) 及 (3.3) 可知

$$\frac{\widetilde{f}(t,y(t))}{y(t)} \ge \underline{\gamma}(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{3.15}$$

因为

$$\begin{cases} y''(t) + a(t) y(t) = 1 \cdot \dfrac{\widetilde{f}(t,y(t))}{y(t)} y(t), & t \in (0,1), \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

且

$$\begin{cases} w''(t) + a(t) w(t) = \mu_0(\underline{\gamma})\underline{\gamma}(t) w(t), & t \in (0,1), \\ w'(0) = 0, \quad w'(1) = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

其中 w 为 $\mu_0(\underline{\gamma})$ 所对应的特征函数且 $w>0$. 对问题 (3.16) 的方程两边同乘以 w, 对问题 (3.17) 的方程两边同乘以 y, 对所得的两个新方程两边从 0 到 1 积分，然后做差可得

$$\int_0^1 \Big[\frac{\widetilde{f}(t,y(t))}{y(t)}-\mu_0(\underline{\gamma})\underline{\gamma}(t)\Big]y(t)w(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

这结合 (3.15) 表明 $\mu_0(\underline{\gamma})\geq 1$. 但是，这与假设 $\mu_0(\underline{\gamma})<1$ 矛盾！

同样地，若问题 (3.14) 有一个正解 y 满足 $\|y\|_\infty>\frac{M}{m}R$, 则由 (3.2) 及 (3.3) 可知

$$\frac{\widetilde{f}(t,y(t))}{y(t)}\leq\overline{\Gamma}(t),\qquad t\in[0,1]. \tag{3.18}$$

因为

$$\begin{cases} y''(t)+a(t)y(t)=1\cdot\dfrac{\widetilde{f}(t,y(t))}{y(t)}y(t), & t\in(0,1),\\ y'(0)=0,\qquad y'(1)=0 \end{cases} \tag{3.19}$$

且

$$\begin{cases} z''(t)+a(t)z(t)=\mu_0(\overline{\Gamma})\overline{\Gamma}(t)z(t), & t\in(0,1),\\ z'(0)=0,\qquad z'(1)=0, \end{cases} \tag{3.20}$$

其中 z 为 $\mu_0(\overline{\Gamma})$ 所对应的特征函数且 $z>0$. 对问题 (3.19) 的方程两边同乘以 z, 对问题 (3.20) 的方程两边同乘以 y, 对所得的两个新方程两边从 0 到 1 积分，然后做差可得

$$\int_0^1 \Big[\frac{\widetilde{f}(t,y(t))}{y(t)}-\mu_0(\overline{\Gamma})\overline{\Gamma}(t)\Big]y(t)z(t)\,dt=0.$$

于是， $\mu_0(\overline{\Gamma})\leq 1$. 但是，这与假设 $\mu_0(\overline{\Gamma})>1$ 矛盾！

定义

$$b(t):=\frac{f(t,-\frac{m}{M}r)-a(t)\frac{m}{M}r}{-\frac{m}{M}r},\qquad B(t):=\frac{f(t,-\frac{M}{m}R)-a(t)\frac{M}{m}R}{-\frac{M}{m}R}; \tag{3.21}$$

$$\widehat{f}(t,u)=\begin{cases} B(t)u, & u\leq-\dfrac{M}{m}R,\\ f(t,u)+a(t)u, & -\dfrac{M}{m}R\leq u\leq-\frac{m}{M}r,\\ b(t)u, & u\geq-\frac{m}{M}r, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &\underline{b}(t):=\min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[-r,-\frac{mr}{M}\Big]\Big\},\\ &\overline{B}(t):=\max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[-\frac{MR}{m},-R\Big]\Big\}; \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} &\overline{b}(t):=\max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[-r,-\frac{mr}{M}\Big]\Big\},\\ &\underline{B}(t):=\min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[-\frac{MR}{m},-R\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

类似于定理 3.1 的证明，我们可以获得

定理 3.2 假设 (H1)–(H2) 成立．设存在常数 $0<r<R$, 使得

$$f(t,u)+a(t)u<0, \qquad (t,u)\in[0,1]\times\Big[-\frac{M}{m}R,-\frac{m}{M}r\Big], \tag{$B+$}$$

则当条件

(i) $\mu_0(\underline{b})<1<\mu_0(\overline{B})$;

(ii) $\mu_0(\underline{B})<1<\mu_0(\overline{b})$

之一成立时， Neumann 边值问题 (1.3) 有一个负解.

定义锥

$$P^-=\Big\{u\in C[0,1]:\ u(t)\ge 0,\ t\in[0,1],\ \min_{t\in[0,1]}u(t)\ge\frac{L}{l}\|u\|_\infty\Big\}.$$

令 $\mu_0(\beta)$ 表示线性特征值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)u=\mu\beta(t)u, & t\in(0,1),\\ u'(0)=0, \qquad u'(1)=0 \end{cases}$$

的主特征值，则由 Krein-Rutman 定理 [5] 可知：若 (H3) 成立且 $\beta(t)<0,\ t\in[0,1]$, 则 $\mu_0(\beta)>0$. 进一步， $\mu_0(\beta)$ 是简单的，它对应的特征函数 $\psi_0\in\operatorname{int}P^-$.

定义

$$\begin{aligned}
\underline{q}(t)&:=\min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[\frac{Lr}{l},r\Big]\Big\},\\
\overline{Q}(t)&:=\max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[R,\frac{lR}{L}\Big]\Big\};
\end{aligned}\tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\overline{q}(t)&:=\max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[\frac{Lr}{l},r\Big]\Big\},\\
\underline{Q}(t)&:=\min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s}:s\in\Big[R,\frac{lR}{L}\Big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

类似于定理 3.1 的证明，我们可以证明

定理 3.3 假设 (H1) 及 (H3) 成立．设存在常数 $0<r<R$, 使得

$$f(t,u)+a(t)u<0, \qquad (t,u)\in[0,1]\times\Big[\frac{L}{l}r,\frac{l}{L}R\Big], \tag{$A-$}$$

则当条件

(i) $\mu_0(\overline{q})<1<\mu_0(\underline{Q})$;

(ii) $\mu_0(\overline{Q})<1<\mu_0(\underline{q})$

之一成立时， Neumann 边值问题 (1.3) 有一个正解.

令

$$\underline{p}(t) := \min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[-r, -\frac{Lr}{l}\Big]\Big\},$$
$$\overline{P}(t) := \max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[-\frac{lR}{L}, -R\Big]\Big\}; \tag{3.27}$$
$$\overline{p}(t) := \max\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[-r, -\frac{Lr}{l}\Big]\Big\},$$
$$\underline{P}(t) := \min\Big\{\frac{f(t,s)+a(t)s}{s} : s \in \Big[-\frac{lR}{L}, -R\Big]\Big\}. \tag{3.28}$$

定理 3.4 假设 (H1) 及 (H3) 成立. 设存在常数 $0 < r < R$, 使得

$$f(t,u) + a(t)u > 0, \qquad (t,u) \in [0,1] \times \Big[-\frac{l}{L}R, -\frac{L}{l}r\Big], \tag{$B-$}$$

则当条件

(i) $\mu_0(\overline{p}) < 1 < \mu_0(\underline{P})$;

(ii) $\mu_0(\overline{P}) < 1 < \mu_0(\underline{p})$

之一成立时， Neumann 边值问题 (1.3) 有一个负解.

最后，我们将举例说明在定理 3.1 中，条件 (i) $\mu_0(\underline{\gamma}) < 1 < \mu_0(\overline{\Gamma})$ 及 (ii) $\mu_0(\underline{\Gamma}) < 1 < \mu_0(\overline{\gamma})$ 是保证 (1.3) 具有正解的最优条件.

例 3.1 考虑 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} u'' = cu, & t \in (0,1), \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

正解的存在性，其中 $c > 0$ 为充分小的常数，显然， $f(t,u) = cu$ 满足条件 (H1). 取正常数 c_1, c_2 满足 $c_1 < c_2 < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}$. 选取函数 $a \in C[0,1]$ 且满足 $\frac{1}{8} + c_1 \le a(t) \le \frac{1}{8} + c_2$, 则条件 (H2) 成立. 于是，由引理 2.3 及注 2.1 可知格林函数 G 满足 $G(t,s) > 0$, $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, 从而,

$$0 < m := \min_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} G(t,s) < M := \max_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} G(t,s).$$

因为 $f(t,u) + a(t)u = (a(t)+c)u \ge \big(\frac{1}{8} + c_1 + c\big)u > 0,\ u > 0$, 所以，条件 (A+) 成立.

考虑问题

$$\begin{cases} u'' + a(t)u = a(t)u + cu, & t \in (0,1), \\ u'(0) = 0, & u'(1) = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

此时， $\underline{\gamma}(t) = a(t) + c = \overline{\Gamma}(t)$ 且 $\mu_0(\underline{\gamma}) = \mu_0(a(t)+c) = \mu_0(\overline{\Gamma})$.

经简单计算，特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \Big(\dfrac{1}{8} + c_j\Big)u = \mu\Big(\dfrac{1}{8} + c_j + c\Big)u, & t \in (0,1), \quad j = 1,\ 2, \\ u'(0) = 0, \qquad u'(1) = 0 & \end{cases}$$

的主特征值为

$$\mu_0\Big(\frac{1}{8}+c_j+c\Big)=\frac{1+8c_j}{1+8(c_j+c)},\qquad j=1,2.$$

运用事实

$$\mu_0\Big(\frac{1}{8}+c_1+c\Big)\leq\mu_0(\underline{\gamma})=\mu_0(\overline{\Gamma})\leq\mu_0\Big(\frac{1}{8}+c_2+c\Big)<1$$

可知：尽管 $\mu_0(\overline{\Gamma})$ 比 1 略小，但是，问题 (3.30) 不再有正解．否则，若 u 为问题 (3.30) 的一个正解，对问题 (3.30) 的方程两边从 0 到 1 积分可得 $c\int_0^1u(t)\,\mathrm{d}t\equiv0$. 矛盾！

注 3.2 类似于例 3.1 的讨论可知，定理 3.2–3.4 中的条件均为最优条件.

参　考　文　献

[1] Sun J P, Li W T, Cheng S S. Three Positive Solutions for Second-order Neumann Boundary Value Problems. *Appl. Math. Lett.*, 2004, 17: 1079–1084

[2] Sun Y, Sun Y P. Positive Solutions for Singular Semi-positone Neumann Boundary Value Problems. *Electronic J. Differential Equations*, 2004, 2004: 1–8

[3] Sun Y, Cho Y J, O'Regan D. Positive Solutions for Singular Second-order Neumann Boundary Value Problems via A Cone Fixed Point Theorem. *Appl. Math. Comput.*, 2009, 210: 80–86

[4] Bensedik A, Bouchekif M. Symmetry and Uniqueness of Positive Solutions for a Neumann Boundary Value Problem. *Appl. Math. Lett.*, 2007, 20: 419–426

[5] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1985

[6] Li Z L. Existence of Positive Solutions of Superlinear Second-order Neumann Boundary Value Problem. *Nonlinear Anal.*, 2010, 72: 3216–3221

[7] Miciano Agnes R, Shivaji R. Multiple Positive Solutions for a Class of Semipositone Neumann Two-point Boundary Value Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, 178: 102–115

[8] Bonanno G, D'Agui G. A Critical Point Theorem and Existence Results for a Nonlinear Boundary Value Problem. *Nonlinear Anal.*, 2010, 72: 1977–1982

[9] Ma R Y, Thompson B. Nodal Solutions for Nonlinear Eigenvalue Problems. *Nonlinear Anal.*, 2004, 59: 707–718

[10] Ma R Y, Thompson B. Multiplicity Results for Second-order Two-point Boundary Value Problems with Superlinear or Sublinear Nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, 303: 726–735

[11] Ma R Y. Existence of Positive Solutions of a Fourth-order Boundary Value Problem. *Appl. Math. Comput.*, 2005, 168: 1219–1231

[12] Ma R Y. Nodal Solutions for A Fourth-order Two-point Boundary Value Problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, 314: 254–265

[13] Ma R Y. Nodal Solutions of Boundary Value Problems of Fourth-order Ordinary Differential Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, 319: 424–434

[14] Ma R Y, Xu J. Bifurcation From Interval and Positive Solutions of A Nonlinear Fourth-order Boundary Value Problem. *Nonlinear Anal.*, 2010, 72: 113–122

[15] Bailey P B, Shampine L F, Waltman P E. 非线性两点边值问题. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1985 (黄启昌，史希福，魏俊杰译)

[16] 闫东明. 几类二阶变系数常微分 Neumann 边值问题正解的存在性. 兰州：西北师范大学硕士学位论文， 2010

[17] Dancer E N. Global Solution Branches for Positive Mappings. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1973, 52: 181–192

Global Bifurcation of Positive Solutions of Neumann Boundary Value Problems for Second-order O.D.E.

CHEN Ruipeng

(*College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070)

(*E-mail: ruipengchen@126.com*)

MA Ruyun

(*College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070)

(*E-mail: mary@nwnu.edu.cn*)

YAN Dongming

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu* 610064)

(*E-mail: yandong_ming@126.com*)

Abstract In this paper, we are concerned with the existence of positive solutions of the following second-order Neumann boundary value problem

$$\begin{cases} u'' = f(t,u), \qquad t \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \qquad u'(1) = 0, \end{cases}$$

where $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$) is continuous. By using Dancer's global bifurcation theorem, we estabish the global bifurcation of positive solutions of the above problem. Moreover, we obtain several optimal sufficient conditions which guarantee that the above problem has at least one positive solution.

Key words Neumann boundary value problems; Dancer's global bifurcation theorem; positive solutions; optimal conditions

MR(2000) Subject Classification 34B15

Chinese Library Classification O175.8