第 35 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 35 No. 4
2012 年 7 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　July, 2012

一类具有无穷时滞中立型非稠定脉冲随机泛函微分方程积分解的存在性 *

何世峰

(巢湖职业技术学院基础部，巢湖 238000)

Sotiris K. Ntouyas

(艾奥尼纳大学数学系，艾奥尼纳，希腊 45110)

任　永

(安徽师范大学数学系，芜湖 241000)

(E-mail: renyong@126.com)

摘　要　本文讨论了一类具有无穷时滞中立型非稠定脉冲随机泛函微分方程，利用 Sadovskii 不动点原理等工具得到了其积分解的存在性，给出其在一类二阶无穷时滞中立型非稠定脉冲随机偏微分方程积分解的存在性中的应用.

关键词　泛函随机微分方程；中立型方程；脉冲方程；积分解；非稠定算子

MR(2000) 主题分类　60H10; 34K50; 34K30

中图分类　O211.6

1　引言

本文主要讨论如下具有无穷时滞中立型非稠定脉冲随机泛函微分方程积分解的存在性：

$$\mathrm{d}F(t,x_t) = AF(t,x_t)\,\mathrm{d}t + f(t,x_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,x_t)\,\mathrm{d}w(t), t\in J:=[0,T], \tag{1.1}$$

$$\triangle x(t_k) = I_k(x_{t_k}), \qquad k=1,2,\cdots,m, \tag{1.2}$$

$$x_0=\phi\in\mathcal{B}. \tag{1.3}$$

这里状态 $x(\cdot)$ 取值于一个实可分希尔伯特空间 H, 其内积和范数分别为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$.

本文 2009 年 12 月 7 日收到. 2012 年 6 月 15 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10901003), 安徽省杰出青年基金 (1108085J08), 教育部科学技术研究重点项目 (211077) 以及安徽省自然科学基金 (10040606Q30) 资助项目.

$A: D(A)\subset H\to H$ 是一闭算子, 其定义域 $D(A)$ 在 H 中为非稠密的. 对于 $t\geq 0$ 和时滞函数 $x_t:(-\infty,0]\to H$, 我们有 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, 其取值于相空间 $\mathcal{B}$(关于该空间的详细介绍在本文第 2 节). 假设 K 是另一个可分希尔伯特空间，其内积和范数分别为 $(\cdot,\cdot)_K$ 和 $\|\cdot\|_K$. $\{w(t):t\geq 0\}$ 为取值于 K 的具有协方差算子 Q 的布朗运动. $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ 为完备带流概率空间, 其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 为由布朗运动 $\{w(t):t\geq 0\}$ 所生成的自然 σ- 代数流. 假设 $F(t,\phi)=\phi(0)-g(t,\phi)$. $g: J\times\mathcal{B}\to H$, $f: J\times\mathcal{B}\to H$ 以及 $\sigma: J\times\mathcal{B}\to L_Q(K,H)$ 为三个可测映射, 其中 $L_Q(K,H)$ 表示从 K 到 H 的有界线性算子族组成的具有 Q-Hilbert-Schmidt 范数的 Banach 空间. 初始值 $\phi=\{\phi(t): -\infty<t\leq 0\}$ 是一个独立于布朗运动 w 的，具有有限二阶矩， $\mathcal{F}_0$- 适应的 $\mathcal{B}$- 值随机过程. $I_k:\mathcal{B}\to H$, $k=1,2,\cdots,m$ 为满足一定条件的函数. 此外，设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$ 为一些预先给定的点. $\Delta\xi(t)$ 表示函数 ξ 在 t 时的跳高，其表现形式为 $\Delta\xi(t)=\xi(t^+)-\xi(t^-)$.

由于在力学、电气工程、生物医学以及生态学等领域中的重要应用，中立型脉冲发展方程得到了很多研究者的极大兴趣，关于这方面的工作可见 [1–5]. 上述工作中发展方程中的算子 A 是一个闭的，稠定的线性算子. 然而，当我们考虑 $[0,1]$ 上具有 Dirichlet 边界条件的热方程时， $C([0,1],\mathbf{R})$ 上算子 $A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的定义域

$$D(A)=\left\{\psi\in C^2([0,1],\mathbf{R}):\psi(\mathbf{0})=\psi(\mathbf{1})=\mathbf{0}\right\}$$

在上确界范数意义下在 $C([0,1],\mathbf{R})$ 中为非稠密的. 基于此，一些学者研究了具有非稠定算子的发展方程或泛函型微分包含，这方面的系列工作可以参阅 [6–9] 等.

确定性的系统往往是理想化的模型，时常会受到噪声的干扰. 此时，我们就有必要研究随机系统. 作为确定性发展方程的拓广，随机发展方程的研究受到了越来越多的关注. 这方面的工作进展请见 [10] 及该文的大量参考文献. 特别地，近来 Benchohra 等 [11] 给出了一类具有有限时滞非局部初始条件的半线性非稠定随机发展方程积分解的存在性.

受到上述工作的启发，本文主要研究具有形式 (1.1)–(1.3) 的无穷时滞中立型非稠定脉冲随机泛函微分方程积分解的存在性. 通过 Sadovskii 不动点原理等工具，我们得到了其积分解的一些存在性的结果. 作为应用，给出了一类二阶无穷时滞中立型非稠定脉冲随机偏微分方程积分解的存在性.

文章共分为 3 节. 第 2 节给出一些预备知识. 第 3 节给出本文的主要结论. 最后一节给出应用的一个例子.

2 预备知识

在本节中，我们简要地给出一些预备知识，详细描述可以参考 [12] 以及 [13].

设 $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ 为完备带流概率空间, 其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 为由布朗运动 $\{w(t):t\geq 0\}$ 所生成的自然 σ- 代数流, 其中 $\{w(t):t\geq 0\}$ 是一个 K- 值柱布朗运动, 其协方差算子为 $Q\geq 0$. 设 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 K 的标准正交基. 记 $\mathrm{Tr(Q)}=\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\infty}\lambda_{\mathrm{i}}=\lambda<\infty$, 则有 $Qe_i=\lambda_i e_i$. 进而有

$w(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}w_i(t)e_i$, 其中 $\{w_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 为一列相互独立的一维布朗运动. 设 $\psi\in L(K,H)$, 定义

$$\|\psi\|_Q^2=\mathrm{Tr}(\psi Q\psi^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\big\|\sqrt{\lambda_n}\psi e_n\big\|^2.$$

如果 $\|\psi\|_Q<\infty$, 则称 ψ 为 Q-Hilbert-Schmidt 算子. 以 $L_Q(K,H)$ 表示 Q-Hilbert-Schmidt 算子 $\psi:K\to H$ 的全体所构成的集合，则在由范数 $\|\cdot\|_Q$ (其中 $\|\psi\|_Q^2=(\psi,\psi)$) 诱导拓扑下作为 $L(K,H)$ 的子空间 $L_Q(K,H)$ 的完备化是一个希尔伯特空间.

下文中，以 $L_2(\Omega,\mathcal{F},P;H)\equiv L_2(\Omega,H)$ 表示强可测， H 值的平方可积随机变量的全体所构成的集合. 在范数 $\|x(\cdot)\|_{L_2}=\big(E\|x(\omega)\|^2\big)^{1/2}$ 下， $L_2(\Omega,H)$ 是一 Banach 空间. 以 $C\big(J,L_2(\Omega,H)\big)$ 表示由 J 到 $L_2(\Omega,H)$ 的连续映射 $\{x(t):t\in J\}$ 所构成的满足条件 $\sup\limits_{t\in J}E\|x(t)\|^2<\infty$ 的 Banach 空间，其一个常用而重要的子空间为 $L_2^0(\Omega,H)=\{f\in L_2(\Omega,H):f$ 是 $\mathcal{F}_0$- 可测的$\}$.

我们称函数 $u:[\nu,\tau]\to H$ 在区间 $[\nu,\tau]$ 上为标准化的分段连续函数如果 u 在 $(\nu,\tau]$ 上是分段连续且左连续的. 以 $\mathcal{PC}([\nu,\tau];H)$ 表示由 $[\nu,\tau]$ 到 H 的标准化连续， $\mathcal{F}_t$- 适应可测过程全体所构成的集合.

特别地， $\mathcal{PC}$ 表示由 $\mathcal{F}_t$- 适应可测， H 值随机过程 $\{u(t):t\in[0,T]\}$ 的全体所构成的集合，其中对于 $k=1,\cdots,m$, u 在 $t\neq t_k$ 处是连续的， $u(t_k^+)$ 存在， $u(t_k^-)=u(t_k)$. 对空间 $\mathcal{PC}$ 赋以范数 $\|u\|_{\mathcal{PC}}=\big(\sup\limits_{s\in J}E\|u(s)\|^2\big)^{1/2}$, 则 $(\mathcal{PC},\|\cdot\|_{\mathcal{PC}})$ 构成为一个 Banach 空间.

为简单起见，记 $t_0=0$, $t_{m+1}=T$. 对于 $u\in\mathcal{PC}$, $k=0,1,\cdots,m$, 记 $\widetilde{u}_k\in C\big([t_k,t_{k+1}];L_2(\Omega,H)\big)$:

$$\widetilde{u}_k(t)=\begin{cases}u(t), & t\in(t_k,t_{k+1}],\\ u(t_k^+), & t=t_k.\end{cases}\tag{2.1}$$

此外，对于 $B\subseteq\mathcal{PC}$, $k=0,1,\cdots,m$, 记 $\widetilde{B}_k=\{\tilde{u}_k:x\in B\}$.

引理 2.1 集合 $B\subseteq\mathcal{PC}$ 在 $\mathcal{PC}$ 中为相对紧的充要条件是 $\widetilde{B}_k$ 在 $C\big([t_k,t_{k+1}];L_2(\Omega,H)\big)$, $k=0,1,\cdots,m$ 中为相对紧的.

在无穷时滞系统的研究中，相空间的选取是非常重要的. 本文中，我们主要采用的是由 Hale, Kato[14] 引入的 $\mathcal{B}$ 空间. 为建立 $\mathcal{B}$ 空间的公理化体系，文中我们采用基于 [13] 中的方法. 对于由 $(-\infty,0]$ 到 H 的 $\mathcal{F}_0$- 可测函数构成的相空间 $\mathcal{B}$ 赋以半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ 满足如下的公理：

公理 2.2 (A1) 设 $x:(-\infty,T]\to H$, $T>0$ 满足 $x_0\in\mathcal{B}$ 以及 $x|_{[0,T]}\in\mathcal{PC}([0,T],H)$, 则对于 $t\in[0,T]$, 下列结论成立

(1) $x_t\in\mathcal{B}$;

(2) $\|x(t)\|\leq L\|x_t\|_{\mathcal{B}}$;

(3) $\|x_t\|_{\mathcal{B}}\leq K(t)\sup\limits_{0\leq s\leq t}\|x(s)\|+N(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$,

其中 $L>0$ 为常数； $K,N:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$, K 是连续的， N 是局部有界的，并且 L,K,N 与 $x(\cdot)$ 是独立的.

(A2) $\mathcal{B}$ 是完备的.

在本文中，我们将用到下面的基于上述公理的引理.

引理 2.3 设 $x:(-\infty,T]\to H$ 为一 $\mathcal{F}_t$- 适应可测的随机过程并且满足 $\mathcal{F}_0$- 适应的随机变量 $x_0=\varphi\in L_2^0(\Omega,\mathcal{B})$ 以及 $x|_J\in\mathcal{PC}(J,H)$, 则有

$$\|x_s\|_{\mathcal{B}}\leq N_T E\|\varphi\|_{\mathcal{B}}+K_T\sup_{0\leq s\leq T}E\|x(s)|,$$

其中 $N_T=\sup\limits_{t\in J}\{N(t)\}$, $K_T=\sup\limits_{t\in J}\{K(t)\}$.

注 2.4 在不含脉冲的无穷时滞微分方程的研究中，相空间 $\mathcal{B}$ 的公理化中还有关于轨道 $t\to x_t$ 的连续性的要求，参阅 [13]. 但是由于脉冲因素的存在，这条性质在无穷时滞脉冲系统的研究中不再满足. 因此，这条要求在 $\mathcal{B}$ 的公理化中被去掉，但这并不影响到问题的解决，在确定性无穷时滞脉冲系统的研究中已被大量地应用，参阅 [15].

文中，我们将用到以下定义和引理.

定义 2.5[16] 设 H 是一 Banach 空间. $(S(t))_{t\geq0}$ 为 H 上的有界线性算子，如果满足：

(1) $S(0)=0$;

(2) $t\to S(t)$ 是强连续的;

(3) 对于任意的 $s,t\geq0$, 有 $S(s)S(t)=\int_0^s(S(t+r)-S(r))\,\mathrm{d}r$,

则称 $(S(t))_{t\geq0}$ 为可积半群.

定义 2.6[16] 如果存在常数 $M\geq0$ 以及 $\beta\in\mathbf{R}$ 使得对于任意的 $t\geq0$ 有

$$\|S(t)\|^2\leq M\mathrm{e}^{\beta t},$$

则称可积半群 $(S(t))_{t\geq0}$ 为指数有界的.

定义 2.7[16] 如果存在 $\eta\in\mathbf{R}$ 使得 $(\eta,+\infty)\subset\rho(A)$ (A 的预解集) 以及一个强连续的指数有界的线性算子族 $(S(t))_{t\geq0}$ 满足

$$S(0)=0,\qquad(\lambda I-A)^{-1}=\lambda\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)\,\mathrm{d}t,\qquad\text{对于}\ \ \lambda>\eta,$$

则称 A 为由可积半群所生成的算子.

定义 2.8[17] 如果存在常数 $M\geq0$ 以及 $\eta\in\mathbf{R}$ 使得 $(\eta,+\infty)\subset\rho(A)$ 以及

$$\sup\left\{(\lambda-\eta)^n|(\lambda I-A)^{-n}|:n\in\mathbf{N},\lambda>\eta\right\}\leq\sqrt{\mathbf{M}},$$

则称线性算子 A 满足 Hille-Yosida 条件.

注 2.9 设 $B_\lambda=\lambda R(\lambda,A)=\lambda(\lambda I-A)^{-1}$, 则对任意的 $x\in\overline{D(A)}$, 当 $\lambda\to\infty$ 时有 $B_\lambda x\to x$ 以及

$$\lim_{\lambda\to\infty}|B_\lambda x|\leq\sqrt{M}|x|,\qquad\text{其中}\ \ |B_\lambda|=|\lambda(\lambda I-A)^{-1}|\leq\frac{\sqrt{M}\lambda}{\lambda-\eta}.$$

进而有，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}|B_\lambda|^2\leq M$.

定义 2.10[16]　如果对于任意的 $\delta>0$, 存在常数 $\Lambda>0$ 使得

$$\|S(t)-S(s)\|\leq\Lambda|t-s|,\qquad t,s\in[0,\delta],$$

则称可积半群 $(S(t))_{t\geq0}$ 为局部 Lipschitz 连续的，

命题 2.11[14]　设 A 为可积半群 $(S(t))_{t\geq0}$ 所生成的算子，则对于任意的 $x\in H$ 以及 $t\geq0$ 有

$$\int_0^t S(s)x\,\mathrm{d}s\in D(A),\qquad S(t)x=A\int_0^t S(s)x\,\mathrm{d}s+tx.$$

下面给出证明中将要用到的 Sadovskii 不动点原理 [18].

定理 2.12　设 Φ 为 Banach 空间 H 中的一凝聚算子，即 Φ 是连续的，将 H 中的有界集映射到有界集，并且对于 H 中满足 $\alpha(B)>0$ 的任意有界集 B 有 $\alpha(\Phi(B))\leq\alpha(B)$. 设 N 为 H 中的闭凸有界子集满足 $\Phi(N)\subset N$, 则 Φ 在 H 中有不动点 (其中 $\alpha(\cdot)$ 表示 Kuratowski 非紧测度).

为阅读方便，给出 Kuratowski 非紧测度的定义，详情参阅 [19, 164 页定义 2.5].

定义 2.13　设 (X,d) 是一度量空间， Q 为 X 的有界子集. 假设 Q 可被直径小于 $\epsilon>0$ 的一组有限集所覆盖，则称该组集直径的下确界为 Q 的 Kuratowski 非紧测度，记为 $\alpha(Q)$, 即有

$$\alpha(Q)=\inf\Big\{\epsilon>0:\,Q\subset\bigcup_{i=1}^n S_i,\ S_i\subset X,\ \mathrm{diam}(S_i)<\epsilon\ (i=1,2,\cdots,n;\ n\in\mathbb{N})\Big\}.$$

下面给出系统 (1)–(3) 适度解的定义.

定义 2.14　$\mathcal{F}_t$- 适应随机过程 $x:(-\infty,T]\to H$ 称为系统 (1.1)–(1.3) 的一个适度解如果 $x_0=\phi\in\mathcal{B}$ 满足 $x_0\in L_2^0(\Omega,H)$ 以及

(i)　$\{x_t:t\in J\}$ 为 $\mathcal{B}$- 值的并且 $x(\cdot)$ 在区间 $(t_k,t_{k+1}],\ k=0,1,2,\cdots,m$ 上为连续的;

(ii)　$\int_0^t[x(s)+g(s,x_s)]\,\mathrm{d}s\in D(A),\ t\in J$;

(iii)　对于任意的 $t\in J,\ x(t)$ 满足如下积分方程

$$\begin{aligned}x(t)=&S'(t)\big[\phi(0)-g(0,\phi)\big]+g(t,x_t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)f(s,x_s)\,\mathrm{d}s\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)\sigma(s,x_s)\,\mathrm{d}w(s)+\sum_{0<t_k<t}S'(t-t_k)I_k(x_{t_k});\end{aligned}$$

(iv)　$\triangle x(t_k)=I_k(x_{t_k}),\ k=1,2,\cdots,m.$

下面给出本文中将要用到的假设条件.

(H1)　算子 A 满足 Hille-Yosida 条件，对于任意的 $t>0,\ S'(t)$ 为紧的并且存在常数 $M\geq0$ 以及 $\beta\in\mathbf{R}$ 使得

$$\|S'(t)\|^2\leq M\mathrm{e}^{\beta t},\qquad \text{for all}\ \ t\geq0.$$

下文中，设 $M^*=M\max\{\mathrm{e}^{\beta T},1\}$.

(H2) 函数 $g:J\times\mathcal{B}\to H$ 为连续的并且存在常数 $M_g>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\big|g(t,x)-g(t,y)\big|^2\leq M_g\|x-y\|_{\mathcal{B}}^2, && t\in J,\quad x,y\in\mathcal{B},\\ &\big|g(t,x)\big|^2\leq M_g\big(1+\|x\|_{\mathcal{B}}^2\big), && t\in J,\quad x\in\mathcal{B}.\end{aligned}$$

(H3) 函数 $f:J\times\mathcal{B}\to H$ 满足如下条件

(i) 对任意的 $\phi\in\mathcal{B}$, 函数 $f(\cdot,\phi):J\to H$ 为强可测的.

(ii) 对任意的 $t\in J$, 函数 $f(t,\cdot):\mathcal{B}\to H$ 为连续的.

(iii) 存在可积函数 $m:J\to[0,\infty)$ 以及非降连续函数 $\Psi_f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 使得对任意的 $(t,\phi)\in J\times\mathcal{B}$ 有

$$E\|f(t,\phi)\|^2\leq m(t)\Psi_f(E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2),\qquad \liminf_{\zeta\to\infty}\frac{\Psi_f(\zeta)}{\zeta}=\Lambda<\infty.$$

(H4) 函数 $\sigma:J\times\mathcal{B}\to L_Q(K,H)$ 满足如下条件:

(i) 对于几乎所有的 $t\in J$, 函数 $\sigma(t,\cdot):\mathcal{B}\to L_Q(K,H)$ 为连续的.

(ii) 对任意的 $x\in\mathcal{B}$, 函数 $\sigma(\cdot,x):J\to L_Q(K,H)$ 为 $\mathcal{F}_t$- 强可测的.

(iii) 存在可积函数 $\eta:J\to[0,\infty)$ 和一个非降连续函数 $\Psi_\sigma:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 使得对任意的 $(t,\phi)\in J\times\mathcal{B}$ 有

$$E\|\sigma(t,\phi)\|^2\leq \eta(t)\Psi_\sigma(E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2),\qquad \liminf_{\zeta\to\infty}\frac{\Psi_\sigma(\zeta)}{\zeta}=\Xi<\infty.$$

(H5) 函数列 $I_k:\mathcal{B}\to H$ 为连续的并且存在正常数列 M_{I_k}, $k=1,2,\cdots,m$ 使得

$$\|I_k(x)-I_k(y)\|^2\leq M_{I_k}\|x-y\|_{\mathcal{B}}^2,\qquad x,y\in\mathcal{B},\quad k=1,2,\cdots,m.$$

(H6) 函数列 $I_k:\mathcal{B}\to H$ 为全连续的并且存在非降连续函数列 $\Theta_k:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $k=1,2,\cdots,m$ 使得

$$E\|I_k(x)\|^2\leq\Theta_k(E\|x\|_{\mathcal{B}}^2),\qquad \liminf_{\zeta\to\infty}\frac{\Theta_k(\zeta)}{\zeta}=\theta_k<\infty,\qquad x\in\mathcal{B},\quad k=1,2,\cdots,m.$$

3 主要结论

本文的第一个主要结论是如下定理.

定理 3.1 设假设 (H1)–(H5) 满足， $x_0=\phi\in\mathcal{B}$ 以及 $\phi(0)-g(0,\phi)\in\overline{D(A)}$, 则系统 (1.1)–(1.3) 存在一个适度解只要下列条件成立

$$10K_T^2\Big[M^*T\Lambda\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+M^*\mathrm{Tr}(Q)\Xi\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s+2M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}+M_g\Big]<1.\tag{3.1}$$

证 给空间 $Y=\{u\in\mathcal{PC}:u(0)=\phi(0)\}$ 赋以一致收敛拓扑 $(\|\cdot\|_\infty)$. 对任意的正数 r, 令

$$B_r(0,Y)=\big\{u\in Y:E\|u\|^2\le r\big\},$$

则 $B_r(0,Y)$ 为 Y 中的有界闭凸子集．如下方式定义算子 $\Phi:Y\to Y$:

$$\begin{aligned}\Phi x(t)=&S'(t)\big[\phi(0)-g(0,\phi)\big]+g(t,\overline{x}_t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)+\sum_{0<t_k<t}S'(t-t_k)I_k(\overline{x}_{t_k}),\qquad t\in J,\end{aligned}$$

其中 $\overline{x}$ 满足 $\overline{x}_0=\phi$ 以及 $\overline{x}=x$ 在 J 上．由假设条件，我们可以推断 $\Phi x\in\mathcal{PC}$. 证明将分为以下 3 步：

第 1 步 往证存在正常数 r 使得 $\Phi(B_r(0,Y))\subseteq B_r(0,Y)$. 若不然，则对任意的正常数 r 以及 $t^r\in J$, 存在函数 $x^r(t^r)\in B_r(0,Y)$ 满足条件 $\Phi(x^r)(t^r)\notin B_r(0,Y)$, 即：$E\|(\Phi x^r)(t^r)\|^2>r$. 然而，由假设 (H1)–(H5) 以及公理有

$$\begin{aligned}r\le&E\|(\Phi x^r)(t^r)\|^2\\\le&5E\big\|S'(t^r)\big[\phi(0)-g(0,\phi)\big]\big\|^2+5E\big\|g(t^r,\overline{x}_{t^r})\big\|^2+5E\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^{\mathrm{r}}}\int_0^{t^r}S(t^r-s)f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s\Big)^2\\&+5E\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^r}\int_0^{t^r}S(t^r-s)\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)\Big)^2+5E\Big(\sum_{0<t_k<t^r}S'(t^r-t_k)I_k(\overline{x^r}_{t_k})\Big)^2\\\le&5M^*L^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2+5M^*M_gE\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2+10M_g\big(K_T^2r+(N_T^2+1)E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2\big)\\&+5M^*TE\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\big|f(s,\overline{x^r}_s)\big|^2\,\mathrm{d}s+5M^*\mathrm{Tr}(Q)E\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\big\|\sigma(s,\overline{x^r}_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s\\&+10M^*\sum_{0<t_k<T}\mathrm{e}^{-2\beta t_i}E\big[\big|I_k(\overline{x^r}_{t_k})-I_k(0)\big|^2+\big|I_k(0)\big|^2\big]\\\le&5M^*L^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2+5M^*M_gE\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2+10M_g\big(K_T^2r+(N_T^2+1)E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2\big)\\&+5M^*TE\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\Psi_h\big(2N_T^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2+2K_T^2r\big)\,\mathrm{d}s\\&+5M^*\mathrm{Tr}(Q)E\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\Psi_\sigma\big(2N_T^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2+2K_T^2r\big)\,\mathrm{d}s\\&+20K_T^2M^*r\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}+20N_T^2M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}+10M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}E\big|I_k(0)\big|^2,\end{aligned}$$

其中 L 为由公理 2.2 (A1) 中所确定的．上式两边同除以 r 并令 $r\to\infty$, 则有

$$\begin{aligned}&10K_T^2\Big[M^*T\Lambda\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+M^*\mathrm{Tr}(Q)\Xi\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s+2M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}+M_g\Big]\\\ge&1,\end{aligned}$$

这和 (3.1) 相矛盾．因此，存在正常数 r 使得 $\Phi\big(B_r(0,Y)\big)\subseteq B_r(0,Y)$. 接下来，我们证明算子 Φ 在 $B_r(0,Y)$ 中有不动点，此即为系统 (1.1)–(1.3) 的适度解．为此，将算子 Φ 分

解为 $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$, 其中对任意的 $t\in J,\Phi_1$ 和 Φ_2 分别由下式所确定

$$(\Phi_1 x)(t)=S'(t)\big[\phi(0)-g(0,\phi)\big]+g(t,\overline{x}_t)+\sum_{0<t_k<t}S'(t-t_k)I_k(\overline{x}_{t_k})$$

以及

$$\begin{aligned}(\Phi_2 x)(t)=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)\\=&\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t S'(t-s)B_\lambda f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s+\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t S'(t-s)B_\lambda\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s).\end{aligned}$$

下面证明 Φ_1 是一个压缩映射而 Φ_2 是全连续的.

第 2 步 Φ_1 为压缩映射. 设 $x,y\in B_r(0,Y)$, 则由引理 2.3 以及对任意的 $t\in J$, 有

$$\begin{aligned}E\big|(\Phi_1 x)(t)-(\Phi_1 y)(t)\big|^2\le&2E\|g(t,\overline{x}_t)-g(t,\overline{y}_t)\|^2\\&+2E\Big|\sum_{0<t_k<t}S'(t-t_k)\big[I_k(\overline{x}_{t_k})-I_k(\overline{y}_{t_k})\big]\Big|^2\\\le&2K_T^2M_gE\Big(\sup_{0\le s\le T}\|\overline{x}(s)-\overline{y}(s)\|^2\Big)\\&+2K_T^2M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}E\Big(\sup_{0\le s\le T}\|\overline{x}(s)-\overline{y}(s)\|^2\Big).\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\|\Phi_1x-\Phi_1y\|_{\mathcal{PC}}^2\le&2K_T^2\Big(M_g+M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}\Big)\|x-y\|_{\mathcal{PC}}^2\\=&L_0\|x-y\|_{\mathcal{PC}}^2,\end{aligned}$$

其中

$$L_0=2K_T^2\Big(M_g+M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}\Big).$$

由上可得

$$\|\Phi_1x-\Phi_1y\|_{\mathcal{PC}}^2\le L_0\|x-y\|_{\mathcal{PC}}^2.$$

由 (3.1) 可知 Φ_1 为一压缩映射.

第 3 步 Φ_2 在 $B_r(0,Y)$ 中为全连续的.

设 $r>0$ 使得 $\Phi_2(B_r(0,Y))\subseteq B_r(0,Y)$. 下文中，以 r^* 和 r^{**} 分别表示常数

$$r^*:=2N_T^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2+2K_T^2r$$

和

$$r^{**}:=2M^*T\Psi_f(r^*)\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+2M^*\mathrm{Tr}(Q)\Psi_\sigma(r^*)\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s.$$

结论的证明将由以下三个部分所构成.

第一部分 Φ_2 将 $B_r(0,Y)$ 中的有界集映射到其上的有界集.

事实上，如果 $x\in B_r(0,Y)$, 由引理 2.3 易知 $\|\bar{x}_t\|_{\mathcal{B}}^2\le r^*$ 并且对任意的 $t\in J$ 有

$$\begin{aligned}E\|(\Phi_2x)(t)\|^2\le&2E\Big\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s\Big\|^2+2E\Big\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)\Big\|^2\\ \le&2M^*T\Psi_f(r^*)\int_0^t\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+2M^*\mathrm{Tr}(Q)\Psi_\sigma(r^*)\int_0^t\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s\\ \le&2M^*T\Psi_f(r^*)\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+2M^*\mathrm{Tr}(Q)\Psi_\sigma(r^*)\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s\\ =&r^{**},\end{aligned}\tag{3.2}$$

由此表明第一部分的结论成立.

第二部分 $\Phi_2\big(B_r(0,Y)\big)$ 在 J 中为等度连续的.

对于充分小的 $\varepsilon>0$ 以及 $0<t_1<t_2$, 有

$$\begin{aligned}&E\big\|(\Phi_2x)(t_2)-(\Phi_2x)(t_1)\big\|^2\\ \le&6T\Big(\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t_1-\varepsilon}\|S'(t_2-s)-S'(t_1-s)\|^2\|B_\lambda\|^2\big\|f(s,\overline{x}_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s\\ &+\lim_{\lambda\to\infty}\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}\|S'(t_2-s)-S'(t_1-s)\|^2\|B_\lambda\|^2\big\|f(s,\overline{x}_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s\\ &+\lim_{\lambda\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\|S'(t_2-s)\|^2\|B_\lambda\|^2\big\|f(s,\overline{x}_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s\Big)\\ &+6\mathrm{Tr}Q\Big(\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t_1-\varepsilon}\|S'(t_2-s)-S'(t_1-s)\|^2\|B_\lambda\|^2\|\sigma(s,\overline{x}_s)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &+\lim_{\lambda\to\infty}\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}\|S'(t_2-s)-S'(t_1-s)\|^2\|B_\lambda\|^2\big\|\sigma(s,\overline{x}_s)\big\|^2\,\mathrm{d}s\\ &+\lim_{\lambda\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\|S'(t_2-s)\|^2\|B_\lambda\|^2\|\sigma(s,\overline{x}_s)\|^2\,\mathrm{d}s\Big)\\ \le&6TM^*\Psi_f(r^*)\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s\\ &+6TM^*\Psi_f(r^*)\int_0^{t_1-\varepsilon}\|(S(t_2-s)-S(t_1-s))\|^2m(s)\,\mathrm{d}s\\ &+6TM^*\Psi_f(r^*)\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+6\mathrm{Tr}(Q)M^*\Psi_\sigma(r^*)\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s\\ &+6\mathrm{Tr}(Q)M^*\Psi_\sigma(r^*)\int_0^{t_1-\varepsilon}\|(S(t_2-s)-S(t_1-s))\|^2\eta(s)\,\mathrm{d}s\\ &+6\mathrm{Tr}(Q)M^*\Psi_\sigma(r^*)\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

由此表明 $\Phi_2\big(B_r(0,Y)\big)$ 在 J 中为等度连续的.

第三部分 Φ_2 将 $B_r(0,Y)$ 映射到 $B_r(0,Y)$ 中的一个准紧集，即对固定的 $t\in J$, 集合

$V(t)=\{\Phi_2 z(t):z\in B_r(0,Y)\}$ 为 $B_r(0,Y)$ 中的准紧集.

显然有， $V(0)=\{\Phi_2(0)\}$. 对于固定的 $t>0$ 以及 $0<\varepsilon<t$, 定义

$$\begin{aligned}(\Phi_2^{\varepsilon}x)(t)=&\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\varepsilon}S'(t-s)B_\lambda f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s+\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\varepsilon}S'(t-s)B_\lambda\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)\\ =&S'(\varepsilon)\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\varepsilon}S'(t-\varepsilon-s)B_\lambda f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s\\ &+S'(\varepsilon)\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\varepsilon}S'(t-\varepsilon-s)B_\lambda\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s).\end{aligned}$$

由于 $S'(t)$ 为紧算子，故对任意的 $\varepsilon,0<\varepsilon<t$, 集合 $V^{\varepsilon}(t)=\{\Phi_2^{\varepsilon}x(t):\, x\in B_r(0,Y)\}$ 在 H 中为相对紧的．此外，对任意的 $x\in B_r(0,Y)$, 有

$$\begin{aligned}&E\|(\Phi_2 x)(t)-(\Phi_2^{\varepsilon}x)(t)\|^2\\ \le&2M^*T\Psi_f(r^*)\int_{t-\varepsilon}^{t}\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+2M^*\mathrm{Tr}(Q)\Psi_\sigma(r^*)\int_{t-\varepsilon}^{t}\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

故当 $\varepsilon\to0^+$ 时有

$$E\|(\Phi_2 x)(t)-(\Phi_2^{\varepsilon}x)(t)\|^2\to0$$

以及存在准紧集任意接近集合 $V(t)=\{\Phi_2 x(t)\,:\,x\in B_r(0,Y)\}$. 因此，集合 $V(t)=\{\Phi_2 x(t):x\in B_r(0,Y)\}$ 在 $B_r(0,Y)$ 中为准紧的．故由 Arzala-Ascoli 定理可知算子 Φ_2 为全连续的．由 (H3) 和 (H4) 可知 Φ_2 为连续的．由此， Φ_2 为全连续的．故由定理 2.12 可知 (1.1)–(1.3) 存在一个适度解.

本文的第二个主要结论是如下定理.

定理 3.2 设假设 (H1)–(H4) 以及 (H6) 满足， $x_0=\phi\in\mathcal{B}$ 以及 $\phi(0)-g(0,\phi)\in\overline{D(A)}$, 则系统 (1.1)–(1.3) 存在一个适度解只要下列条件成立

$$\begin{aligned}&10K_T^2\Big[M^*T\Lambda\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+M^*\mathrm{Tr}(Q)\Xi\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s+M^*\sum_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{-2\beta t_i}\theta_k+M_g\Big]\\ &<1.\end{aligned}\tag{3.3}$$

证 给空间 $Y=\{u\in\mathcal{PC}:u(0)=\phi(0)\}$ 赋以一致收敛拓扑 $(\|\cdot\|_\infty)$. 对任意的正数 r, 令

$$B_r(0,Y)=\{u\in Y:\,E\|u\|^2\le r\},$$

则 $B_r(0,Y)$ 为 Y 中的有界闭凸子集．如下方式定义算子 $\Phi:Y\to Y$,

$$\begin{aligned}\Phi x(t)=&S'(t)[\phi(0)-g(0,\phi)]+g(t,\overline{x}_t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s\\ &+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)+\sum_{0<t_k<t}S'(t-t_k)I_k(\overline{x}_{t_k}),\qquad t\in J,\end{aligned}$$

其中 $\overline{x}$ 满足 $\overline{x}_0=\phi$ 以及 $\overline{x}=x$ 在 J 上．由假设条件，我们可以推断 $\Phi x\in\mathcal{PC}$. 证明将分为以下 3 步：

第 1 步 往证存在正常数 r 使得 $\Phi\big(B_r(0,Y)\big) \subseteq B_r(0,Y)$. 若不然，则对任意的正常数 r 以及 $t^r \in J$, 存在函数 $x^r(t^r) \in B_r(0,Y)$ 满足条件 $\Phi(x^r)(t^r) \notin B_r(0,Y)$, 即：$E\|(\Phi x^r)(t^r)\|^2 > r$. 然而，由假设 (H1)–(H4) 以及公理有

$$\begin{aligned}
r \leq & E\|(\Phi x^r)(t^r)\|^2 \\
\leq & 5E\big\|S'(t^r)[\phi(0)-g(0,\phi)]\big\|^2 + 5E\big\|g(t^r,\overline{x}_{t^r})\big\|^2 + 5E\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^{\mathrm{r}}}\int_0^{t^r} S(t^r-s)f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s\Big)^2 \\
& + 5E\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^r}\int_0^{t^r} S(t^r-s)\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)\Big)^2 + 5E\Big(\sum_{0<t_k<t^r} S'(t^r-t_k)I_k(\overline{x^r}_{t_k})\Big)^2 \\
\leq & 5M^*L^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 5M^*M_gE\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 10M_g\big(K_T^2 r + (N_T^2+1)E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2\big) \\
& + 5M^*TE\int_0^T \mathrm{e}^{-2\beta s}\big|f(s,\overline{x^r}_s)\big|^2\,\mathrm{d}s + 5M^*\mathrm{Tr}(Q)E\int_0^T \mathrm{e}^{-2\beta s}\|\sigma(s,\overline{x^r}_s)\|^2\,\mathrm{d}s \\
& + 5M^*\sum_{0<t_k<T}\mathrm{e}^{-2\beta t_i}E\big|I_k(\overline{x^r}_{t_k})\big|^2 \\
\leq & 5M^*L^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 5M^*M_gE\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 10M_g\big(K_T^2 r + (N_T^2+1)E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2\big) \\
& + 5M^*TE\int_0^T \mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\Psi_h\big(2N_T^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 2K_T^2 r\big)\,\mathrm{d}s \\
& + 5M^*\mathrm{Tr}(Q)E\int_0^T \mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\Psi_\sigma\big(2N_T^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 2K_T^2 r\big)\,\mathrm{d}s \\
& + 5M^*\sum_{k=1}^m \mathrm{e}^{-2\beta t_i}\Theta_k\big(2N_T^2E\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2 + 2K_T^2 r\big)
\end{aligned}$$

上式两边同除以 r 并令 $r \to \infty$, 则有

$$10K_T^2\Big[M^*T\Lambda\int_0^T \mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s + M^*\mathrm{Tr}(Q)\Xi\int_0^T \mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s + M^*\sum_{k=1}^m \mathrm{e}^{-2\beta t_i}\theta_k + M_g\Big] \geq 1,$$

此与 (3.3) 相矛盾. 因此，存在正常数 r 使得 $\Phi(B_r(0,Y)) \subseteq B_r(0,Y)$. 接下来，我们证明算子 Φ 在 $B_r(0,Y)$ 中有不动点，此即为系统 (1.1)–(1.3) 的适度解. 为此，将算子 Φ 分解为 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, 其中对任意的 $t \in J, \Phi_1, \Phi_2$ 以及 Φ_3 分别由下式所确定

$$\begin{aligned}
(\Phi_1 x)(t) =& S'(t)\big[\phi(0) - g(0,\phi)\big] + g(t,\overline{x}_t), \\
(\Phi_2 x)(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t S(t-s)\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s) \\
=& \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t S'(t-s)B_\lambda f(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}s + \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t S'(t-s)B_\lambda\sigma(s,\overline{x}_s)\,\mathrm{d}w(s)
\end{aligned}$$

以及 $(\Phi_3 x)(t) = \sum\limits_{0<t_k<t} S'(t-t_k)I_k(\overline{x}_{t_k})$.

下证 Φ_1 为压缩映射而 Φ_2 和 Φ_3 为两个全连续算子.

第 2 步 Φ_1 为压缩映射. 设 $x,y\in B_r(0,Y)$, 则由引理 2.3, 对任意的 $t\in J$ 有

$$E\big|(\Phi_1x)(t)-(\Phi_1y)(t)\big|^2 \le E\|g(t,\overline{x}_t)-g(t,\overline{y}_t)\|^2 \le 2K_T^2M_gE\Big(\sup_{0\le s\le T}\|\overline{x}(s)-\overline{y}(s)\|^2\Big).$$

故有

$$\big|\Phi_1x-\Phi_1y\big|_{\mathcal{PC}}^2\le 2K_T^2M_g\big|x-y\big|_{\mathcal{PC}}^2=L_1\big|x-y\big|_{\mathcal{PC}}^2,$$

其中 $L_1=2K_T^2M_g$. 由上可得

$$\big|\Phi_1x-\Phi_1y\big|_{\mathcal{PC}}^2\le L_1\|x-y\|_{\mathcal{PC}}^2,$$

由 (3.3) 可知 Φ_1 是一个压缩映射.

第 3 步 定理 3.1 已经证明 Φ_2 是全连续的. 同理, 由 (H6) 易证 Φ_3 也是全连续的. 故由定理 2.12 可知系统 (1.1)–(1.3) 存在一适度解.

4 一个应用

本节中, 我们给出一个例子加以应用.

例 4.1 我们考虑如下一类二阶无穷时滞中立型非稠定脉冲随机偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}[v(t,\xi)-G(t,v(t-h,\xi))]}{\mathrm{d}t} \\ =\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[v(t,\xi)-G(t,v(t-h,\xi))]+f(t,v(t-h,\xi))+\sigma(t,v(t-h,\xi))\dfrac{\mathrm{d}\beta(t)}{\mathrm{d}t}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0\le\xi\le\pi,\quad h>0,\quad t\in J:=[0,T], \\ v(t,0)=v(t,\pi)=0, \qquad t\in J,\quad t\ne t_k,\quad k=1,2,\cdots,m, \\ \Delta v(t_k)(\xi)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t_k}b_k(s-t_k)v(s,\xi)\,\mathrm{d}s,\quad k=1,2,\cdots,m, \\ v(t,\xi)=\phi(t,\xi),\ t\in(-\infty,0], \qquad 0\le x\le\pi, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $\beta(t)$ 表示定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 取值于 H 空间的标准柱布朗运动, 其中 $H=C([0,\pi])$ 表示定义在 $[0,\pi]$ 上取实值的连续函数所构成的 Banach 空间.

设 $1\le p<\infty, 0\le r<\infty, g(\cdot)$ 是 $(-\infty,-r)$ 上的非负, 局部可积的 Borel 可测函数并且存在 $(-\infty,0]$ 上的非负局部有界函数 Λ 使得对任意的 $\xi\le 0$, $\theta\in(-\infty,-r)\backslash N_\xi$ 使得 $g(\xi+\theta)\le\Lambda(\xi)g(\theta)$, 其中 $N_\xi\subseteq(-\infty,-r)$ 是一个 Lebesgue 测度为零的集合. 令 $\mathcal{B}:=\mathcal{PC}_r\times L^p(g;H)$, $p>1$ 为 $(-\infty,0]$ 到 H 的满足条件 $\varphi|_{[-r,0]}\in\mathcal{PC}([-r,0],H)$ 以及 $g|\varphi|^p$ 在 $(-\infty,-r]$ 为 Lebesgue 可积的 Lebesgue 可测函数 φ 的全体所构成的集合. 如下定义半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}}=\sup_{\theta\in[-r,0]}\|\varphi(\theta)\|+\Big(\int_{-\infty}^{-r}g(\theta)\|\varphi(\theta)\|^p\,\mathrm{d}\theta\Big)^{1/\mathrm{p}}.$$

上述 $\mathcal{B}$ 构成为一个满足公理 2.2 的相空间．本例主要考虑 $r=0$, $p=2$ 的情形，此时

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}=C_0\times L^2(g,H),\qquad L=1,\quad N(t)=\Lambda(-t)^{1/2},\\&K(t)=1+\Big(\int_{-t}^{0}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/2},\qquad \mathrm{t}\geq 0.\end{aligned}$$

定义一个线性算子

$$Az=\frac{\partial^2}{\partial x^2}z,$$

其定义域为

$$D(A)=\Big\{z\in H,\ z(0)=z(\pi)=0,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}z\in C([0,\pi])\Big\},$$

则有

$$\overline{D(A)}=C_0([0,\pi])=\Big\{z\in C([0,\pi]):z(0)=z(\pi)=0\Big\}\neq C([0,\pi]).$$

由 [20] 可知算子 A 是扇形的，$(0,+\infty)\subseteq\rho(A)$ 并且对于 $\lambda>0$ 有

$$\|R(\lambda,A)\|\leq\frac{1}{\lambda}.$$

此外，算子 A 生成一个积分半群 $(S(t))_{t\geq 0}$ 对于任意的 $t\in J$ 存在一个常数 $\beta>0$ 使得 $\|S'(t)\|^2\leq \mathrm{e}^{\beta t}$. 同时，$A$ 满足 Hille-Yosida 条件.

对于 $t\in J$, 令 $v(t)(\xi)=v(t,\xi)$, 定义

$$\begin{aligned}&g(t,v)(\cdot)=G(t,v(\cdot)),\\&f(t,v)(\xi)=\int_{-\infty}^{0}\nu_1(t,\xi,G_1(v(\theta)(\xi))\,\mathrm{d}\theta,\\&\sigma(t,v)(\xi)=\int_{-\infty}^{0}\nu_2(t,\xi,G_2(v(\theta)(\xi))\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

以及

$$I_k(t,v)(\cdot)=\int_{-\infty}^{0}b_k(s)v(s,\cdot)\,\mathrm{d}s,\qquad k=1,2,\cdots,m.$$

进而，假设函数 G,f,σ 以及 b_k, $k=1,2,\cdots,m$ 满足条件 $\|G\|^2\leq M_g$ 以及

(I) 函数 $\nu_1(t,\xi,\theta),\nu_3(t,\xi,\theta)$ 在 $J\times[0,\pi]\times(-\infty,0)$ 上为连续的并且满足

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{0}\nu_1^2(t,x,\theta)\,\mathrm{d}\theta=p_1(t,x)<\infty,\qquad \int_0^1 p_1^2(t,x)\,\mathrm{d}x=m(t)<\infty,\\&\int_{-\infty}^{0}\nu_2^2(t,x,\theta)\,\mathrm{d}\theta=p_2(t,x)<\infty,\qquad \int_0^1 p_2^2(t,x)\,\mathrm{d}x=\eta(t)<\infty;\end{aligned}$$

(II) 函数 $G_i,\ i=1,2$ 在 $J\times[0,\pi]\times(-\infty,0)$ 上为连续的并且满足

$$0\le G_1^2(v(\theta,x))\le\Psi_f(\|v(\theta,\cdot)\|_{\mathcal{B}}^2),\qquad \liminf_{\zeta\to\infty}\frac{\Psi_f(\zeta)}{\zeta}=\Lambda<\infty,$$
$$0\le G_2^2(v(\theta,x))\le\Psi_\sigma(\|v(\theta,\cdot)\|_{\mathcal{B}}^2),\qquad \liminf_{\zeta\to\infty}\frac{\Psi_\sigma(\zeta)}{\zeta}=\Xi<\infty,$$

其中 $(\theta,x)\in(-\infty,0]\times[0,\pi],\ \Psi_f(\cdot),\Psi_\sigma(\cdot):[0,\infty)\to(0,\infty)$ 为连续非降函数;

(III) $b_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ k=1,2,\cdots,m$ 为连续有界函数列满足对任意的 $k=1,2,\cdots,m$,

$$M_{I_k}:=\Big(\int_{-\infty}^0((b_k(s))^2/g(s))\,\mathrm{d}s\Big)^{1/2}<\infty,\qquad \mathrm{\|b_k\|^2\le M_{I_k},\quad k=1,2,\cdots,m.}$$

在上述假设条件下可将 (4.1) 转化为系统 (1.1)–(1.3) 的形式并且满足:

$$\begin{aligned}\big|f(t,\phi)\big|^2&=\int_0^1\Big(\int_{-\infty}^0\nu_2(t,x,\theta)G_1(\phi(\theta))\,\mathrm{d}\theta\Big)^2\mathrm{d}x\\&\le\int_0^1 p_2^2(t,x)\,\mathrm{d}x\Psi_f\big(\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2\big)=m(t)\Psi_f\big(\|\phi\|_{\mathcal{B}}^2\big).\end{aligned}$$

由定理 3.1 可知系统 (4.1) 在 J 中存在一个适度解只要 $\phi\in\mathcal{B},\ \phi(0,\xi)-g(0,\phi)(\xi)\in\overline{D(A)}$ 以及如下条件满足:

$$\begin{aligned}&10K_T^2\Big[1+\Big(\int_{-T}^0 g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/2}\Big]\\&\times\Big[M^*T\Lambda\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}m(s)\,\mathrm{d}s+M^*\Xi\int_0^T\mathrm{e}^{-2\beta s}\eta(s)\,\mathrm{d}s+2M^*\sum_{k=1}^m\mathrm{e}^{-2\beta t_i}M_{I_k}+M_g\Big]\\&<1,\end{aligned}$$

其中 $M^*=\max\{\mathrm{e}^{\beta T},1\}$.

致谢 本文作者对两位审稿人提出的宝贵意见表示由衷的感谢!

参 考 文 献

[1] Hale J K, Lunel S M V. Introduction to Functional Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1991

[2] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientitic, 1989

[3] Nieto J J, Rodriguez-Lopez R. New Comparison Results for Impulsive Integro-differential Equations and Applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 328: 1343–1368

[4] Samoilenko A M, Perestyuk N A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1995

[5] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996

[6] Abada N, Benchohra M, Hadda H. Existence and Controllability Results for Nondensely Defined Impulsive Semilinear Functional Differential Inclusions. *J. Differential Equations*, 2009, 246: 3834–3863

[7] Adimy M, Ezzinbi K, Ouhinou A. Variation of Constants Formula and Almost Periodic Solutions for Some Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, 317: 668–689

[8] Benchohra M, Gatsori E, Henderson J, Ntouyas S K. Nondensely Defined Evolution Impulsive Differential Inclusions with Nonlocal Conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, 286: 307–325

[9] Benchohra M, Gorniewicz L. Existence Results for Nondensely Defined Impulsive Semilinear Functional Differential Inclusions with Infinite Delay. *JP J. Fixed Point Theory Appl.*, 2007, 2: 11–51

[10] Hu L, Ren Y. Existence Results for Impulsive Neutral Stochastic Functional Integro-differential Equations with Infinite Delays. *Acta Appl. Math.*, 2010, 111: 303–317

[11] Benchohra M, Ntouyas S K, Ouahab A. On Nondensely Defined Semilinear Stochastic Functional Differential Equations with Nonlocal Conditions. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 2006, Art. ID 69584

[12] Da Prato G, Zabczyk J. Tochastic Equations in Infinite Dimension. Cambridge: Cambridge University Press, 1992

[13] Hino Y, Murakami S, Naito T. Functional Differential Equations with Infinite Delay. In: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1473. Berlin: Springer-Verlag, 1991

[14] Hale J K, Kato J. Phase Spaces for Retarded Equations with Infinite Delay. *Funkcial. Ekvac.*, 1978, 21: 11–41

[15] Anguraj A, Mallika Arjunan M, Eduardo Hernández M. Existence Results for an Impulsive Neutral Functional Differential Equations with State-dependent Delay. *Appl. Anal.*, 2007, 86: 861–872

[16] Kellerman H, Hieber M. Integrated Semigroups. *J. Funct. Anal.*, 1989, 84: 160–180

[17] Yosida K. Functional Analysis. 6th ed. Berlin: Springer-Verlag, 1980

[18] Sadovskii B N. On a Fixed Point Principle. *Funct. Anal. Appl.*, 1967, 1: 71–74

[19] Malkowsky E, Rakočević V. An Introduction into the Theory of Sequence Spaces and Measures of Noncompactness. *Zbornik radova, Matematički institut SANU* 2000, 9(17): 143–243

[20] Da Prato G, Sinestrari E. Differential Operators with Non-dense Domains. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1987, 14: 285–344

Existence Results on the Integral Solutions for a Class of Non-densely Defined Impulsive Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay

HE Shifeng

(*Foundation Department, ChaoHu Vocational and Technical College, Chaohu* 238000)

Sotiris K. Ntouyas

(*Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina, Greece* 45110)

REN Yong

(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000)

(*E-mail: renyong@126.com*)

Abstract In this paper, we prove the existence of integral solutions for a class of non-densely defined impulsive neutral stochastic functional differential equations with infinite delay. The results are derived by means of the Sadovskii fixed point theorem. As an application, the existence result of integral solutions for a class of non-densely defined impulsive neutral second-order stochastic partial differential equations with infinite delay is established.

Key words stochastic functional differential equation; neutral equation; impulsive equation; integral solution; non-densely defined operator

MR(2000) Subject Classification 60H10; 34K50; 34K30

Chinese Library Classification O211.6