初始时刻不同的微分系统的稳定性准则 *

鲍俊艳

(河北大学数学与计算机学院，保定 071000)

(E-mail: jybao@hbu.edu.cn)

王培光　　高春霞

(河北大学电子信息与工程学院，保定 071000)

摘　要　由于向量 Lyapunov 函数方法在确定初值问题微分系统的稳定性方面比纯量 Lyapunov 函数更有效，因此，本文利用向量 Lyapunov 函数方法研究了初始时刻不同的微分系统的稳定性与实用稳定性准则，并给出了一个简单的例子来说明向量 Lyapunov 函数的有效性.

关键词　稳定性；实用稳定性；向量 Lyapunov 函数；初始时刻不同

MR(2000) 主题分类　34C11; 34K35

中图分类　O175.13

1　引言

近几十年，初始时刻相同的微分方程的稳定性理论得到了迅速发展 [1−4]. 而在现实世界中，由于误差等因素的影响，可能导致解的初始状态及初始时刻都发生改变. 因此，为了使数学模型更具有实用性，在 [5] 中， Lakshmikantham 和 Vatsala 首先研究了初始时刻不同的微分系统理论. 从此，对初始时刻不同的微分系统的研究吸引了很多学者的注意 [6−15]. Shaw 和 Yakar[6], Yakar 和 Deo[7] 利用变分参数方法，研究了初始时刻不同的微分系统的稳定性. 另外，在 [8–15] 中，学者们利用微分不等式及比较原理讨论了初始时刻不同的微分系统的稳定性.

众所周知，几个 Lyapunov 函数，也就是向量 Lyapunov 函数，比纯量 Lyapunov 函数在确定初值问题微分方程的稳定性方面更有效 [16]. 因此，本文利用向量 Lyapunov 函数和比较原理研究了初始时刻不同的微分系统的稳定性与实用稳定性. 在本文的第 4 节，给出了一个简单的例子来说明，当应用纯量 Lyapunov 函数不能判断微分系统的稳定性时，却可以应用向量 Lyapunov 函数判断微分系统的稳定性.

本文 2011 年 6 月 28 日收到. 2012 年 2 月 9 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10971045), 河北省自然科学基金 (2010000191) 资助项目.

2 预备知识

考虑微分系统

$$x' = f(t, x). \tag{2.1}$$

这里 $f \in C[R_+ \times R^n, R^n]$. 设 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 和 $y(t) = y(t, \tau_0, y_0)$ 是系统 (2.1) 分别过初始时刻 (t_0, x_0) 和 (τ_0, y_0) 的解. 假设 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是给定的解，在本文中，主要是相对于这个给定的解，研究系统 (2.1) 解的稳定性准则. 下面给出初始时刻不同的微分系统解的稳定性定义 [9].

定义 2.1 称系统 (2.1) 的解 $x(t)$ 是

(S_1) 等度稳定的，如果对给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \in R_+$, 存在 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ 和 $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon) > 0$, 使得当 $\|y_0 - x_0\| < \delta$, $|\eta| < \sigma$ 时, 对 $t \geq t_0$, 有 $\|y(t+\eta, \tau_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$ 成立;

(S_2) 一致稳定的，如果 (S_1) 中的 δ 和 σ 与 t_0 无关;

(S_3) 等度渐近稳定的, 如果 (S_1) 成立且对给定的 $\varepsilon > 0$, $t_0 \in R_+$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$, $\sigma_0 = \sigma_0(t_0) > 0$ 和 $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$, 使得当 $\|y_0 - x_0\| < \delta_0$, $|\eta| < \sigma_0$ 时，对 $t \geq t_0 + T$, 有 $\|y(t+\eta, \tau_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$ 成立;

(S_4) 一致渐近稳定的，如果 (S_2) 成立且 (S_3) 中 δ_0, σ_0 及 T 与 t_0 无关.

定义 2.2 称系统 (2.1) 的解 $x(t)$ 是

(PS_1) 实用稳定的，如果对给定的 (λ, A), 其中 $0 < \lambda < A$, 存在 $\sigma = \sigma(\lambda, A) > 0$, 使得当 $\|y_0 - x_0\| < \lambda$, $|\eta| < \sigma$ 时，对某些 $t_0 \in R_+$, 有 $\|y(t+\eta, \tau_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)\| < A$ 成立，其中 $t \geq t_0$;

(PS_2) 一致实用稳定的，如果 (PS_1) 中的 $t_0 \in R_+$ 可以取任意值;

(PS_3) 实用拟稳定的，如果对给定的 (λ, B, T), 存在 $\sigma_0 = \sigma_0(\lambda, B, T) > 0$, 使得当 $\|y_0 - x_0\| < \lambda$, $|\eta| < \sigma_0$ 时，对某些 $t_0 \in R_+$, 有 $\|y(t+\eta, \tau_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)\| < B$ 成立，其中 $t \geq t_0 + T$;

(PS_4) 一致实用拟稳定的，如果 (PS_3) 中的 $t_0 \in R_+$ 可以取任意值;

(PS_5) 强实用稳定的，如果 (PS_1) 与 (PS_3) 同时成立;

(PS_6) 强一致实用稳定的，如果 (PS_2) 与 (PS_4) 同时成立.

设 $V(t, x) \in C[R_+ \times R^n,\ R_+^N]$ 关于 x 满足局部 Lipschitzian 条件且 $V(t, 0) \equiv 0$, $n \geq N \geq 1$. 定义

$$D^+V(t, y-x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\big[V(t+h, y-x+h(f(t,y)-f(t,x))) - V(t, y-x)\big],$$

这里 $x = x(t, t_0, x_0)$, $y = y(t+\eta, \tau_0, y_0)$.

考虑如下比较系统

$$u' = g(t, u), \qquad u(\tau_0) = u_0 \geq 0,$$

这里 $g \in C[R_+ \times R_+^N, R^N]$ 关于 u 拟单调非减， $g(t,0) \equiv 0$. $u = u(t,\tau_0,u_0)$ 是系统 (2.2) 过 (τ_0,u_0) 的解.

定义 2.3 称系统 (2.2) 的平凡解是等度稳定的，如果对给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $\tau_0 \in R_+$, 存在 $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$, 使得当 $\sum\limits_{i=1}^{N} u_{0i} < \delta$ 时，对 $t \geq \tau_0$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{N} u_i(t,\tau_0,u_0) < \varepsilon$ 成立，其中 $u(t,\tau_0,u_0)$ 是系统 (2.2) 的任意解.

系统 (2.2) 解的其它稳定性定义可以按如上形式类似给出，此处省略.

为方便后面应用，给出如下函数类定义.

$K = \{a \in C[R_+,R_+]: a$ 是严格单调递增的且 $a(0) = 0\}$.

3 主要结果

首先给出对稳定性研究非常有用的比较原理.

引理 3.1[11] 假设

$(\mathrm{H}_{3.1})$ $\alpha,\beta \in C^1[R_+,R^n]$ 且满足 $\alpha'(t) \leq f(t,\alpha(t))$, $\alpha(t_0) \leq x_0$, $t \geq t_0 \geq 0$, $\beta'(t) \geq f(t,\beta(t))$, $\beta(\tau_0) \geq x_0$, $t \geq \tau_0 \geq 0$, 这里 $f \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ 且 $f(t,x)$ 关于 x 是拟单调非减的， $\tau_0 > t_0$;

$(\mathrm{H}_{3.2})$ $f_i(t,x) - f_i(t,y) \leq L\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$, $L > 0$, $x \geq y$, $i = 1,2,\cdots,n$;

$(\mathrm{H}_{3.3})$ $f(t,x)$ 对每一个 x 关于 t 是单调非减的，

则 (a) 对 $t \geq t_0$, 有 $\alpha(t) \leq \beta(t+\eta)$ 成立， (b) 对 $t \geq \tau_0$, 有 $\alpha(t-\eta) \leq \beta(t)$ 成立，其中 $\eta = \tau_0 - t_0$.

引理 3.2[11] 假设

$(\mathrm{H}_{3.4})$ $m \in C[R_+,R_+^N]$ 且 $D^+m(t) \leq g(t,m(t))$, $m(t_0) \leq u_0$, $t_0 \geq 0$, 这里

$$D^+m(t) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[m(t+h) - m(t)];$$

$(\mathrm{H}_{3.5})$ $g(t,u)$ 满足引理 3.1 中的条件 $(\mathrm{H}_{3.2})$ 和 $(\mathrm{H}_{3.3})$, 系统 (2.2) 的最大解 $r(t) = r(t,\tau_0,u_0)$ 存在，

则 (a) 对 $t \geq t_0$, 有 $m(t) \leq r(t+\eta)$ 成立， (b) 对 $t \geq \tau_0$, 有 $m(t-\eta) \leq r(t)$ 成立.

接下来，利用向量 Lyapunov 函数方法和比较原理研究系统 (2.1) 的解 $x(t,t_0,x_0)$ 的稳定性.

定理 3.1 假设条件 $(\mathrm{H}_{3.5})$ 成立且

$(\mathrm{A}_{3.1})$ $D^+V(t,y-x) \leq g(t,V(t,y-x))$, $(t,x) \in R_+ \times R^n$, 这里 $g(t,u)$ 是有界的；

$(\mathrm{A}_{3.2})$ $L_0(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{N} V_i(t,x)$ 且 $b(\|x\|) \leq L_0(t,x) \leq a(\|x\|)$, $(t,x) \in R_+ \times R^n$, 其中 $a,b \in K$,

则系统 (2.2) 的平凡解的稳定性蕴含着系统 (2.1) 的解 $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ 相应的稳定性.

证 假设系统 (2.2) 的平凡解是等度稳定的，则对给定的 $\varepsilon > 0$ 及 $\tau_0 \in R_+$, 存在

$\delta_1 = \delta_1(\tau_0, \varepsilon) > 0$, 使得当 $0 \le \sum\limits_{i=1}^{N} u_{0i} \le \delta_1$ 时，对 $t \ge \tau_0$, 有

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t, \tau_0, u_0) < b(\varepsilon)/2 \tag{3.1}$$

成立，这里 $u(t, \tau_0, u_0)$ 是系统 (2.2) 过 (τ_0, u_0) 的任意解．因为

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{N}[u_i(t+\eta, \tau_0, u_0) - u_i(t, \tau_0, u_0)]\Big| \\
=&\Big|\eta\sum_{i=1}^{N} g_i(t, u) + \eta\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(t, u, \eta)\Big| \\
\le&\eta\Big[\Big|\sum_{i=1}^{N} g_i(t, u)\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(t, u, \eta)\Big|\Big],
\end{aligned}$$

其中，当 $\eta \to 0$ 时， $\varepsilon(t, u, \eta) = (\varepsilon_1(t, u, \eta), \varepsilon_2(t, u, \eta), \cdots, \varepsilon_N(t, u, \eta))^T \to 0$. 又因为 $g(t, u)$ 是有界的，故存在一个正数 M, 使得

$$\Big|\sum_{i=1}^{N}\big[u_i(t+\eta, \tau_0, u_0) - u_i(t, \tau_0, u_0)\big]\Big| \le M\eta$$

成立．于是，存在 $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\text{当 } |\eta| < \sigma \text{ 时, 有 } \Big|\sum_{i=1}^{N}\big[u_i(t+\eta, \tau_0, u_0) - u_i(t, \tau_0, u_0)\big]\Big| < b(\varepsilon)/2, \qquad t \ge \tau_0. \tag{3.2}$$

选取 $u_0 = V(t_0, y_0 - x_0)$ 及 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 其中 $\delta_2 = \delta_2(\tau_0, \varepsilon) > 0$ 且 $a(\delta_2) < \delta_1$. 可以断定，当 $\|y_0 - x_0\| < \delta$ 且 $|\eta| < \sigma$ 时，系统 (2.1) 的任意解 $y(t, \tau_0, y_0)$ 满足

$$\|y(t+\eta) - x(t)\| < \varepsilon, \qquad t \ge t_0.$$

如果上式不成立，则存在一个 $t_1 > t_0$ 及系统 (2.1) 的某个解 $y(t, \tau_0, y_0)$, 当 $\|y_0 - x_0\| < \delta$ 且 $|\eta| < \sigma$ 时，有

$$\|y(t_1+\eta) - x(t_1)\| = \varepsilon \ \text{ 且 } \ \|y(t+\eta) - x(t)\| \le \varepsilon, \qquad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.3}$$

由引理 3.2, 有

$$V(t, y(t+\eta) - x(t)) \le r(t+\eta, \tau_0, V(t_0, y_0 - x_0)), \qquad t_0 \le t \le t_1, \tag{3.4}$$

其中 $r(t, \tau_0, u_0)$ 是系统 (2.2) 的最大解．因为 $\|y_0 - x_0\| < \delta$, 由条件 $(A_{3.2})$, 有

$$L_0(t_0, y_0 - x_0) \le a(\|y_0 - x_0\|) < a(\delta) < \delta_1. \tag{3.5}$$

因此，由 (3.1)–(3.5) 式及条件 ($A_{3.2}$), 有下述不等式成立

$$\begin{aligned} b(\varepsilon) \leq & L_0(t_1, y(t_1+\eta)-x(t_1)) \leq r_0(t_1+\eta, \tau_0, V(t_0, y_0-x_0)) \\ < & r_0(t_1, \tau_0, V(t_0, y_0-x_0)) + b(\varepsilon)/2 < b(\varepsilon), \end{aligned}$$

其中 $r_0 = \sum\limits_{i=1}^{N} r_i(t, \tau_0, u_0)$. 产生矛盾，所以上述断定是正确的.

假设系统 (2.2) 的解是一致稳定的，即 δ 与 τ_0 无关，同理可以得到系统 (2.1) 的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 也是一致稳定的.

接下来, 讨论系统 (2.2) 的平凡解的渐近稳定性蕴含系统 (2.1) 的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 的渐近稳定性. 由上面的讨论及稳定性定义可知, 系统 (2.2) 的平凡解的渐近稳定性蕴含系统 (2.1) 的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 的稳定性. 因此，只需证明 (2.1) 的解 $x(t)$ 是吸引的. 因为系统 (2.2) 的解 $u \equiv 0$ 是吸引的, 所以对给定的 $\varepsilon > 0$ 及 $\tau_0 \in R_+$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(\tau_0, \varepsilon) > 0$ 及 $T = T(\tau_0, \varepsilon) > 0$, 使得当 $0 \leq \sum\limits_{i=1}^{N} u_{i0} < \delta_0$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(t, \tau_0, u_0) \leq b(\varepsilon)/2, \qquad t \geq \tau_0 + T \tag{3.6}$$

成立. 类似上述讨论，存在 $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon) > 0$, 使得当 $|\eta| < \sigma_0$ 时，有

$$\Big|\sum_{i=1}^{N} [u_i(t+\eta, \tau_0, u_0) - u_i(t, \tau_0, u_0)]\Big| < b(\varepsilon)/2, \qquad t \geq \tau_0 + T \tag{3.7}$$

成立. 选取 $\delta = \min(\delta_0, a^{-1}(\delta_0))$, $\sigma = \sigma_0$ 及 $u_0 = V(t_0, y_0 - x_0)$. 当 $\|y_0 - x_0\| < \delta$ 且 $|\eta| < \sigma$ 时，断言

$$\|y(t+\eta) - x(t)\| < \varepsilon, \qquad t \geq \tau_0 + T$$

对系统 (2.1) 的任意解 $y(t, \tau_0, y_0)$ 都是成立的. 因为，由引理 3.2 可得

$$V(t, y(t+\eta) - x(t)) \leq r(t+\eta, \tau_0, V(t_0, y_0 - x_0)), \qquad t \geq t_0.$$

再由条件 ($A_{3.2}$) 及 (3.6), (3.7) 式，有

$$\begin{aligned} b\big(\|y(t+\eta) - x(t)\|\big) \leq & L_0(t, y(t+\eta) - x(t)) \leq r_0(t+\eta, \tau_0, V(t_0, y_0 - x_0)) \\ < & r_0(t, \tau_0, V(t_0, y_0 - x_0)) + b(\varepsilon)/2 < b(\varepsilon), \qquad t \geq \tau_0 + T. \end{aligned}$$

这样，就证明了系统 (2.1) 的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是吸引的. 因此解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是渐近稳定的.

如果系统 (2.2) 的解 $u \equiv 0$ 是一致渐近稳定的，很显然，系统 (2.1) 的解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 也是一致渐近稳定的，因为 δ_0 及 T 与 t_0 无关. 证毕.

定理 3.2 假设定理 3.1 的条件成立且

($A_{3.3}$) $0 \leq \lambda < A$, $a(\lambda) < b(A)/2$,

则系统 (2.2) 的平凡解的实用稳定性蕴含系统 (2.1) 的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 的相应实用稳定性.

证　假设系统 (2.2) 的平凡解是实用稳定的，则对给定的 $(a(\lambda),b(A)/2)$ 及 $\tau_0\in R_+$，当 $0\le\sum\limits_{i=1}^{N}u_{0i}<a(\lambda)$ 时，对 $t\ge\tau_0$，有

$$\sum_{i=1}^{N}u_i(t,\tau_0,u_0)<b(A)/2. \tag{3.8}$$

类似于定理 3.1 中的讨论，对给定的 $b(A)/2$, 存在 $\sigma=\sigma(\lambda,A)>0$, 使得当 $|\eta|<\sigma$ 时，对 $t\ge\tau_0$, 有

$$\Big|\sum_{i=1}^{N}[u_i(t+\eta,\tau_0,u_0)-u_i(t,\tau_0,u_0)]\Big|<b(A)/2. \tag{3.9}$$

选取 $u_0=V(t_0,y_0-x_0)$. 我们可以断言，当 $\|y_0-x_0\|<\lambda$ 且 $|\eta|<\sigma$ 时，对系统 (2.1) 的任意解 $y(t,\tau_0,y_0)$, 有 $\|y(t+\eta)-x(t)\|<A,\ \ t\ge t_0$ 成立. 如若不然，则存在 $t_1>\tau_0$ 及系统 (2.1) 的某个解 $y(t,\tau_0,y_0)$, 当 $\|y_0-x_0\|<\lambda$ 且 $|\eta|<\sigma$ 时，有

$$\|y(t_1+\eta)-x(t_1)\|=A\ \ 和\ \ \|y(t+\eta)-x(t)\|\le A,\qquad t\in[t_0,t_1]. \tag{3.10}$$

由条件 $(A_{3.1})$, $(H_{3.5})$ 及引理 3.2, 可以得到如下不等式

$$V(t,y(t+\eta)-x(t))\le r(t+\eta,\tau_0,V(t_0,y_0-x_0)),\qquad t_0\le t\le t_1. \tag{3.11}$$

因为 $\|y_0-x_0\|<\lambda$, 由条件 $(A_{3.2})$ 可得

$$L_0(t_0,y_0-x_0)\le a(\|y_0-x_0\|)<a(\lambda). \tag{3.12}$$

于是，由 (3.8)–(3.12) 式及条件 $(A_{3.2})$, 得

$$\begin{aligned}b(A)\le&L_0(t_1,y(t_1+\eta)-x(t_1))\le r_0(t_1+\eta,\tau_0,V(t_0,y_0-x_0))\\<&r_0(t_1,\tau_0,V(t_0,y_0-x_0))+b(A)/2<b(A),\end{aligned}$$

其中 $r_0=\sum\limits_{i=1}^{N}r_i(t,\tau_0,u_0)$. 产生矛盾，因此断言成立.

下面证明系统 (2.1) 的解是强稳定的. 为此, 假设系统 (2.2) 的平凡解对给定的 $(a(\lambda)$, $b(A)/2,b(B)/2,T)$ 是强稳定的. 与 (3.7) 式的讨论相类似，存在 $\sigma_0=\sigma_0(\lambda,A,B)>0$, 使得

$$当\ \|y_0-x_0\|<\lambda\ 且\ \eta|<\sigma_0\ 时,\ 有\ \|y(t+\eta)-x(t)\|<b(A)/2,\quad t\ge t_0, \tag{3.13}$$

$$当\ |\eta|<\sigma_0\ 时,\ 有\ \|u(t+\eta,\tau_0,u_0)-u(t,\tau_0,u_0)\|<b(B)/2,\quad t\ge\tau_0+T. \tag{3.14}$$

上述两式意味着只需证明系统 (2.1) 的解是实用拟稳定的．系统 (2.2) 的平凡解的实用拟稳定性蕴含着下式成立，

$$当\ 0 \le \sum_{i=1}^{N} u_{0i} < a(\lambda)\ 时，有\quad \sum_{i=1}^{N} u_i(t,\tau_0,u_0) < b(B)/2, \qquad t \ge \tau_0 + T. \tag{3.15}$$

鉴于讨论 (3.11) 式的方法，有

$$V(t, y(t+\eta) - x(t)) \le r(t+\eta, \tau_0, V(t_0, y_0 - x_0)), \qquad t \ge t_0. \tag{3.16}$$

由条件 ($A_{3.2}$) 及 (3.14)–(3.16) 式，可得

$$\begin{aligned} b(\|y(t+\eta) - x(t)\|) &\le L_0(t, y(t+\eta) - x(t)) \le r_0(t+\eta, \tau_0, V(t_0, y_0 - x_0)) \\ &< r_0(t+, \tau_0, V(t_0, y_0 - x_0)) + b(B)/2 < b(B), \qquad T \ge t_0 + T. \end{aligned} \tag{3.17}$$

因此，当 $\|y_0 - x_0\| < \lambda$ 且 $|\eta| < \sigma_0$ 时， $\|y(t+\eta) - x(t)\| < B,\ t \ge t_0 + T$ 成立．证毕．

4 实例

在本节，将通过例子来说明是如何应用本文所得结果得到微分系统的稳定性的．同时，本例也说明了向量 Lyapunov 函数的有效性．

例 考虑如下非线性微分系统

$$\begin{cases} x_1'(t) = e^{-t}x_2(t) + [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2]x_1(t), \\ x_2'(t) = e^{-t}x_1(t) + [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2]x_2(t), \\ x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \ge 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

如果选取纯量 Lyapunov 函数

$$V(t,x) = x_1^2 + x_2^2.$$

易得

$$D^+V(t, y-x) \le 2\big[e^{-t} + |\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2|\big]\, V(t, y-x).$$

很显然，纯量微分方程

$$u' = 2\big[e^{-t} + |\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2|\big]\, u, \qquad u(t_0) = u_0 \ge 0$$

的平凡解是不稳定的．尽管很容易判断系统 (4.1) 的解是稳定的，但是在所选纯量 Lyapunov 函数的形式下，由定理 (3.1) 不能得到系统 (4.1) 的解的任何稳定性方面的信息．

下面，选择向量 Lyapunov 函数 $V = (V_1, V_2)$，其中 $V_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)^2,\ V_2 = \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2$，则 $L_0 = x_1^2+x_2^2$，显然 L_0 是正定且有无穷小上界的．再由 $D^+V(t, y-x) \le g(t, V(t, y-x))$，

其中 $g(t,u)=(g_1(t,u),g_2(t,u))$ 且

$$\begin{cases} g_1(t,u)=2[\sin\ln(t+1)+\cos\ln(t+1)-2+e^{-t}]u_1(t), \\ g_2(t,u)=2[\sin\ln(t+1)+\cos\ln(t+1)-2-e^{-t}]u_2(t), \\ u(\tau_0)=u_0, \qquad \tau_0\ge 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

又由于 $g(t,u)$ 关于 u 是拟单调非减的，同时系统 (4.2) 的解是渐近稳定的．由定理 3.1，可得初始时刻不同的系统 (4.1) 的解 $x(t,t_0,x_0)$ 是渐近稳定的．

参 考 文 献

[1] 白洁．时标动力方程的稳定性． *应用数学学报*, 2010, 33(5): 855–866
(Bai J. Stability of Dynamic Equation on Time Scale. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2010, 33(5): 855–866)

[2] 陈远强，许弘雷．脉冲控制系统的渐近稳定性分析． *应用数学学报*, 2010, 33(3): 479-489
(Chen Y Q, Xu H L. Asymptotic Stability Analysis of Impulsive Control Systems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2010, 33(3): 479–489)

[3] 王培光，樊永艳．脉冲混合系统关于两度量的最终稳定性． *河北大学学报* (自然科学版), 2009, 29(1): 5–7
(Wang P G, Fan Y Y. Eventual Stability of Impulsive Hybrid Systems in Terms of Two Measurements. *J. Hebei University (Natural Science Edition)*, 2009, 29(1): 5–7)

[4] 王培光，王宁，鲍俊艳．变时滞反馈神经网络的全局指数稳定性．河北大学学报 (自然科学版), 2006, 26(2): 123-126
(Wang P G, Wang N, Bao J Y. On Global Exponential Stability of Recurrent Neural Networks with Time-Varying Delays. *J. Hebei University (Natural Science Edition)*, 2006, 26(2): 123–126)

[5] Lakshmikantham V, Vatsala A S. Differential Inequalities with Initial Time Difference and Applications. *J. Inequalities and Applications*, 1999, 3(3): 233–244

[6] Shaw M D, Yakar C. Generalised Variation of Parameters with Initial Time Difference and a Comparison Result in Terms of Lyapunov Like functions. *International J. Non-linear Differential Equations-theory-methods and Applications*, 1999, 5: 86–108

[7] Yakar C, Deo S G. Variation of Parameters Formulae with Initial Time Difference for Linear Integrodifferential Equations. *Applicable Analysis: an International Journal*, 2006, 85(4): 333–343

[8] Lakshmikantham V, Leela S, Vasundharadevi J. Another Approach to the Theory of Differential Inequalities Relative to Changes in the Initial Times. *J. Inequalities and Applications*, 1999, 4(2): 163–174

[9] McRae F A. Perturbing Lyapunov Functions and Stability Creteria for Initial Time Difference. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 117(2-3): 313–320

[10] Jankowski T. Delay Intigro-differential Inequalities with Initial Time Difference and Applications. *J. Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 291(2): 605–624

[11] Jankowski T. Systems of Differential Inequalities with Initial Time Difference. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2004, 56(1): 173–182

[12] Song X, Li S, Li A. Practical Stability of Nonlinear Differential Equation with Initial Time Difference. *Applied Mathematics Computation*, 2008, 203(1): 157–162

[13] Yakar C, Shaw M D. Practical Stability in Terms of Two Measures with Initial Time Difference. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 2009, 71(12): 781–785

[14] Li A, Feng E, Li S. Stability and Boundedness Criteria for Nonlinear Diffeential Systems Relative to Initial Time Difference and Applications. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(2): 1073–1080

[15] Song X, Li A, Wang Z. Study on the Stability of Nonlinear Differential Equation with Initial Time Difference. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(3): 1304–1311

[16] Lakshimikantham V, Matrosov V M, Sivasundaram S. Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991

Stability Criteria of Differential Equations with Initial Time Difference

BAO Junyan

(*College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding* 071000)

(*E-mail: jybao@hbu.edu.cn*)

WANG Peiguang GAO Chunxia

(*College of Electronic and Information Engineering, Hebei University, Baoding* 071000)

Abstract In this paper, stability and practical stability criteria of differential equations with initial time difference are investigated by using vector Lyapunove functions. The method of vector Lyapunove is more effective than a single Lyapunov function in terms of determining stability of differential equations with initial time difference, and we also give a simple example to illustrate the advantage of vector Lyapunov functions.

Key words stability; practical stability; vector Lyapunove functions; initial time difference

MR(2000) Subject Classification 34C11; 34K35

Chinese Library Classification O175.1