第 35 卷 第 5 期　　应用数学学报　　Vol. 35 No. 5
2012 年 9 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Sep., 2012

时变线性分布参数系统的鲁棒指数稳定性分析*

张为元

(西安电子科技大学理学院，西安 710071)

(咸阳师范学院数学与应用数学研究所，咸阳 712000)

(E-mail: ahzwy@163.com)

李俊民

(西安电子科技大学理学院，西安 710071)

(E-mail: jmli@mail.xidian.edu.cn)

夏志乐

(西安电子科技大学理学院，西安 710071)

(浙江省台州学院数信学院，台州 317000)

摘　要　研究了一类不确定性分布参数系统的鲁棒指数稳定性和稳定化问题. 利用推广到 Hilbert 空间的 Lyapunov-Krasovskii 方法和不等式技巧，证明了线性时滞系统的鲁棒指数稳定性，并且依赖时滞的鲁棒指数稳定性和稳定化的充分条件可以表示成线性算子不等式 (LOI) 形式，其中决策变量是 Hilbert 空间的算子. 把得到的结果应用到一个抛物型方程，这些条件归结为线性矩阵不等式 (LMI). 最后，一个数值例子说明了稳定性分析的有效性.

关键词　分布参数系统；不确定性；指数稳定性；　Lyapunov 泛函

MR(2000) 主题分类　93E15

中图分类　O175.13; TP273.02

1　引言

自然界中时滞现象普遍存在，如机械传动系统，大型电网系统，网络控制系统等，

本文 2010 年 6 月 17 日收到. 2012 年 3 月 11 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (60974139)，中央高校基本科研业务费专项资金 (72103676) 和陕西省教育厅专项科研项目 (2010JK896, 01JK060) 资助项目.

都存在着时滞现象，特别是在动力系统中总是不可避免存在滞后现象. 在工程系统当中，时滞往往是系统不稳定和系统性能变差的主要原因之一 [1]. 在分布参数系统反馈中甚至任意小的时滞也会使系统不稳定 [2–4]. 因此对时滞系统稳定性问题进行研究具有重大理论意义和实际价值.

近年来已有一些作者利用 Lyapunov 技巧研究了带时滞的偏微分方程的稳定性 [4–12]. Wang[5,6] 把 Lyapunov 第二方法推广到 Banach 空间中的抽象非线性时滞系统，研究了在 Dirichlet 条件下带常时滞的热方程和波动方程的稳定性. Nicaise[4] 考虑了时滞波动方程的稳定性和不稳定性条件. 最近， Fridman[7] 把 Lyapunov-Krasovskii 方法推广到 Hilbert 空间中的时滞线性系统，其中有界线性算子作用在时滞状态，研究了一类时滞线性分布参数系统的指数稳定性. 然而，上述文献都没有考虑系统的不确定性稳定性问题.

众所周知，由于存在模型误差，测量误差，数字误差等，使动态系统不可避免地存在着不确定因素. 这些不确定因素会对系统性能产生一定的影响，特别是对系统的稳定性产生影响，因此不确定时滞系统稳定性问题被众多作者研究 [13–16]. 由于不确定时滞分布参数系统稳定性的复杂性，目前不确定时滞系统稳定性问题的研究均局限于集中参数系统的研究，分布参数系统相关研究报道相当少.

本文对于一类不确定性分布参数系统的鲁棒指数稳定性进行研究. 利用推广到 Hilbert 空间的 Lyapunov-Krasovskii 方法和不等式技巧，结合 Newton-Leibniz 公式，给出了系统鲁棒指数稳定性的充分条件，并且此条件用线性算子不等式 (LOI) 表示出来，其中决策变量是 Hilbert 空间的算子. 在此基础上，进一步运用推广的线性矩阵不等式 (LMI) 方法研究了系统的稳定化问题.

2 问题描述与预备知识

设 H 是 Hilbert 空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 诱导范数为 $\|\cdot\|$. $L(H)$ 表示一切由 H 到 H 的有界线性算子的全体， $B(H)$ 表示一切由 H 到 H 的线性算子的全体， P^* 表示 P 的伴随算子， $P>0$ 表示 P 是正算子， I 为单位算子.

定义 1 [17] 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，如果 $T^*=T$, 则称 T 是自伴算子. 进而如果对任意的 $x\in H$, 有 $\langle Tx,x\rangle>0$, 则称 T 为正算子.

考虑不确定时滞分布参数控制系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=(A_1+\Delta A_1)x(t)+(A_2+\Delta A_2)x(t-\tau(t))+(B+\Delta B)u(t), \qquad t\ge t_0, \qquad (1)\\ &x_{t_0}=\phi(\theta), \qquad \theta\in[-h,0],\ \phi(t)\in W,\end{aligned}$$

其中 $x(\cdot),u(\cdot)$ 分别为状态，控制输入， A_1 的定义域为 $D(A_1)$, $\overline{D(A_1)}=H$. 线性算子 A_1 是 H 上的一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，且 $\|T(t)\|\le Me^{\omega t}$, $M\ge1$, $\omega\in R$, $t\ge t_0$, A_2, $B\in L(H)$, $\tau(t)\in C^1([t_0,\ +\infty),\ (0,\ h])$ 为时滞， $\dot{\tau}(t)\le k<1$, $h>0$, k, 为

常数． $\phi(t)\in W$ 是初始函数．设 $A=A_1+\Delta A_1$,

$$\begin{aligned}&\|\phi(t)\|_W=\sqrt{|A\phi(0)|^2+\|\phi(t)\|_{C^1([-h,0],\ H)}},\\&W=C([-h,0],D(A))\cap C^1([-h,0],H),\\&x_{t_0}=x(t_0+\theta),\qquad t_0\geq 0.\end{aligned}$$

不确定线性算子 ΔA_1, ΔA_2, $\Delta B\in L(H)$ 分别为 A_1, A_2, B 的有界扰动满足下列条件存在算子 $\widehat{A}_1>0$, $\widehat{A}_2>0$, $\widehat{B}>0$, 使得 $\Delta A_1^*\Delta A_1\leq\widehat{A}_1$, $\Delta A_2^*\Delta A_2\leq\widehat{A}_2$, $\Delta B^*\Delta B\leq\widehat{B}$.

首先我们考虑当 $u(t)=0$ 的情形：

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=(A_1+\Delta A_1)x(t)+(A_2+\Delta A_2)x(t-\tau(t)),\qquad t\geq t_0\\&x_{t_0}=\phi(\theta),\qquad\theta\in[-h,0],\ \ \phi(t)\in W.\end{aligned}\tag{2}$$

由 [18, 定理 3.1.1] 知 $A_1+\Delta A_1$ 是 H 上的一个 C_0 半群 $Q(t)$ 的无穷小生成元，且 $\|Q(t)\|\leq Me^{(\omega+M\|\Delta A_1\|)t}$. 可类似 [7, 引理 3] 证明初值问题 (2) 的解在 $[t_0,+\infty)$ 上是适定的，其适度解 (mild solution) 可由积分方程表示如下：

$$x(t)=T(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}T(t-s)\big[\Delta A_1x(s)+(A_2+\Delta A_2)x(s-\tau(s))\big]\,\mathrm{d}s,\qquad t\geq t_0.$$

定义 2　系统 (2) 是鲁棒指数稳定的，给定 $\alpha>0$, 对任意不确定算子 $\Delta A_1,\Delta A_2\in L(H)$, 如果存在正数 $G\geq 1$, 使得对每个解 $x(t,t_0,\phi)$ 满足下列估计式

$$\|x(t,\ t_0,\phi)\|\leq Ge^{-\alpha(t-t_0)}\|\phi\|_W,\qquad\forall\, t\geq t_0.$$

引理 1[19]　(Jensen, s 不等式) 设 H 是 Hilbert 空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积，常数 $l>0$ 且 $x\in L^2([a,b],H)$, 则对任意 $P\in L(H)$ 且 $P>0$ 有下列不等式成立

$$l\int_0^l\big\langle x(s),Px(s)\big\rangle\,\mathrm{d}s\geq\Big\langle\int_0^l x(s)\mathrm{d}s,P\int_0^l x(s)\,\mathrm{d}s\Big\rangle.$$

引理 2　设 $N,N^*\in B(H)$, 若 $N^*N\leq\widehat{N}$, $\alpha>0$, 则对任意 $x,y\in H$ 有

$$2\langle x,Ny\rangle\leq\alpha\langle x,x\rangle+\frac{1}{\alpha}\langle y,\widehat{N}y\rangle.$$

证

$$\begin{aligned}0\leq&\Big\langle\sqrt{\alpha}x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}Ny,\sqrt{\alpha}x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}Ny\Big\rangle=\alpha\langle x,x\rangle-2\langle x,Ny\rangle+\frac{1}{\alpha}\langle Ny,Ny\rangle\\=&\alpha\langle x,x\rangle-2\langle x,Ny\rangle+\frac{1}{\alpha}\langle y,N^*Ny\rangle\leq\alpha\langle x,x\rangle-2\langle x,Ny\rangle+\frac{1}{\alpha}\langle y,\widehat{N}y\rangle,\end{aligned}$$

所以

$$2\langle x,Ny\rangle\leq\alpha\langle x,x\rangle+\frac{1}{\alpha}\langle y,\widehat{N}y\rangle.$$

引理 3 [5] 设 $z \in W^{1,2}([a,b],R),\ z(a)=z(b)=0$, 则

$$\int_a^b z^2(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b \Big[\frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s}\Big]^2\,\mathrm{d}s.$$

引理 4 对给定的自伴算子矩阵 $S=\left[\begin{smallmatrix} S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{smallmatrix}\right]$, 其中 $S_{11},S_{12},S_{21},S_{22}\in B(H),\ S_{11}=S_{11}^*$, $S_{21}=S_{12}^*$, $S_{22}=S_{22}^*$, S_{11},S_{22} 可逆，以下三个条件等价

(i) $S<0$,

(ii) $S_{11}<0,\ S_{22}-S_{12}^*S_{11}^{-1}S_{12}<0$,

(iii) $S_{22}<0,\ S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^*<0$.

证 (i)⇔(ii)

$$\begin{aligned}S<0 &\Leftrightarrow \langle\varsigma,S\varsigma\rangle<0 \Leftrightarrow \Big\langle\begin{bmatrix} I & 0\\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I\end{bmatrix}^*\varsigma, S\begin{bmatrix} I & 0\\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I\end{bmatrix}^*\varsigma\Big\rangle<0\\ &\Leftrightarrow\Big\langle\varsigma,\begin{bmatrix} I & 0\\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I\end{bmatrix}^*\varsigma\Big\rangle<0\\ &\Leftrightarrow\Big\langle\varsigma,\begin{bmatrix} S_{11} & 0\\ 0 & S_{22}-S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}\end{bmatrix}\varsigma\Big\rangle<0\\ &\Leftrightarrow S_{11}<0, S_{22}-S_{12}^*S_{11}^{-1}S_{12}<0,\end{aligned}$$

其中 $\varsigma=(\varsigma_1,\varsigma_2)\in H\times H$.

(i)⇔(iii)

$$\begin{aligned}S<0 &\Leftrightarrow \langle\varsigma,S\varsigma\rangle<0 \Leftrightarrow \Big\langle\begin{bmatrix} I & 0\\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I\end{bmatrix}^*\varsigma, S\begin{bmatrix} I & 0\\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I\end{bmatrix}^*\varsigma\Big\rangle<0\\ &\Leftrightarrow\Big\langle\begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}^*\varsigma, S\begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}^*\varsigma\Big\rangle<0\\ &\Leftrightarrow\Big\langle\varsigma,\begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}^*\varsigma\Big\rangle<0\\ &\Leftrightarrow\Big\langle\varsigma,\begin{bmatrix} S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^* & 0\\ 0 & S_{22}\end{bmatrix}\varsigma\Big\rangle<0\\ &\Leftrightarrow S_{22}<0, S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^*<0,\end{aligned}$$

其中 $\varsigma=(\varsigma_1,\varsigma_2)\in H\times H$.

注 引理 4 在证明不确定性分布参数系统的鲁棒指数稳定性和稳定化中起到重要作用，使鲁棒稳定性和稳定化的条件可以表示成 LOI 形式. 显然当我们把引理中的线性算子看作是适当维数矩阵时，引理 4 为著名的 Schur 补定理.

考虑依赖 x 和 $\dot{x}$ 的 Lyapunov-Krasovskii 泛函 [1], 给定连续泛函 $V: R\times W\times C([-h,\ 0],\ H)\to R$, 沿着初值问题 (1) 的解 $x_t(t_0,\phi),\ t\ge t_0$ 右导数的上确界定义如下

$$\dot{V}(t,\ \phi,\ \dot{\phi})=\lim_{s\to0^+}\sup\frac{1}{s}\big[V(t+s,x_{t+s}(t,\ \phi),\ \dot{x}_{t+s}(t,\ \phi))-V(t,\ \phi,\ \dot{\phi})\big].$$

3　主要结论

3.1 稳定性分析

定理 1　给定 $\alpha>0$, 如果存在满足下式 (3) 的 $P,Q,R\in B(H)$ 且 $P>0,\ Q\geq 0,\ R\geq 0$ 和正常数 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_j\ (j=1,2,\cdots,10)$ 使下列 LOI (4) 成立

$$\begin{cases} c_1\big\langle x(t),x(t)\big\rangle \leq \big\langle x(t),Px(t)\big\rangle \leq c_2\big[\langle x(t),x(t)\rangle+\langle Ax(t),Ax(t)\rangle\big], \\ \big\langle x(t),Qx(t)\big\rangle \leq c_3\big\langle x(t),x(t)\big\rangle, \qquad \big\langle x(t),Rx(t)\big\rangle \leq c_4\big\langle x(t),x(t)\big\rangle, \\ \big\langle x(t),R^2x(t)\big\rangle \leq c_5\big\langle x(t),x(t)\big\rangle, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $c_i\ (i=1,\cdots,5)$ 为正常数.

$$\begin{bmatrix} S_1 & hA_1^*RA_2+\dfrac{e^{-2\alpha h}R}{h}+PA_2 & 0 & \alpha_1A_1^*R & (\alpha_1+\alpha_2)P & 0 \\ hA_2^*RA_1+\dfrac{e^{-2\alpha h}}{h}R+A_2^*P & S_2 & \dfrac{e^{-2\alpha h}}{h}R & 0 & 0 & a_2A_2^*R \\ 0 & \dfrac{e^{-2\alpha hR}}{h} & -\dfrac{e^{-2\alpha h}}{h}R & 0 & 0 & 0 \\ a_1RA_1 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ (\alpha_1+\alpha_2)P & 0 & 0 & 0 & -(\alpha_1+\alpha_2)I & 0 \\ 0 & a_2RA_2 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0, \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} S_1 =&2PA_1+\frac{1}{\alpha_1}\widehat{A}_1+hA_1^*RA_1+\frac{h}{2\beta_1}\widehat{A}_1+\frac{h}{2\beta_2}\widehat{A}_1+hc_4\widehat{A}_1+\frac{h\beta_3}{2}\widehat{A}_1 \\ &+\frac{h\beta_5}{2}\widehat{A}_1+\frac{h}{2\beta_7}\widehat{A}_2+\frac{h}{2\beta_8}\widehat{A}_1+\frac{c_5h}{2\beta_{10}}\widehat{A}_1+Q+2\alpha P-\frac{e^{-2\alpha h}}{h}R, \\ S_2 =&-e^{-2\alpha h}\left[(1-k)Q+\frac{2R}{h}\right]+\frac{1}{2\alpha_2}\widehat{A}_2+\frac{h}{2\beta_4}\widehat{A}_2+hA_2^*RA_2+\frac{c_5h}{2\beta_5}\widehat{A}_2 \\ &+\frac{h}{2}\beta_6\widehat{A}_2+c_4h\widehat{A}_2+\frac{h}{2\beta_7}\widehat{A}_2+\frac{h}{2}\beta_8A_2^*RA_2+\frac{h}{2}(\beta_9+\beta_{10})\widehat{A}_2, \\ a_1^2 =&\frac{\beta_1h}{2}+\frac{\beta_2h}{2}+\frac{\beta_4h}{2}+\frac{h}{2\beta_9}, \\ a_2^2 =&\frac{h}{2\beta_3}+\frac{h}{2\beta_6}+\frac{h\beta_7}{2}, \qquad a_1,a_2>0, \end{aligned}$$

则系统 (2) 是鲁棒指数稳定的.

证 考虑 Lyapunov 泛函

$$\widetilde{V}(t) \triangleq V(t,x_t,\dot{x}_t) = \big\langle x(t), Px(t)\big\rangle + \int_{t-\tau(t)}^{t} e^{2\alpha(s-t)}\big\langle x(s), Qx(s)\big\rangle\,\mathrm{d}s + \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} e^{2\alpha(s-t)}\big\langle \dot{x}(s), R\dot{x}(s)\big\rangle\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta. \tag{5}$$

由条件 (3) 容易验证存在正常数 λ_1,λ_2 使得

$$\begin{aligned}
&\lambda_1|\phi(0)|^2 \le V(t,x_t,\dot{x}_t) \le \lambda_2\|\phi\|_W^2,\\
&\dot{\widetilde{V}}(t) + 2\alpha\widetilde{V}(t)\\
=&2\langle x(t), P\dot{x}(t)\rangle + \langle x(t), Qx(t)\rangle - e^{-2\alpha\tau(t)}(1-\dot{\tau}(t))\big\langle x(t-\tau(t)), Qx(t-\tau(t))\big\rangle\\
&+\int_{-h}^{0}\langle \dot{x}(t), R\dot{x}(t)\rangle\,\mathrm{d}\theta - \int_{-h}^{0} e^{2\alpha\theta}\langle \dot{x}(t+\theta), R\dot{x}(t+\theta)\rangle\,\mathrm{d}\theta + 2\alpha\langle x(t), Px(t)\rangle\\
\le&2\langle x(t), P\dot{x}(t)\rangle + \langle x(t), Qx(t)\rangle + h\langle \dot{x}(t), R\dot{x}(t)\rangle\\
&- e^{-2\alpha h}(1-k)\langle x(t-\tau(t)), Qx(t-\tau(t))\rangle\\
&- e^{-2\alpha h}\int_{t-h}^{t}\langle \dot{x}(s), R\dot{x}(s)\rangle\,\mathrm{d}s + 2\alpha\langle x(t), Px(t)\rangle.
\end{aligned}$$

由引理 1, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{t-\tau(t)}^{t}\langle \dot{x}(s), R\dot{x}(s)\rangle\,\mathrm{d}s \ge \frac{1}{h}\Big\langle \int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s, R\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\Big\rangle,\\
&\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\langle \dot{x}(s), R\dot{x}(s)\rangle\,\mathrm{d}s \ge \frac{1}{h}\Big\langle \int_{t-h}^{t-\tau(t)}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s, R\int_{t-h}^{t-\tau(t)}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\Big\rangle,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{V}}(t) + 2\alpha\widetilde{V}(t) \le&2\langle x(t), P\dot{x}(t)\rangle + \langle x(t), Qx(t)\rangle + 2\alpha\langle x(t), Px(t)\rangle\\
&+ h\langle \dot{x}(t), R\dot{x}(t)\rangle - e^{-2\alpha h}(1-k)\big\langle x(t-\tau(t)), Qx(t-\tau(t))\big\rangle\\
&- \frac{e^{-2\alpha h}}{h}\big\langle x(t)-x(t-\tau(t)), R(x(t)-x(t-\tau(t)))\big\rangle\\
&- \frac{e^{-2\alpha h}}{h}\big\langle x(t-\tau(t))-x(t-h), R(x(t-\tau(t))-x(t-h))\big\rangle.
\end{aligned}$$

由引理 2 与条件 (3) 有

$$\begin{aligned}
&2\langle x(t), P\dot{x}(t)\rangle\\
=&2\Big[\big\langle x(t), PA_1x(t)\big\rangle + \big\langle x(t), P\Delta A_1x(t)\big\rangle + \big\langle x(t), PA_2x(t-\tau(t))\big\rangle + \big\langle x(t), P\Delta A_2x(t-\tau(t))\big\rangle\Big]\\
\le&\big\langle x(t), 2PA_1x(t)\big\rangle + \Big\langle x(t), \Big(\alpha_1P^2 + \frac{1}{\alpha_1}\widehat{A}_1\Big)x(t)\Big\rangle + \big\langle x(t), 2PA_2x(t-\tau(t))\big\rangle\\
&+\big\langle x(t), \alpha_2P^2x(t)\big\rangle + \Big\langle x(t-\tau(t)), \frac{1}{\alpha_2}\widehat{A}_2x(t-\tau(t))\Big\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big\langle \dot{x}(t), R\dot{x}(t)\big\rangle \\
\le&\big\langle x(t), A_1^*RA_1x(t)\big\rangle + \frac{\beta_1}{2}\big\langle x(t), A_1^*R^2A_1x(t)\big\rangle \\
&+ \frac{1}{2\beta_1}\big\langle x(t), \widehat{A}_1x(t)\big\rangle + \frac{\beta_2}{2}\big\langle x(t), A_1^*R^2A_1x(t)\big\rangle + \frac{1}{2\beta_2}\big\langle x(t), \widehat{A}_1x(t)\big\rangle + \big\langle x(t), c_4\widehat{A}_1x(t)\big\rangle \\
&+ \big\langle x(t), A_1^*RA_2x(t-\tau(t))\big\rangle + \frac{\beta_3}{2}\big\langle x(t), \widehat{A}_1x(t)\big\rangle + \frac{1}{2\beta_3}\big\langle x(t-\tau(t)), A_2^*R^2A_2x(t-\tau(t))\big\rangle \\
&+ \frac{\beta_4}{2}\big\langle x(t), A_1^*R^2A_1x(t)\big\rangle + \frac{1}{2\beta_4}\big\langle x(t-\tau(t)), \widehat{A}_2x(t-\tau(t))\big\rangle \\
&+ \big\langle x(t-\tau(t)), A_2^*RA_2x(t-\tau(t))\big\rangle + \frac{\beta_5}{2}\big\langle x(t), \widehat{A}_1x(t)\big\rangle \\
&+ \frac{c_5}{2\beta_5}\big\langle x(t-\tau(t)), \widehat{A}_2x(-\tau(t))\big\rangle + \frac{\beta_6}{2}\big\langle x(t-\tau(t)), \widehat{A}_2x(t-\tau(t))\big\rangle \\
&+ \frac{1}{2\beta_6}\big\langle x(t-\tau(t)), A_2^*R^2A_2x(t-\tau(t))\big\rangle + c_4\big\langle x(t-\tau(t)), \widehat{A}_2x(t-\tau(t))\big\rangle \\
&+ \big\langle x(t-\tau(t)), A_2^*RA_1x(t)\big\rangle + \frac{\beta_7}{2}\big\langle x(t-\tau(t)), A_2^*R^2A_2x(t-\tau(t))\big\rangle \\
&+ \frac{1}{2\beta_7}\big\langle x(t-\tau(t)), \widehat{A}_2x(t-\tau(t))\big\rangle + \frac{\beta_8}{2}\big\langle x(t-\tau(t)), A_2^*R^2A_2x(t-\tau(t))\big\rangle \\
&+ \frac{1}{2\beta_8}\big\langle x(t), \widehat{A}_1x(t)\big\rangle + \frac{1}{2\beta_9}\big\langle x(t), A_1^*R^2A_1x(t)\big\rangle + \frac{\beta_9}{2}\big\langle x(t-\tau(t)), \widehat{A}_2x(t-\tau(t))\big\rangle \\
&+ \frac{\beta_{10}}{2}\big\langle x(t-\tau(t)), \widehat{A}_2x(t-\tau(t))\big\rangle + \frac{c_5}{2\beta_{10}}\big\langle x(t), \widehat{A}_1x(t)\big\rangle.
\end{aligned}$$

因而当下列矩阵不等式 (6) 成立时,

$$M = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ ** & X_{22} & X_{23} \\ ** & * & X_{33} \end{pmatrix} \le 0, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}
X_{11} =& 2PA_1 + \alpha_1P^2 + \frac{1}{\alpha_1}\widehat{A}_1 + \alpha_2P^2 + h\Big[A_1^*RA_1 + \frac{\beta_1}{2}A_1^*R^2A_1 + \frac{1}{2\beta_1}\widehat{A}_1 \\
&+ \frac{1}{2}\beta_2A_1^*R^2A_1 + \frac{1}{2\beta_2}\widehat{A}_1 + c_4\widehat{A}_1 + \frac{1}{2}\beta_3\widehat{A}_1 + \frac{\beta_4}{2}A_1^*R^2A_1 + \frac{\beta_5}{2}\widehat{A}_1 \\
&+ \frac{1}{2\beta_8}\widehat{A}_1 + \frac{1}{2\beta_9}A_1^*R^2A_1 + \frac{c_5}{2\beta_{10}}\widehat{A}_1\Big] + Q + 2\alpha P - \frac{e^{-2\alpha h}}{h}R, \\
X_{12} =& hA_1^*RA_2 + \frac{Re^{-2\alpha h}}{h} + PA_2, \\
X_{13} =& 0, \\
X_{22} =& -e^{-2\alpha h}\Big[(1-k)Q + \frac{2R}{h}\Big] + \frac{1}{\alpha_2}\widehat{A}_2 + h\Big[\frac{1}{2\beta_3}A_2^*R^2A_2 + \frac{1}{2\beta_4}\widehat{A}_2 + A_2^*RA_2 \\
&+ \frac{c_5}{2\beta_5}\widehat{A}_2 + \frac{1}{2}\beta_6\widehat{A}_2 + \frac{1}{2\beta_6}A_2^*R^2A_2 + c_4\widehat{A}_2 + \frac{1}{2}\beta_7A_2^*R^2A_2 \\
&+ \frac{1}{2\beta_7}\widehat{A}_2 + \frac{1}{2}\beta_8A_2^*RA_2 + \frac{1}{2}(\beta_9 + \beta_{10})\widehat{A}_2\Big],
\end{aligned}$$

$$X_{23} = \frac{\mathrm{Re}^{-2\alpha h}}{h},$$
$$X_{33} = -\frac{e^{-2\alpha h}}{h}R,$$

有

$$\dot{\widetilde{V}}(t) + 2\alpha\widetilde{V}(t) \le \big\langle \xi(t),\ M\xi(t) \big\rangle \le 0, \tag{7}$$

其中 $\xi(t) = \mathrm{col}\left\{x(t),\ x(t-\tau(t)),\ x(t-h)\right\}$. 由引理 4 知，(4) 与 (6) 等价，所以当不等式 (4) 满足时, 不等式 (7) 成立. 故 $\widetilde{V}(t) \le e^{-2\alpha(t-t_0)}V(t_0)$, 即 $\|x(t,t_0,\phi)\| \le e^{-\alpha(t-t_0)}a\|\phi\|_W$, 其中 $a = [c_2 + h(c_3 + h^2c_4/2)]/c_1$, 所以结论成立.

在 (5) 中，当 $R=0$ 时我们有如下结论：

推论 1 给定 $\alpha > 0$, 如果存在 $P>0,\ Q\ge 0$ 且 $P,\ Q \in B(H)$ 满足 (3), 正数 $\alpha_1,\ \alpha_2$, 使下列 LOI (8) 成立

$$\begin{bmatrix} S_3 & PA_2 & (\alpha_1+\alpha_2)P \\ A_2^*P & S_4 & 0 \\ (\alpha_1+\alpha_2)P & 0 & -(\alpha_1+\alpha_2)I \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

其中

$$S_3 = 2PA_1 + \frac{1}{\alpha_1}\widehat{A}_1 + 2\alpha P + Q, \qquad S_4 = \frac{1}{\alpha_2}\widehat{A}_2 - e^{-2\alpha h}(1-k)Q,$$

则系统 (2) 是鲁棒指数稳定的，且不等式 $\|x(t,t_0,\phi)\| \le e^{-\alpha t}a\|\phi\|_W$，$a = (c_2 + hc_3)/c_1$.

在定理 1 的基础上，进一步考虑系统 (1) 的稳定化问题.

3.2 鲁棒稳定化

定理 2 给定 $\alpha > 0$, 如果存在 $P,Q,R,K \in B(H)$ 且 $P>0,\ Q\ge 0,\ R\ge 0$ 满足 (3) 和正数 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_j\ (j=1,2,\cdots,10),\ \gamma_i\ (i=0,1,\cdots,20)$, 使下列 LOI (9) 成立

$$\left[\begin{matrix} S_3 & X_{12} & 0 & a_7K^*B^* & 2hc_4K^*B^* & a_6(A_1+BK)^* \\ X_{12}^* & S_4 & \frac{e^{-2\alpha h}}{h}R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-2\alpha h}}{h}R & \frac{e^{-2\alpha h}}{h}R & 0 & 0 & 0 \\ a_7BK & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 2hc_4BK & 0 & 0 & 0 & -2hc_4I & 0 \\ a_6\left(A_1+BK\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ a_5RBK & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3RA_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_8RA_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} a_5K^*B^* & a_4K^* & a_3A_1^*R & a_0P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_8A_2^*R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\widehat{B}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{matrix}\right] < 0, \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_3 &= S_1 + h\Big(\frac{1}{2\gamma_2}\widehat{A}_1 + \frac{c_5}{2\gamma_6}\widehat{A}_1 + \frac{c_5}{2\gamma_{10}}\widehat{B} + \frac{\gamma_{11}}{2}\widehat{A}_1 + \frac{c_5}{2}\gamma_{12}\widehat{A}_1 + \frac{c_5}{2\gamma_{19}}\widehat{A}_1\Big), \\
S_4 &= S_2 + h\Big(\frac{1}{2\gamma_4}\widehat{A}_2 + \frac{c_5}{2\gamma_9}\widehat{A}_2 + \frac{\gamma_{16}}{2}\widehat{A}_2 + \frac{\gamma_{17}c_5}{2}\widehat{A}_2 + \frac{c_5}{2\gamma_{20}}\widehat{A}_2\Big), \\
a_0^2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_0 + \gamma_1, \\
a_3^2 &= a_1^2 + \frac{\gamma_{18}}{2}, \\
a_5^2 &= hc_5\Big(\frac{\gamma_2}{2} + \frac{\gamma_3}{2} + \frac{\gamma_4}{2} + \frac{1}{2\gamma_{11}} + \frac{1}{2\gamma_{13}} + \frac{1}{2\gamma_{16}}\Big), \\
a_4^2 &= \frac{1}{\gamma_1} + h\Big(\frac{1}{2\gamma_3} + \frac{\gamma_5}{2} + \frac{\gamma_6}{2} + \frac{\gamma_7}{2} + \frac{c_5}{2\gamma_7} + \frac{\gamma_8}{2} + \frac{\gamma_9}{2} + \frac{1}{2\gamma_{12}} + \frac{\gamma_{13}}{2} \\
&\quad + \frac{\gamma_{14}}{2} + \frac{c_5}{2\gamma_{14}} + \frac{1}{2\gamma_{15}} + \frac{1}{2\gamma_{17}}\Big), \\
a_6^2 &= h\Big(\frac{c_5}{2\gamma_5} + \frac{\gamma_{10}}{2}\Big), \\
a_7^2 &= \frac{1}{\gamma_0} + h\Big(\frac{1}{2\gamma_{18}} + \frac{\gamma_{19}}{2} + \frac{\gamma_{20}}{2}\Big), \\
a_8^2 &= a_2^2 + \frac{h}{2\gamma_8} + \frac{\gamma_{15}h}{2},
\end{aligned}$$

$a_0, a_i\ (i = 3, 4, \cdots, 8)$ 均为正数，则系统 (1) 可指数稳定化.

证　系统 (1) 加入控制器 $u = Kx$, 仿照定理 1 的证明当不等式 (10) 成立时

$$N = \begin{pmatrix} Y_{11} + X_{11} & Y_{12} + X_{12} & Y_{13} + X_{13} \\ ** & Y_{22} + X_{22} & Y_{23} + X_{23} \\ ** & * & Y_{33} + X_{33} \end{pmatrix} \leq 0, \tag{10}$$

其中

$$Y_{11} = \gamma_0 P^2 + \frac{1}{\gamma_0}K^*B^*BK + \gamma_1 P^2 + \frac{1}{\gamma_1}K^*\widehat{B}K + h\Big[\frac{1}{2}\gamma_2 c_5 K^*B^*BK + \frac{1}{2\gamma_2}\widehat{A}_1$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\gamma_3 c_5 K^*B^*BK+\frac{1}{2\gamma_3}K^*\widehat{B}K+\frac{1}{2}\gamma_4 c_5 K^*B^*BK+\frac{1}{2}\gamma_5 K^*\widehat{B}K\\
&+\frac{1}{2\gamma_5}c_5(A_1+BK)^*(A_1+BK)+\frac{1}{2}\gamma_6 K^*\widehat{B}K+\frac{c_5}{2\gamma_6}\widehat{A}_1+\frac{1}{2}\gamma_7 K^*\widehat{B}K\\
&+\frac{c_5}{2\gamma_7}K^*\widehat{B}K+\frac{1}{2}\gamma_8 K^*\widehat{B}K+\frac{1}{2}\gamma_9 K^*\widehat{B}K+\frac{1}{2}\gamma_{10}(A_1+BK)^*(A_1+BK)\\
&+\frac{c_5}{2\gamma_{10}}\widehat{B}+\frac{1}{2}\gamma_{11}\widehat{A}_1+\frac{1}{2\gamma_{11}}c_5K^*B^*BK+\frac{c_5}{2}\gamma_{12}\widehat{A}_1+\frac{1}{2\gamma_{12}}K^*\widehat{B}K\\
&+\frac{1}{2}\gamma_{13}K^*\widehat{B}K+\frac{1}{2\gamma_{13}}c_5K^*B^*BK+\frac{1}{2}\gamma_{14}K^*\widehat{B}K+\frac{c_5}{2\gamma_{14}}K^*\widehat{B}K+\frac{1}{2\gamma_{15}}K^*\widehat{B}K\\
&+\frac{1}{2\gamma_{16}}c_5K^*B^*BK+\frac{1}{2\gamma_{17}}K^*\widehat{B}K+\frac{\gamma_{18}}{2}A_1^*R^*RA_1+\frac{1}{2\gamma_{18}}K^*B^*BK\\
&+\frac{\gamma_{19}}{2}K^*B^*BK+\frac{c_5}{2\gamma_{19}}\widehat{A}_1+\frac{\gamma_{20}}{2}K^*B^*BK+2c_4K^*B^*BK\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{12}=&0,\qquad Y_{13}=0,\qquad Y_{23}=0,\qquad Y_{33}=0,\\
Y_{22}=&h\Big[\frac{1}{2\gamma_4}\widehat{A}_2+\frac{1}{2\gamma_8}A_2^*R^2A_2+\frac{c_5}{2\gamma_9}\widehat{A}_2+\frac{1}{2}\gamma_{15}A_2^*R^2A_2+\frac{1}{2}\gamma_{16}\widehat{A}_2+\frac{c_5}{2}\gamma_{17}\widehat{A}_2+\frac{c_5}{2\gamma_{20}}\widehat{A}_2\Big],
\end{aligned}
$$

有

$$
\dot{\tilde{V}}(t)+2\alpha V(t)\le\langle\xi(t),\qquad N\xi(t)\rangle\le 0, \tag{11}
$$

其中 $\xi(t)=\mathrm{col}\{x(t),x(t-\tau(t)),x(t-h)\}$.

由引理 4 知, (10) 与 (9) 等价, 所以不等式 (9) 满足时 (11) 成立. 接下来仿照定理 1 的证明即可得到结论.

4 抛物型方程的稳定性分析

考虑带 Dirichlet 边值条件的时滞抛物型方程

$$
w_t=b_2w_{\xi\xi}+b_1w_\xi+b_0w+b_3w(\xi,t-\tau(t)),\qquad 0\le\xi\le l,\quad t\ge t_0, \tag{12}
$$

$$
w(0,t)=w(l,t)=0,\qquad t\ge t_0, \tag{13}
$$

其中 $b_2>0$, b_0,b_1,b_3 均为参数. $\tau(t)$ 为时滞, $\dot\tau(t)\le k<1$, $0<\tau(t)\le h$, $\tau(t)\in C^1$, $h>0$, k 为常数.

设 Hilbert 空间 $H=L^2(0,l)$, 在微分方程 (1) 中, 令 $A_1=b_2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+b_1\frac{\partial}{\partial\xi}$, $\Delta A_1=b_0$, $A_2=b_3$, $\Delta A_2=0$ 得方程 (12).

考虑下列 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$
V=p\int_0^l w^2(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi+q\int_{t-\tau(t)}^t\int_0^l e^{2\alpha(s-t)}w^2(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s,
$$

其中 $p,q>0$.

由引理 3 有 $\langle x,2pA_1x\rangle=\int_0^l 2pb_2ww_{\xi\xi}+2pb_1ww_\xi\,\mathrm{d}\xi\le-2pb_2\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l w^2\,\mathrm{d}\xi$.

在 (8) 中取 $\widehat{A}_1 = b_0^2$, $\widehat{A}_2 = 0$, $P = p > 0$, $Q = q > 0$. 如果下列 LMI(14) 成立，则 (8) 成立

$$\begin{bmatrix} S_5 & pb_3 & (\alpha_1+\alpha_2)p \\ pb_3 & -e^{2\alpha h}(1-k)q & 0 \\ (\alpha_1+\alpha_2)p & 0 & -(\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

其中 $S_5 = -2pb_2\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{\alpha_1}b_0^2 - 2\alpha p + q$, 从而得到下列定理.

定理 3 给定 $\alpha > 0$, 如果存在常量 $p > 0$, $q > 0$ 和正数 α_1, α_2, 使 LMI (14) 成立. 则边值问题 (12) 和 (13) 是指数稳定的，且有不等式

$$\int_0^l w^2(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi \le Ge^{-2\alpha(t-t_0)} \sup_{s\in[t_0-h,t_0]} \int_0^l w^2(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi, \qquad t \ge t_0,$$

$G = 1 + hq/p$ 成立.

例 考虑线性反应扩散方程

$$w_t = 0.1w_{\xi\xi} + 0.1w_\xi + 0.03w + 2w(\xi, t-\tau(t)), \qquad 0 \le \xi \le \pi, \quad t \ge t_0, \tag{15}$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \qquad t \ge t_0, \tag{16}$$

其中 $\tau(t) = 0.2\sin^2 2.5t$.

我们有 $h = 0.2$, $k = 0.5$. 取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha = 1.5$, $p = 3.5$, $q = 1.5$, 由定理 3 知系统 (12) 是鲁棒指数稳定的， $G \approx 1.0857$, 系统 (15) 和 (16) 的解满足

$$\int_0^l w^2(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi \le 1.1e^{-2\alpha(t-t_0)} \sup_{s\in[t_0-h,t_0]} \int_0^l w^2(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi.$$

5　结　论

在改进的 Lyapunov 泛函基础上，结合 Newton-Leibniz 公式，利用推广到 Hilbert 空间的 LMI 方法，研究了一类不确定性分布参数系统的鲁棒指数稳定性和稳定化问题. 给出了系统鲁棒指数稳定性的充分条件，并且此条件可以表示成 LOI 形式，其中决策变量是 Hilbert 空间的线性算子. 在此基础上，进一步考虑了系统的鲁棒稳定化问题. 本文工作能推广到更一般的多时滞不确定性系统.

参　考　文　献

[1] Kolmanovskii V, Myshkis A. Applied Theory of Functional Differential Equations. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999

[2] Datko R. Not all Feedback Stabilized Hyperbolic Systems are Robust with Respect to Small Time Delays in Their Feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1988, 26: 697–713

[3] Logemann H, Rebarber R, Weiss G. Conditions for Robustness and Nonrobustness of the Stability of Feedback Systems with Respect to Small Delays in the Feedback Loop. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1996, 34(2): 572–600

[4] Nicaise S, Pignotti C. Stability and Instability Results of the Wave Equation with a Delay Term in the Boundary or Internal Feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, 45(5): 1561–1585

[5] Wang T. Stability in Abstract Functional-differential Equations, II Applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1994, 186: 835–861

[6] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996

[7] Fridman E, Orlov Y. Exponential Stability of Linear Distributed Parameter Systems with Time-varying Delays. *Automatica*, 2009, 45: 194–201

[8] Qiua J, Cao J. Delay-dependent Exponential Stability for a Class of Neural Networks with Time Delays and Reaction-diffusion Terms. *Journal of the Franklin Institute*, 2009, 346: 301–314

[9] 廖晓昕，杨叔子，程时杰等. 具有反应扩散的广义神经网络的稳定性. 中国科学， E 辑, 2002, 32(1): 87–94

(Liao X X, Yang S Z, Cheng S J, et al. Stability of General Neural Networks with Reaction-diffusion. *J. Science in China (Series E)*, 2002, 32(1): 87–94)

[10] 廖晓昕，傅予力等. 具有反应扩散项的 Hopfield 神经网络的稳定性. 电子学报, 2000, 28: 78–82

(Liao X X, Fu Y L, et al. Stability of Hopfield Neural Networks with Reaction-Diffusion Terms. *Acta Electronica. Sinica*, 2000, 28: 78–82)

[11] 王林山，徐道义. 变时滞反应扩散 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性. 中国科学， E 辑, 2003, 33(6): 488–495

(Wang L S, Xu D Y. Global Exponential Stability of Hopfield Reaction-diffusion Neural Networks with Time-varying Delays. *Science in China (Series E)*, 2003, 33(6): 488–495)

[12] Phat V N, Nam P T. Exponential Stability and Stabilization of Uncertain Linear Time-varying Systems Using Parameter Dependent Lyapunov Function. *Control*, 2007, 80: 1333–1341

[13] Xu S, Lam J, Zou Y. Further Results on Delay-dependent Robust Stability Conditions of Uncertain Neutral Systems. *Robust Nonlinear Control*, 2005, 15: 233–246

[14] Wang Y, Xie L, C E de Souza. Robust Control of a Class of Uncertain Nonlinear Systems. *Syst. Control Lett.*, 1992, 22: 139–149

[15] Hien L V, Phat V N. Exponential Stability and Stabilization of a Class of Uncertain Linear Time-delay Systems. *of the Franklin Institute*, 2009, 346: 611–625

[16] Chen W H, Guan Z H, Lu X. Delay-dependent Output Feedback Guaranteed Cost Control for Uncertain Time-delay Systems. *Automatica*, 2004, 40: 1263–1268

[17] Curtain R, Zwart H. An Introduction to Infinite-dimensional Linear Systems. New York: Springer-Verlag, 1995

[18] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations. New

York: Springer-Verlag, 1983

[19] Gu K, Kharitonov V, Chen J. Stability of Time-delay Systems. Boston: Birkhauser, 2003

Robust Exponential Stability Criteria for Linear Distributed Parameter Systems with Time-varying Delays

ZHANG Weiyuan

(*School of Science, Xidian University, Xi'an* 710071)

(*Institute of Math. and Applied Math., Xianyang Normal University, Xianyang* 712000)

(*E-mail: ahzwy@163.com*)

LI Junmin

(*School of Science, Xidian University, Xi'an* 710071)

(*E-mail: jmli@mail.xidian.edu.cn*)

XIA Zhile

(*School of Science, Xidian University, Xi'an* 710071)

(*School of Mathematics and Information Engineering, Taizhou University, Taizhou* 317000)

Abstract This paper presents robust exponential stability and stabilization conditions for uncertain linear distributed parameter time-delay systems. Based on the Lyapunov-Krasovskii method extended to a Hilbert space, robust exponential stability criteria are derived and linear matrix inequality (LMI) technique. Sufficient delay-dependent conditions for robust exponential stability are obtained in the form of linear operator inequalities (LOI), where the decision variables are operators in the Hilbert space. Being applied to a parabolic equation, these conditions are reduced to standard Linear Matrix Inequalities (LMI). Finally, an example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed criteria.

Key words distributed parameter systems; uncertainty; exponential stability; Lyapunov functional

MR(2000) Subject Classification 93E15

Chinese Library Classification O175.13; TP273.02