第 36 卷 第 1 期 应用数学学报 Vol. 36 No. 1
2013 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2013

仅有 y- 分量耦合的非恒同 Lorenz 系统的渐近同步 *

杨联华 双 鹂 汪小明 吴红星

(上饶师范学院数计系，上饶 334001)

(E-mail: ylh000666@163.com)

摘 要 本文考虑外部耦合格式为 $n \times n$ 阶实对称不可约，行和为零且对角线以外的元素非正的矩阵，内部耦合格式为仅有 y- 分量参与耦合的非恒同 Lorenz 格点系统的渐近同步. 在系统解一致有界耗散的基础上采用常数变易法证明了当耦合强度足够大时仅有 y- 分量参与耦合的非恒同 Lorenz 格点系统的解出现渐近同步，即系统解的任意两个对应分量的差在时间趋向于无穷时是一个小的有界量.

关键词 y- 分量耦合；非恒同 Lorenz 系统；耦合强度；渐近同步

MR(2000) 主题分类 34C23

中图分类 O175.12

1 引言

经典的同步性的研究是耦合恒同的混沌系统 [1]. 但是在实际中很难建立两个完全相同的物理系统，因此恒同系统的同步性的应用就受到了很大的限制. 近几十年来非恒同耦合格点系统的混沌同步引起了许多学者的关注，并且已在实际中得到了广泛的应用. 耦合格式在耦合系统的同步中起决定性作用，不同耦合格式将获得不同类型的同步 (见 [2–4])，选择合适的耦合格式可以得到我们所需的同步. 一般来讲，如果每个耦合子系统的所有分量都参与耦合，则当耦合强度足够大时耦合系统产生同步 [5−8]. 但如果系统是部分耦合 (即并非所有分量都参与耦合)，当耦合强度足够大时，照样可以达到同步 [9]，就相当于以小的代价获得相同的结果，这样就更有实际意义. 在 [9] 中， Lin 等研究了在 Neumann 和周期边界条件下，仅耦合 x- 分量的恒同 Lorenz 方程，证明了只要耦合强度足够大，系统就产生同步． Afraimovich V S 在 [10] 中给出了解的同步性的严格

本文 2009 年 11 月 25 日收到. 2012 年 4 月 16 日收到修改稿.
* 江西省青年自然科学基金 (2009GQS0023)，江西省教育厅青年科学基金 (GJJ11234) 资助项目.

定义，简单的说，就是随着时间趋向于无穷，解的任意两个对应分量的差趋与零，称之为同步．当然，只有系统恒同的时候，同步才可能发生．如果系统不恒同，那么在上述意义下的同步就不可能发生．在 [7] 中 Afraimovich V S 和 Hale J K 等研究了耦合非恒同 (参数 $\sigma_i, \gamma_i, b_i > 0$ 分别不要求相等，但仍要靠的足够近) 的耗散格点系统解的渐近同步性，给出了解的渐近同步性定义，即系统解的任意两个对应分量差在时间趋向于无穷时是一个小的有界量．本文采用 [7] 中系统解的渐近同步性定义，讨论了只有 y- 分量参加耦合且外部耦合格式矩阵为 $A \in \mathcal{A}_1$($n \times n$ 阶实对称不可约，行和为零且对角线以外的元素非正的矩阵的全体记为 $\mathcal{A}_1$) 的非恒同 Lorenz 格点系统解的渐近同步性.

我们考虑由 n 个非恒同耦合格点组成的 Lorenz 格点系统，在系统的每一个结点处，方程形式如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sigma_i(y_i - x_i), \\ \dot{y}_i = \gamma_i x_i - y_i - x_i z_i - d(Ay)_i, \\ \dot{z}_i = -b_i z_i + x_i y_i. \end{cases} \tag{1}$$

这里参数 $\sigma_i, \gamma_i,\ b_i > 0$, 其中 $i = 1, \cdots, n$. 耦合系数 $d > 0$, 外部耦合格式矩阵 $A \in \mathcal{A}_1$, x_i, y_i, z_i 为空间 R^n 中的向量 x, y, z 所对应的分量.

本文主要利用常数变易公式证明系统 (1) 解的渐近同步性．最后给出了本文的结论.

2 仅有 y- 分量耦合的 Lorenz 系统解的渐近同步

实验结果表明，在一个耗散耦合格点系统中，耦合系数大于某一临界值时系统产生混沌同步．类似 [13] 我们可证明外部耦合格式矩阵 $A \in \mathcal{A}_1$ 时的耦合 Lorenz 系统 (1) 是有界耗散的，也就是存在一个有界集 $\mathcal{D} \in R^{3n}$, 任何以 $t = t_0$ 为初始时刻且通过点 $(x_0, y_0, z_0) \in R^{3n}$ 的解 $u(t, t_0, x_0, y_0, z_0)$, 总存在时刻 $t_1 \equiv t_1(d, t_0, x_0, y_0, z_0, \mathcal{D})$ 使得当 $t > t_1$ 时有 $u(t, t_0, x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}$.

此时，系统 (1) 中的外部耦合矩阵 $A \in \mathcal{A}_1$, 即：

(i) A 是不可约的实对称矩阵,

(ii) $a_{ij} \le 0\ (i \ne j),\ a_{ii} = -\sum\limits_{j=1, i\ne j}^{n} a_{ij}$.

由 (i) 保证零特征值的特征子空间的维数是一维的，特征值为实数．而 (ii) 保证 A 的特征值为非负． A 有一个零特征值，对应的特征向量为 $e = (1, \cdots, 1)$. 设 $\lambda_i \in \sigma(A)$, $\sigma(A)$ 表示 A 的特征值的集合，则 A 的 n 个特征值可以排列如下：

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_{n-1}.$$

令

$$|\sigma_i - \sigma_j| \le \varepsilon, \quad |\gamma_i - \gamma_j| \le \varepsilon, \quad |b_i - b_j| \le \varepsilon, \qquad i, j = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

运用 Lyapunov 稳定性理论类似 [13] 可证，耦合系统 (1) 中的参数 $\sigma_i, \gamma_i, b_i > 0$ 满足 (2) 式的条件且 $\varepsilon^2 < \sigma_0,\ b_0 > 1$ 时是一致有界耗散的，其中 $\sigma_0 = \min\{\sigma_i\},\ b_0 = \min\{b_i\}$.

接下来我们将在此前提条件下讨论耦合系统 (1) 解的渐近同步性，即要证明参数 $\sigma_i, \gamma_i, b_i > 0$ 和耦合系数 $d > 0$ 满足一定条件时，系统 (1) 的解是渐近同步的.

令 $\sigma = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i$, $\gamma = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i$, $b = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$, 并记

$$\delta_{i_1} = (\sigma_i - \sigma)(y_i - x_i), \qquad \delta_{i_2} = (\gamma_i - \gamma)x_i, \qquad \delta_{i_3} = -(b_i - b)z_i,$$

那么系统 (1) 可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sigma(y_i - x_i) + \delta_{i_1}, \\ \dot{y}_i = \gamma x_i - y_i - x_i z_i - d(Ay)_i + \delta_{i_2}, \\ \dot{z}_i = -bz_i + x_i y_i + \delta_{i_3}, \end{cases}$$

将上式改写为向量形式有

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) + \delta_1, \\ \dot{y} = \gamma x - y - f(x,z) - d(Ay) + \delta_2, \\ \dot{z} = -bz + g(x,y) + \delta_3, \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\delta_m = \big(\delta_{im} \mid i = 1, \cdots, n\big) = (\delta_{1m}, \cdots, \delta_{nm})^T, \qquad m = 1,2,3,$$
$$(f(x,z))_i = x_i z_i \qquad g(x,y)_i = x_i y_i.$$

由于 $\lambda_i \in \sigma(A)$ 有 $\lambda_i \geq 0$, 对应零特征值的特征向量为 $e = (1, \cdots, 1)^T \in R^n$. 故可令

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times n}, \qquad E = \begin{pmatrix} C \\ e^T \end{pmatrix}_{n\times n},$$

则 $E^{-1} = \big[C^T(CC^T)^{-1} \big| \frac{e}{n}\big]$ 满足

$$EAE^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\Delta \in R^{(n-1)\times(n-1)}$ 的特征值与 A 的非零特征值相同. 记 $\lambda_1 = \min\big\{\lambda_i \mid \lambda_i \in \sigma(\Delta), \lambda_i > 0\big\}$.

用矩阵 E 左乘 (3) 两边，得到

$$\begin{cases} E\dot{x} = \sigma E(y - x) + E\delta_1, \\ E\dot{y} = \gamma Ex - Ey - Ef(x,z) - dEAE^{-1}(Ey) + E\delta_2, \\ E\dot{z} = -bEz + Eg(x,y) + E\delta_3, \end{cases} \tag{4}$$

引入新的变量记号

$$Ex = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^* \end{pmatrix}, \qquad Ey = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix}, \qquad Ez = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^* \end{pmatrix},$$

则

$$\xi^* = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \eta^* = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad \zeta^* = \sum_{i=1}^{n} z_i,$$

ξ, η, ζ 是空间 R^{n-1} 的向量且满足

$$\xi_l = x_l - x_{l+1}, \quad \eta_l = y_l - y_{l+1}, \quad \zeta_l = z_l - z_{l+1}, \qquad l = 1, \cdots, n-1.$$

相对应地有

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \sigma(\eta - \xi) + \widetilde{\delta_1}, \\ \dot{\eta} = \gamma\xi - \eta - Cf(x,z) - d(\Delta\eta) + \widetilde{\delta_2}, \\ \dot{\zeta} = -b\zeta + Cg(x,y) + \widetilde{\delta_3}, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\widetilde{\delta_m} = (\delta_{1m} - \delta_{2m}, \cdots, \delta_{(n-1)m} - \delta_{nm})^T$ $(m = 1, 2, 3)$. 令

$$D_1(x) = \mathrm{diag}\,(x_1, \cdots, x_{n-1}), \qquad D_2(y) = \mathrm{diag}\,(y_2, \cdots, y_n), \qquad D_3(z) = \mathrm{diag}\,(z_2, \cdots, z_n),$$

则

$$\begin{aligned} (Cf(x,z))_l =& (f(x,z))_l - (f(x,z))_{l+1} = x_l z_l - x_{l+1} z_{l+1} = x_l(z_l - z_{l+1}) + z_{l+1}(x_l - x_{l+1}) \\ =& x_l \zeta_l + z_{l+1}\xi_l = (D_1(x)\zeta)_l + (D_3(z)\xi)_l, \\ (Cg(x,y))_l =& (g(x,y))_l - (g(x,y))_{l+1} = x_l y_l - x_{l+1} y_{l+1} = x_l(y_l - y_{l+1}) + y_{l+1}(x_l - x_{l+1}) \\ =& x_l \eta_l + y_{l+1}\xi_l = (D_1(x)\eta)_l + (D_2(y)\xi)_l. \end{aligned}$$

从而系统 (5) 可写成

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \sigma(\eta - \xi) + \widetilde{\delta_1}, \\ \dot{\eta} = \gamma\xi - \eta - D_1(x)\zeta - D_3(z)\xi - d(\Delta\eta) + \widetilde{\delta_2}, \\ \dot{\zeta} = -b\zeta + D_1(x)\eta + D_2(y)\xi + \widetilde{\delta_3}, \end{cases} \tag{6}$$

如果我们能证明当 $t \to +\infty$ 时， $\sup \parallel \xi(t) \parallel, \sup \parallel \eta(t) \parallel, \sup \parallel \zeta(t) \parallel$ 是小的有界量，即当 $t \to +\infty$ 时 $\sup |\xi_l(t)|$, $\sup |\eta_l(t)|$, $\sup |\zeta_l(t)|$ 是小的有界量，则由三角不等式可知系统 (1) 解的任意两个对应分量差在时间趋向于无穷时是一个小的有界量，因此系统渐近同步．下面我们利用常数变易法来证明系统 (1) 解的渐近同步性.

定理 2.1 设 (2) 式的条件成立且 $\varepsilon^2 < \sigma_0$, $b_0 > 1$, $(x(t), y(t), z(t))$ 是耦合系统 (1) 的解，记

$$\begin{aligned} & x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T, \qquad y(t) = (y_1(t), \cdots, y_n(t))^T, \qquad z(t) = (z_1(t), \cdots, z_n(t))^T, \\ & (x)_i = x_i, \qquad (y)_i = y_i, \qquad (z)_i = z_i, \end{aligned}$$

那么存在正常数 M^* 和 d^*, 使得当 $d > d^*$ 时有

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} \sup\{|x_i(t) - x_j(t)|\} \le M^*\varepsilon,\\
&\lim_{t\to+\infty} \sup\{|y_i(t) - y_j(t)|\} \le M^*\varepsilon,\\
&\lim_{t\to+\infty} \sup\{|z_i(t) - z_j(t)|\} \le M^*\varepsilon,
\end{aligned}$$

其中 $i, j = 1, \cdots, n$.

证 当耦合系数 d 非负时，系统 (1) 是一致有界耗散的，因此存在一个正常数 N, 使得下式成立

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} \sup \|x(t)\| \le N, \quad \lim_{t\to+\infty} \sup \|y(t)\| \le N, \quad \lim_{t\to+\infty} \sup \|z(t)\| \le N,\\
&\lim_{t\to+\infty} \sup \|\xi(t)\| \le N, \quad \lim_{t\to+\infty} \sup \|\eta(t)\| \le N, \quad \lim_{t\to+\infty} \sup \|\zeta(t)\| \le N,\\
&\lim_{t\to+\infty} \sup \|D_1(x)\| \le N, \quad \lim_{t\to+\infty} \sup \|D_2(y)\| \le N, \quad \lim_{t\to+\infty} \sup \|D_3(z)\| \le N,\\
&\lim_{t\to+\infty} \sup \|\widetilde{\delta_m}(t)\| \le N\varepsilon, \qquad m = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{7}$$

设存在正常数 M 使得

$$\max\{N, \gamma\} \le \frac{M}{3}. \tag{8}$$

定义

$$L_{k+1} = L_k + q - 2, \qquad q > 3, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

可用归纳法证明随着时间趋向于无穷时，有下式成立

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} \sup \|\xi(t)\| \le \frac{1}{M^{L_k}} + M\varepsilon,\\
&\lim_{t\to+\infty} \sup \|\eta(t)\| \le \frac{1}{M^{L_k}} + \varepsilon,\\
&\lim_{t\to+\infty} \sup \|\zeta(t)\| \le \frac{1}{M^{L_k - 1}} + M^2\varepsilon
\end{aligned} \tag{9}$$

1) 当 $k = 0$ 时定义 $L_0 = q - 2$ 对系统 (6) 的第二个方程，应用常数变易公式得

$$\eta(t) = e^{t(-I-d\Delta)}\eta(0) + \int_0^t e^{(t-s)(-I-d\Delta)}(\gamma\xi(s) - D_1(x(s))\zeta(s) - D_3(z(s))\xi(s) + \widetilde{\delta_2})\,\mathrm{d}s.$$

由于 $\lambda_1 = \min\left\{\lambda_i \mid \lambda_i \in \sigma(\Delta),\ \lambda_i > 0\right\}$, 故存在正常数 Γ 使得

$$\|e^{t(-I-d\Delta)}\| \le \Gamma e^{t(-1-d\lambda_1)}.$$

故

$$\begin{aligned}
\|\eta(t)\| \le & \Gamma\|\eta(0)\|e^{t(-1-d\lambda_1)} + \Gamma\big(\gamma\|\xi(t)\| + \|D_1\|\cdot\|\zeta(t)\|\\
& + \|D_3\|\cdot\|\xi(t)\| + \|\widetilde{\delta_2}\|\big)\int_0^t e^{(t-s)(-1-d\lambda_1)}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \Gamma\|\eta(0)\|e^{t(-1-d\lambda_1)}+\frac{\Gamma}{1+d\lambda_1}\big(\gamma\|\xi(t)\|+\|D_1\|\cdot\|\zeta(t)\|\\
&\quad+\|D_3\|\cdot\|\xi(t)\|+\|\widetilde{\delta_2}\|\big)(1-e^{-t(1+d\lambda_1)}).
\end{aligned}
$$

结合 (7), (8) 式得

$$
\|\eta(t)\|\le\Gamma\|\eta(0)\|e^{t(-1-d\lambda_1)}+\frac{\Gamma M}{3(1+d\lambda_1)}(2\|\xi(t)\|+\|\zeta(t)\|+\varepsilon)(1-e^{-t(1+d\lambda_1)}).
$$

由 $-1-d\lambda_1<0$ 得

$$
\lim_{t\to+\infty}\sup\ e^{-t(1+d\lambda_1)}=0,
$$

故

$$
\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|\le\frac{\Gamma M}{3(1+d\lambda_1)}\lim_{t\to+\infty}\sup(2\|\xi(t)\|+\|\zeta(t)\|+\varepsilon).
$$

选择 $d^*>0$ 使得

$$
1+d^*\lambda_1\ge\Gamma M^q,\qquad q>3,
$$

则 $d>d^*$ 时有

$$
\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|\le\frac{1}{3M^{q-1}}\lim_{t\to+\infty}\sup(2\|\xi(t)\|+\|\zeta(t)\|+\varepsilon). \tag{10}
$$

由于

$$
\lim_{t\to+\infty}\sup\|\xi(t)\|\le N\le M,\qquad \lim_{t\to+\infty}\sup\|\zeta(t)\|\le N\le M,
$$

从而有

$$
\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|\le\frac{1}{3M^{q-1}}(2M+M+\varepsilon)<\frac{1}{M^{q-2}}+\varepsilon.
$$

对系统 (6) 的第一个方程，应用常数变易公式得

$$
\xi(t)=e^{-\sigma t}\xi(0)+\int_0^t e^{-\sigma(t-s)}(\sigma\eta(s)+\widetilde{\delta_1})\,\mathrm{d}s,
$$

从而有

$$
\|\xi(t)\|\le e^{-\sigma t}\|\xi(0)\|+\Big(\|\eta(t)\|+\frac{1}{\sigma}\|\widetilde{\delta_1}\|\Big)(1-e^{-\sigma t}).
$$

由

$$
\lim_{t\to+\infty}\sup\ e^{-\sigma t}=0,
$$

得

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\sup\|\xi(t)\|&\le\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|+\frac{1}{\sigma}\lim_{t\to+\infty}\sup\|\widetilde{\delta_1}\|\\
&\le\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|+\lim_{t\to+\infty}\sup\|\widetilde{\delta_1}\|.
\end{aligned}\tag{11}
$$

由于

$$
\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|\le\frac{1}{M^{q-2}}+\varepsilon,\qquad \lim_{t\to+\infty}\sup\|\widetilde{\delta_1}\|\le\frac{M\varepsilon}{3},
$$

从而有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\|\xi(t)\|\le\Big(\frac{1}{M^{q-2}}+\varepsilon\Big)+\frac{M\varepsilon}{3}\le\frac{1}{M^{q-2}}+M\varepsilon.$$

对系统 (6) 的第三个方程，类似第一个方程，我们有

$$\zeta(t)=e^{-bt}\zeta(0)+\int_0^t e^{-b(t-s)}(D_1(x(s))\eta(s)+D_2(y(s))\xi(s)+\widetilde{\delta_3})\,\mathrm{d}s,$$

从而有

$$\|\zeta(t)\|\le e^{-bt}\|\zeta(0)\|+\frac{1}{b}\big(\|D_1(x(t))\|\cdot\|\eta(t)\|+\|D_2(y(t))\|\cdot\|\xi(t)\|+\|\widetilde{\delta_3}\|\big)(1-e^{-bt}).$$

由

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\ e^{-bt}=0,\qquad b>1,$$

得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\|\zeta(t)\|\le\lim_{t\to+\infty}\sup\big(\|D_1(x(t))\|\cdot\|\eta(t)\|+\|D_2(y(t))\|\cdot\|\xi(t)\|+\|\widetilde{\delta_3}\|\big).$$

由于 (7), (8), 从而有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\|\zeta(t)\|\le\frac{M}{3}\Big(\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|+\lim_{t\to+\infty}\sup\|\xi(t)\|+\varepsilon\Big).\tag{12}$$

由

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|\le\frac{1}{M^{q-2}}+\varepsilon,\qquad\lim_{t\to+\infty}\sup\|\xi(t)\|\le\frac{1}{M^{q-2}}+M\varepsilon,$$

得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\|\zeta(t)\|\le\frac{M}{3}\Big(\frac{2}{M^{q-2}}+M\varepsilon+\varepsilon\Big)\le\frac{M}{3}\Big(\frac{3}{M^{q-2}}+3M\varepsilon\Big)\le\frac{1}{M^{q-3}}+M^2\varepsilon,$$

所以当 $k=0$ 时有 (9) 式成立，即

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}\sup\|\xi(t)\|\le\frac{1}{M^{q-2}}+M\varepsilon\le\frac{1}{M^{L_0}}+M\varepsilon,\\&\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|\le\frac{1}{M^{L_0}}+\varepsilon,\\&\lim_{t\to+\infty}\sup\|\zeta(t)\|\le\frac{1}{M^{L_0-1}}+M^2\varepsilon.\end{aligned}$$

2) 假设 $k=n$ 时 (9) 式成立，则 $k=n+1$ 时，由 (10) 式得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\sup\|\eta(t)\|&\le\frac{1}{3M^{q-1}}\lim_{t\to+\infty}\sup\big(2\|\xi(t)\|+\|\zeta(t)\|+\varepsilon\big)\\&\le\frac{1}{3M^{q-1}}\Big(\frac{2}{M^{L_k}}+2M\varepsilon+\frac{1}{M^{L_k-1}}+M^2\varepsilon+\varepsilon\Big)\\&\le\frac{1}{3M^{q-1}}\Big(\frac{3}{M^{L_k-1}}+3M^2\varepsilon\Big)\le\frac{1}{M^{L_k+q-2}}+\frac{\varepsilon}{M^{q-3}}\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{M^{L_k+q-2}} + \varepsilon \le \frac{1}{M^{L_k+1}} + \varepsilon.$$

由 (11) 式得

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \|\xi(t)\| \le \lim_{t\to+\infty} \sup \|\eta(t)\| + \frac{M\varepsilon}{3} \le \frac{1}{M^{L_k+1}} + \varepsilon + \frac{M\varepsilon}{3} \le \frac{1}{M^{L_k+1}} + M\varepsilon.$$

由 (12) 式得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \sup \|\zeta(t)\| \le & \frac{M}{3}\Big(\lim_{t\to+\infty} sup\|\eta(t)\| + \lim_{t\to+\infty} \sup \|\xi(t)\| + \varepsilon\Big)\\ \le & \frac{M}{3}\Big(\frac{1}{M^{L_{k+1}}} + \varepsilon + \frac{1}{M^{L_{k+1}}} + M\varepsilon + \varepsilon\Big)\\ \le & \frac{M}{3}\Big(\frac{2}{M^{L_{k+1}}} + 3M\varepsilon\Big) \le \frac{1}{M^{L_{k+1}-1}} + M^2\varepsilon.\end{aligned}$$

综上所述，对任意的 $k = 0, 1, 2, \cdots$, 有 (9) 式成立.

很明显当 $k \to \infty$ 时有 $L_k \to \infty$, 因此有

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \|\xi(t)\| \le M\varepsilon, \qquad \lim_{t\to+\infty} \sup \|\eta(t)\| \le \varepsilon, \qquad \lim_{t\to+\infty} \sup \|\zeta(t)\| \le M^2\varepsilon,$$

即

$$\lim_{t\to+\infty} \sup |\xi_l(t)| \le M\varepsilon, \qquad \lim_{t\to+\infty} \sup |\eta_l(t)| \le \varepsilon, \qquad \lim_{t\to+\infty} \sup |\zeta_l(t)| \le M^2\varepsilon.$$

故对任意的 $i, j = 1, \cdots, n$, 存在正常数 M^*, d^*, 使得当 $d > d^*$ 时由三角不等式可得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty} \sup\ |x_i(t) - x_j(t)| \le \sum_{l=i}^{j-1} \lim_{t\to+\infty} \sup\ |\xi_l(t)| \le M^*\varepsilon,\\ &\lim_{t\to+\infty} \sup\ |y_i(t) - y_j(t)| \le \sum_{l=i}^{j-1} \lim_{t\to+\infty} \sup\ |\eta_l(t)| \le M^*\varepsilon,\\ &\lim_{t\to+\infty} \sup\ |z_i(t) - z_j(t)| \le \sum_{l=i}^{j-1} \lim_{t\to+\infty} \sup\ |\zeta_l(t)| \le M^*\varepsilon.\end{aligned}$$

从而耦合系统 (1) 渐近同步．定理 2.1 得证.

3　结论

近来，耦合系统的同步现象在许多领域中成为人们关注的热点，尤其是恒同耦合系统的同步现象．但是在实际中很难建立两个完全相同的系统，本文考虑的是非恒同 Lorenz 格点系统 (1), 此系统仅有 y- 分量参加耦合且外部耦合格式矩阵为行和为零，非对角线元素非正的不可约实对称矩阵．实验结果表明，在一个耗散系统中，耦合强度足够大时系统产生混沌同步．本文从理论上证明了在一定的参数条件下，系统 (1) 解的任意两个对应分量的差在时间趋向于无穷时是一个小的有界量，即系统 (1) 渐近同步．耦

合系统的同步是相当复杂的，耦合格式的优化无论是理论上还是应用上都是很有意义的，有待今后进一步研究.

致谢 苏州大学秦文新教授和应用数学学报的审稿人认真细致的审阅了全稿，提了许多宝贵的意见，对本人的提高起了很大的作用. 在此谨向他们表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Heagy J F, Carroll T L, Pecora L M. Synchronous Chaos in Coupled Oscillator Systems. *J. Phys. Rev. E.*, 1994, 50: 1874–1885

[2] Lü J H, Yu X H, Chen G R. Chaos Synchronization of General Complex Dynamical Networks. *J. Physica A*, 2004, 334: 281–302

[3] Lü J H, Yu X H, Chen G R, Cheng D Z. Characterizing the Synchronizability of Small-word Dynamical Networks. *J. IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2004, 51(4): 787–796

[4] Lü J H, Chen G R. A Time-varying Complex Dynamical Network Model and Its Controlled Synchronization Criteria. *J. IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2005, 50(6): 841–846

[5] Chiu C H, Lin W W, Peng C C. Asymptotic Synchronization in Lattices of Coupled Nonidentical Lorenz Equations. *J. Int. J. Bifurcation and Chaos.*, 2000, 10(12): 2717–2728

[6] Afraimovich V S, Lin W W. Synchronization in Lattices of Coupled Oscillators with Neumann/Periodic Boundary Conditions. *J. Dyn. Stab. Syst.*, 1998, 13: 237–264

[7] Afraimovich V S, Chow S N, Hale J K. Synchronization in Lattices of Coupled Oscillators. *J. Physica D*, 1997, 103: 442–451

[8] Chiu C H, Lin W W, Wang C S. Synchronization in Lattices of Coupled Oscillators with Various Boundary Conditions. *J. Nonlinear Analysis*, 2001, 46: 213–229

[9] Lin W W, Peng C C. Chaotic Synchronization in Lattices of Partial-state Coupled Lorenz Equations. *J. Physica D*, 2002, 166: 29–42

[10] Afraimovich V S, Verichev N N, Rabinovich M I. Stochastic Synchronization of Oscillations in Dissipative Systems. *J. Izv. Vys. Uch. Zav., Radiofizika*, 1986, 29: 1050–1060

[11] 杨联华. 部分耦合非恒同单摆系统的渐近同步. 苏州大学学报 (理科版), 2007, 23(4): 15–18
(Yang Lianhua. Asymptotic Synchronization of Partially Coupled Nonidentical Pendula Systems. *J. Journal of Suzhou University* (Natural Science Edition), 2007, 23(4): 15–18)

[12] 杨联华, 双鹂. 交叉耦合的 Lorenz 系统的渐近同步. 南昌大学学报 (理科版), 2007, 31(6): 529–532
(Yang Lianhua, Shuang Li. Asymptotic Synchronization of the Coupled Nonidentical Lorenz Equations with Cross Coupling. *J. Journal of Nanchang University* (Natural Science), 2007, 31(6): 529–532)

[13] 杨联华, 双鹂, 汪小明. 仅有 x- 分量耦合的非恒同 Lorenz 系统的渐近同步. 应用数学学报, 2009, 32(1): 121–131
(Yang Lianhua, Shuang Li, Wang Xiaoming. Asymptotic Synchronization of the Coupled Nonidentical Lorenz Equations with the x-component Coupling. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2009,

32(1): 121–131)

[14] Wu Jianshe, Jiao Licheng, Chen Guanrong. Cluster Synchronization in a Network of Non-identical Dynamic Systems. *J. Chin. Phys. B*, 2011, 20(6): 060503

[15] Wu Jianshe, Jiao Licheng. Global Synchronization and State Tuning in Asymmetric Complex Dynamical Networks. *J. IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II: Express Briefs*, 2008, 55(9): 932-936

Asymptotic Synchronization of the Coupled Nonidentical Lorenz Equations with the y-component Coupling

YANG Lianhua SHUANG Li WANG Xiaoming WU Hongxing

(*Department of Mathematics, Shangrao Normal University, Shangrao* 334001)

(*E-mail: ylh000666@163.com*)

Abstract The asymptotic synchronization in a lattice of y_i-coupled nonidentical Lorenz equations is considered, the external coupling matrix is an $n \times n$ irreducible symmetric real matrix having zero row sums and nonpositive off-diagonal elements. Under the uniform bounded dissipativeness of the coupled Lorenz systems, applying the variation of constant formula to prove that asymptotic synchronization occurs for the coupled Lorenz systems with y-component coupling provided the coupling coefficient is sufficiently large. That is, the difference between any two components of a solution is bounded by the quantity $O(\varepsilon)$ as $t \to \infty$, where ε is the maximal deviation of parameters of nonidentical Lorenz Equations.

Key words y-component coupling; nonidentical Lorenz equations; coupling coefficient; asymptotic synchronization

MR(2000) Subject Classification 34C23

Chinese Library Classification O175.12