第 36 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 36 No. 2
2013 年 3 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　March, 2013

一类非线性斯图谟-刘维尔方程两点边值问题解的存在性

陈 健　　沈 娟

(安庆师范学院数学与计算科学学院，安庆 246133)

(E-mail: chenjian20061001@126.com)

王其申 †

(安庆师范学院物理与电气工程学院，安庆 246011)

(E-mail: wangqsh@aqtc.edu.cn)

摘　要　本文讨论了如下非线性斯图谟 - 刘维尔方程的第一边值问题

$$\begin{cases} p(x)u''(x)+f(u(x))=0, \qquad 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性，其中 $p(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是 x 的分段常数.

关键词　非线性斯图谟 - 刘维尔方程；边值问题；分段函数；解的存在性

MR(2000) 主题分类　39A05; 34B10

中图分类　O175.14

1　引言

自从 Erbe L H 和 Wang H 在 [1] 中首先利用 Krasnoselskii 不动点定理研究了方程 $u''+a(t)f(u)=0$ 的正解的存在性以来，对于非线性斯图谟 - 刘维尔边值问题的正解的存在性研究一直为世人所关注. 国内郭大钧教授和他的团队也在 [2] 中利用拓扑度理论，临界点理论，上下解方法深入研究了以下边值问题：

本文 2010 年 11 月 1 日收到.

† 通讯作者.

$$\begin{cases} (p(x)u'(x))' = f(u(x)), & x \in [a,b], \\ R_1(u) = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \\ R_2(u) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

当 $p(x) \in C^1[a,b]$，$p(x) > 0$ 时解的存在性，获得了一批重要的成果．此后，更有一系列的相关文章发表 [3−7]．

纵观以上文献，所有成果都是在 $p(x)$ 存在一阶连续导数的条件下获得的，不少作者干脆取 $p(x) = \pm 1$. 然而对实际问题中的非线性斯图谟 - 刘维尔方程边值问题来说，常会遇到 $p(x)$ 具有某种间断性的情况，比如阶梯杆的平衡或纵振动问题就是如此．因此有必要放宽对 $p(x)$ 的要求，基于这一认识，本文着重讨论 $p(x)$ 是分段常数的情况，即讨论如下非线性斯图谟 - 刘维尔方程的边值问题解的存在性：

$$\begin{cases} p(x)u''(x) + f(u(x)) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

这里 $f \in C(R_+, R_+)$ 且有

$$f(0) = 0, \qquad p(x) = \begin{cases} p_1, & 0 \le x \le c, \\ p_2, & c \le x \le 1. \end{cases}$$

c 是介于 0 和 1 之间的常数．不失一般性，可以假设 $p_1 \ge p_2 > 0$.

2 预备知识

2.1 相关的格林函数

参照文献 [2], 通过计算可得齐次边值问题 (2) 的 Green 函数为：当 $0 \le s \le c$ 时，

$$G_1(x,s) = \begin{cases} \dfrac{x}{p_1}\Big(1 - \dfrac{p_2 s}{p_2 c + p_1 - p_1 c}\Big) \triangleq G_{11}(x,s), & 0 \le x \le s \le c, \\ \dfrac{s}{p_1}\Big(1 - \dfrac{p_2 x}{p_2 c + p_1 - p_1 c}\Big) \triangleq G_{12}(x,s), & 0 \le s \le x \le c, \\ \dfrac{s(1-x)}{p_2 c + p_1 - p_1 c} \triangleq G_{13}(x,s), & 0 \le s \le c \le x < 1. \end{cases} \tag{3}$$

而当 $c \le s \le 1$ 时，

$$G_2(x,s) = \begin{cases} \dfrac{x(1-s)}{p_2 c + p_1 - p_1 c} \triangleq G_{21}(x,s), & 0 \le x \le c \le s, \\ \dfrac{(p_1 x + p_2 c - p_1 c)(1-s)}{p_2(p_2 c + p_1 - p_1 c)} \triangleq G_{22}(x,s), & c \le x \le s \le 1, \\ \dfrac{(p_1 s + p_2 c - p_1 c)(1-x)}{p_2(p_2 c + p_1 - p_1 c)} \triangleq G_{23}(x,s), & c \le s \le x \le c. \end{cases} \tag{3'}$$

引理 1 设 $G_{ij}(x,s)$ $(i = 1,2;\ j = 1,2,3)$ 为齐次问题 (2) 的形如式 (3) 和 (3′) 的 Green 函数，则

(i) $G_{ij}(x,s)>0,\ \forall\,(x,s)\in(0,1)\times(0,1)$;

(ii)

$$
\begin{aligned}
&G'_{12x}(s^+,s)-G'_{11x}(s^-,s)=-1/p_1, &&G'_{23x}(s^+,s)-G'_{22x}(s^-,s)=-1/p_2;\\
&G_{11}(x,c)=G_{21}(x,c), &&G'_{11x}(x,c)=G'_{21x}(x,c);\\
&G_{13}(x,c)=G_{23}(x,c), &&G'_{13x}(x,c)=G'_{23x}(x,c);
\end{aligned}
$$

(iii) $G_{ij}(x,s)\le G_i(s,s),\ \forall\,(x,s)\in(0,1)\times(0,1)$;

(iv) $G_{ij}(x,s)\ge\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_1+(p_2-p_1)c}G_i(s,s)$, 其中 $0<\varepsilon<\min(c,1-c),\ \ c-\varepsilon<x<1-c+\varepsilon$.

证 由 $p_1\ge p_2>0,\ \ p_2c+p_1-p_1c>0$, 命题 (i) 显然成立. 直接代入检验可知 (ii) 成立. 下面证明 (iii) 和 (iv).

(iii) $G_{11}(x,s)=\frac{x}{p_1}\big(1-\frac{p_2s}{p_2c+p_1-p_1c}\big)\le\frac{s}{p_1}\big(1-\frac{p_2s}{p_2c+p_1-p_1c}\big)=G_1(s,s)$.

同理可证 $G_{12}(x,s)\le G_1(s,s),\ \ G_{22}(x,s)\le G_2(s,s),\ \ G_{23}(x,s)\le G_2(s,s)$. 又

$$
\begin{aligned}
&\frac{G_{13}(x,s)}{G_1(s,s)}=\frac{p_1(1-x)}{p_2(c-s)+p_1(1-c)}\le 1, &&0\le s\le c\le x\le 1,\\
&\frac{G_{21}(x,s)}{G_2(s,s)}=\frac{p_2x}{p_2c+p_1(s-c)}\le 1, &&0\le x\le c\le s\le 1.
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\frac{G_{11}(x,s)}{G_1(s,s)}=&\frac{x}{s}\ge\frac{c-\varepsilon}{c}\ge\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1-p_1c}, \qquad c-\varepsilon\le x\le s\le c,\\
\frac{G_{12}(x,s)}{G_1(s,s)}=&\frac{p_1+(p_2-p_1)c-p_2x}{p_1+(p_2-p_1)c-p_2s}\ge\frac{p_2-p_2(1-c+\varepsilon)}{p_1+(p_2-p_1)c}\\
\ge&\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_1+(p_2-p_1)c}, \qquad 0\le s\le x\le c,\\
\frac{G_{13}(x,s)}{G_1(s,s)}=&\frac{p_1(1-x)}{p_2(c-s)+p_1(1-c)}\ge\frac{p_1(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1(1-c)}\\
\ge&\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1(1-c)}, \qquad 0\le s\le c\le x\le 1-c+\varepsilon,\\
\frac{G_{21}(x,s)}{G_2(s,s)}=&\frac{p_2x}{p_2+p_1(s-c)}\ge\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1(1-c)}, \qquad c-\varepsilon\le x\le c\le s\le 1,\\
\frac{G_{22}(x,s)}{G_2(s,s)}=&\frac{p_1x+(p_2-p_1)c}{p_1s+(p_2-p_1)c}\ge\frac{p_2c+p_1(x-c)}{p_1+(p_2-p_1)c}\\
\ge&\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1(1-c)}, \qquad c\le x\le s\le 1,\\
\frac{G_{23}(x,s)}{G_2(s,s)}=&\frac{1-x}{1-s}\ge\frac{c-\varepsilon}{1-c}\ge\frac{p_1(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1(1-c)}\\
\ge&\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1(1-c)}, \qquad c\le s\le x\le 1-c+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

所以 (iv) 得证.

2.2 非线性 S-L 边值问题解的积分公式

下面考察带有非线性项的边值问题:

$$\begin{cases} p(x)u''(x)+f(u(x))=0, & 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $f\in C(R_+,R_+)$ 且 $f(0)=0$,

$$p(x)=\begin{cases} p_1, & 0\le x\le c, \\ p_2, & c\le x\le 1, \end{cases}$$

c 是介于 0 和 1 之间的常数.

引理 2 若 $u(x)$ 由

$$u(x)=\begin{cases} \int_0^x G_{12}f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_x^c G_{11}f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_c^1 G_{21}f(u(s))\,\mathrm{d}s, & 0\le x\le c, \\ \int_0^c G_{13}f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_c^x G_{23}f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_x^1 G_{22}f(u(s))\,\mathrm{d}s, & c\le x\le 1 \end{cases} \tag{5}$$

来确定，则 $u(x)$ 满足式 (4) 且 $u(x)\in C^2[0,1]$, 即 $u(x)$ 是边值问题 (4) 的正解.

证　对 $u(x)$ 微分一次，注意到 $G(x,s)$ 的连续性和引理 1 之 (ii), 得

$$u'(x)=\begin{cases} G_{12}f(u)|_{s=x}+\int_0^x G'_{12x}f(u)\,\mathrm{d}s-G_{11}f(u)|_{s=x}+\int_x^c G'_{11x}f(u)\,\mathrm{d}s \\ +\int_c^1 G'_{21x}f(u)\,\mathrm{d}s, \qquad 0\le x\le c, \\ \int_0^c G'_{13x}f(u)\,\mathrm{d}s+G_{23}f(u)|_{s=x}+\int_c^x G'_{23x}f(u)\,\mathrm{d}s-G_{22}f(u)|_{s=x} \\ +\int_x^1 G'_{22x}f(u)\,\mathrm{d}s, \qquad c\le x\le 1, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_0^x G'_{12x}f(u)\,\mathrm{d}s+\int_x^c G'_{11x}f(u)\,\mathrm{d}s+\int_c^1 G'_{21x}f(u)\,\mathrm{d}s, & 0\le x\le c, \\ \int_0^c G'_{13x}f(u)\,\mathrm{d}s+\int_c^x G'_{23x}f(u)\,\mathrm{d}s+\int_x^1 G'_{22x}f(u)\,\mathrm{d}s, & c\le x\le 1. \end{cases}$$

对上式再微分一次，注意到 $G(x,s)$ 所满足的齐次方程和引理 1 之 (ii), 得：

$$u''(x)=\begin{cases} G'_{12x}(x,s)f(u(s))|_0^x+G'_{11x}(x,s)f(u(s))|_x^c+G'_{21x}(x,s)f(u(s))|_c^1, & 0\le x\le c, \\ G'_{13x}(x,s)f(u(s))|_0^c+G'_{23x}(x,s)f(u(s))|_c^x+G'_{22x}(x,s)f(u(s))|_x^1, & c\le x\le 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -f(u(x))/p_1, & 0\le x\le c, \\ -f(u(x))/p_2, & c\le x\le 1. \end{cases}$$

易见由式 (5) 所表出的 $u(x)$ 是边值问题 (4) 的解. 证毕.

2.3 范数形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理

引理 3 设 Ω_1 和 Ω_2 是 E 中有界开集，$\theta\subset\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $A:P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$ 全连续. 如果满足条件

(H_1) $\|Au\|\le\|u\|,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_1$; $\|Au\|\ge\|u\|,\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2$.

(H$_2$) $|Au\| \le \|u\|,\ \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_2;\ \|Au\|\ge\|u\|,\ \forall\, x\in P\cap\partial\Omega_1$.

那么， A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中必具有不动点.

引理 3 的证明参见 [2] 之定理 3.2.4.

3 主要结果

定理 1 假设

(i) $f\in C(R_+,R_+),\ f(0)=0$;

(ii) $0\le\overline{\lim}\frac{f(u)}{u}(u\to+0)<\frac{8p_2(p_2c+p_1-p_1c)^2}{(p_2c^2+p_1-p_1c^2)^2}$;

(iii) $\frac{9(p_2c+p_1-p_1c)^2}{p_2\sqrt{3c^3(1-c)^3}}<\underline{\lim}\frac{f(u)}{u}(u\to+\infty)\le+\infty$.

那么问题 (4) 必有解 $u(x)\in C^2[0,1]$ 满足 $u(x)>0,\ \forall\, 0<x<1$.

证 根据引理 2, 问题 (4) 属于 $C^2[0,1]$ 的解等价于

$$u(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x G_{12}f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_x^c G_{11}f(u(s))\,\mathrm{d}s\\ \displaystyle+\int_c^1 G_{21}f(u(s))\,\mathrm{d}s,\qquad 0\le x\le c,\\ \displaystyle\int_0^c G_{13}f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_c^x G_{23}f(u(s))\,\mathrm{d}s\\ \displaystyle+\int_x^1 G_{22}f(u(s))\,\mathrm{d}s,\qquad c\le x\le 1\end{cases}=Au(x) \tag{6}$$

属于 $C[0,1]$ 的解，并且 Green 函数的表达式如式 (3) 和 (3′) 所示. 令 $P^*=\{u(x)|u(x)\in C[0,1],\ u(x)\ge0\}$.

对于 $0<\varepsilon<\min(c,1-c)$, 又令

$$P_\varepsilon^*=\Big\{u(x)|u(x)\in P^*,\ \min u(x)\ge\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_1+(p_2-p_1)c}\|u\|(c-\varepsilon\le x\le 1-c+\varepsilon)\Big\}, \tag{7}$$

易知 P^* 与 P_ε^* 都是空间 $E=C[0,1]$ 中的锥，并且 $P_\varepsilon^*\subset P^*$, 显然 $A:P^*\to P^*$ 全连续. 设 $u(x)\in P^*$. 由引理 2 和引理 1 的 (iii) 知

$$\begin{aligned}\|Au\|&\le\begin{cases}\displaystyle\int_0^x G_1(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_x^c G_1(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\\ \displaystyle+\int_c^1 G_2(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s,\qquad 0\le x\le c,\\ \displaystyle\int_0^c G_1(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_c^x G_2(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\\ \displaystyle+\int_x^1 G_2(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s,\qquad c\le x\le 1\end{cases}\\&=\int_0^c G_1(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_c^1 G_2(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{8}$$

另一方面由引理 1 的 (iv) 知，当 $c-\varepsilon<x<1-c+\varepsilon$ 时有

$$\min Au(x)\geq\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1-p_1c}\Big(\int_0^c G_1(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s+\int_c^1 G_2(s,s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\Big).\tag{9}$$

由 (8), (9) 知，当 $c-\varepsilon<x<1-c+\varepsilon$ 时有 $\min Au(x)\geq\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_2c+p_1-p_1c}\|Au\|$, 即 $Au(x)\in P_\varepsilon^*$, 由此可知 $A(P^*)\subset P_\varepsilon^*$, 从而更有

$$A(P_\varepsilon^*)\subset P_\varepsilon^*,\qquad\forall\,0<\varepsilon<\min(c,1-c).\tag{10}$$

由定理 1 的条件 (ii) 及 $f(0)=0$ 知，存在 $r>0$, 使得 $0\leq x\leq r$ 时，恒有

$$0\leq f(u)<\frac{8p_2(p_2c+p_1-p_1c)^2}{(p_2c^2+p_1-p_1c^2)^2}u,$$

从而当 $u(x)\in P^*$, $\|u\|=r$ 时，恒有

$$\begin{aligned}Au(x)\leq&\frac{8p_2(p_2c+p_1-p_1c)^2}{(p_2c^2+p_1-p_1c^2)^2}\\&\cdot\begin{cases}\displaystyle\int_0^x G_{12}(x,s)u(s)\,\mathrm{d}s+\int_x^c G_{11}(x,s)u(s)\,\mathrm{d}s+\int_c^1 G_{21}(x,s)u(s)\,\mathrm{d}s,\\ \displaystyle\int_0^c G_{13}(x,s)u(s)\,\mathrm{d}s+\int_c^x G_{23}(x,s)u(s)\,\mathrm{d}s+\int_x^1 G_{22}(x,s)u(s)\,\mathrm{d}s\end{cases}\\ \leq&\frac{8p_2(p_2c+p_1-p_1c)^2}{(p_2c^2+p_1-p_1c^2)^2}\|u\|\\&\cdot\begin{cases}\displaystyle\int_0^x G_{12}(x,s)\,\mathrm{d}s+\int_x^c G_{11}(x,s)\,\mathrm{d}s+\int_c^1 G_{21}(x,s)\,\mathrm{d}s,\\ \displaystyle\int_0^c G_{13}(x,s)\,\mathrm{d}s+\int_c^x G_{23}(x,s)\,\mathrm{d}s+\int_x^1 G_{22}(x,s)\,\mathrm{d}s\end{cases}\\ \leq&\frac{8p_2(p_2c+p_1-p_1c)^2}{(p_2c^2+p_1-p_1c^2)^2}\|u\|\\&\cdot\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2p_1}+\dfrac{p_1c^2-p_2c^2-p_1}{2p_1(p_1c-p_2c-p_1)}x, & 0\leq x\leq c,\\ -\dfrac{x^2}{2p_2}+\dfrac{p_1c^2-p_2c^2-p_1}{2p_2(p_1c-p_2c-p_1)}x-\dfrac{p_1c^2-p_2c^2+p_2c-p_1c}{2p_2(p_1c-p_2c-p_1)}, & c\leq x\leq 1\end{cases}\\ \leq&\|u\|,\qquad\forall\,0<x<1,\end{aligned}$$

故有

$$\|Au\|\leq\|u\|,\qquad\forall\,u(x)\in P^*,\qquad\|u\|=r.\tag{11}$$

另一方面，由条件 (iii) 知存在 $\eta>0$ 使得当 $u\geq\eta$ 时，恒有 $f(u)\geq\frac{9(p_2c+p_1-p_1c)^2}{p_2\sqrt{3c^3(1-c)^3}}u$. 令

$$R_\varepsilon=\max\Big\{2r,\eta\Big[\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_1+(p_2-p_1)c}\Big]^{-1}\Big\}.\tag{12}$$

于是 $R_\varepsilon>r$, 当 $u(x)\in P_\varepsilon^*$ 且 $\|u(x)\|=R_\varepsilon$ 和 $c-\varepsilon<x<1-c+\varepsilon$ 时，有

$$\min Au(x)\geq\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_1+(p_2-p_1)c}\|Au\|=\frac{p_2(c-\varepsilon)}{p_1+(p_2-p_1)c}R_\varepsilon\geq\eta,$$

所以有

$$\begin{aligned}Au(c) =& \int_0^c \frac{s(1-c)}{p_2c+p_1-p_1c} f(u(s)\,\mathrm{d}s + \int_c^1 \frac{c(1-s)}{p_2c+p_1-p_1c} f(u(s)\,ds \\ \geq& \frac{9(p_2c+p_1-p_1c)^2}{p_2\sqrt{3c^3(1-c)^3}} \cdot \frac{p_2(c-\varepsilon)\,\|u\|}{p_1+(p_2-p_1)c} \\ &\cdot \Big[\int_0^c \frac{s(1-c)}{p_2c+p_1-p_1c}\,\mathrm{d}s + \int_c^1 \frac{c(1-s)}{p_2c+p_1-p_1c}\,\mathrm{d}s\Big] \\ \geq& \frac{9(p_2c+p_1-p_1c)^2}{p_2\sqrt{3c^3(1-c)^3}} \cdot \frac{p_2(c-\varepsilon)\,\|u\|}{p_1+(p_2-p_1)c} \cdot \frac{c(1-c)-(c-\varepsilon)^2}{2(p_2c+p_1-p_1c)} \\ =& \frac{9(c-\varepsilon)[c(1-c)-(c-\varepsilon)^2]}{2\sqrt{3c^3(1-c)^3}}\|u\|, \qquad u(x)\in P_\varepsilon^*, \quad \|u\| = R_\varepsilon. \end{aligned} \tag{13}$$

令 $h(\varepsilon) = c(1-c)(c-\varepsilon)-(c-\varepsilon)^3$. 易知，当

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{3c-\sqrt{3c(1-c)}}{3}$$

时 $h(\varepsilon)$ 达到区间 $[0,c]$ 上的最大值 $h(\varepsilon_0) = \frac{2\sqrt{3c^3(1-c)^3}}{9}$. 于是在 (13) 式中，取 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 得

$$\|Au\| \geq \|u\|, \qquad u(x)\in P_\varepsilon^*, \qquad \|u\| = R_\varepsilon, \tag{14}$$

由式 (11), (13) 和 (14) 知，对于 $\Omega_1 = \{u|\|u\|<r\}$, $\Omega_2 = \{u|\|u\|<R_{\varepsilon_0}\}$ 以及 P_{ε_0} 应用引理 1, 即知 A 在 $P_{\varepsilon_0}^* \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 中具有不动点 $u(x)$, 于是 $u(x)\in P_{\varepsilon_0}^*$, $r \leq \|u\| \leq R_{\varepsilon_0}$.

由 $G_{ij}(x,s)$ 的性质，显然有 $u(x)>0$, $\forall\, 0<x<1$, 故定理得证.

4 小结

以上结果表明, 当 $p(x)$ 为分段常数时, 非线性 S-L 边值问题的正解的确是存在的. 还可以讨论 $p(x)$ 具有某种其他的间断性时非线性 S-L 边值问题的可解性. 顺便指出, 本文可以看作 [2] 中定理 3.2.8 的推广. 当取 $p_1 = p_2 = 1$ 和 $c = 1/2$ 时，本文定理 1 回到 [2] 的定理 3.2.8.

参 考 文 献

[1] Erbe L H, Wang H . On the Existence of Positive Solutions of Ordinary Differential Equations. *Proc. Killer. Math. Soc.*, 1994, 120(8): 743–743

[2] 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法. 山东：山东科学技术出版社， 2005 (Dajun Guo, Jingxian Sun, Zhaoli Liu. Functional Methods for Nonlinear Ordinary Difference Equation. Shandong: Shandong Science-Technology Publishing House, 2005)

[3] Regan D O. Theory of Singular Boundary Value Problems. Minnesota: Scientific World, 1994

[4] 姚庆六. Sturm-Liouville 边值问题的正解存在性. 数学物理学报, 2002, A(2): 145–149

(Yao Qingliu. Existence of Positive Solutions for Sturm-Liouville Boundary Value Problems. *Acta Mathematic and Physics*, 2002, A(2): 145–149)

[5] 李高尚，刘锡平，贾梅等. 一类微分方程组的非齐次 Sturm-Liouville 边值问题解的存在性. *应用泛函分析学报*, 2009, 11(1): 79–85

(Li Gaoshang, Liu Xiping, Jia Mei, et.al. The Existence of Solutions for Non-homogenous Sturm-Liouville Boundary Value Problems of a Class of Difference Equations. *Acta Analysis Functional Applicata*, 2009, 11(1): 79–85)

[6] 孙经先，张国伟. 奇异非线性 Sturm-Liouville 问题的正解. *数学学报*, 2005, 48(6): 1095–1104

(Sun Jingxian, Zhang Guowei. Positive Solutions of Singular Sturm-Liouville Problems. *Acta Mathematica Sinica*, 2005, 48(6): 1095–1104)

[7] 侯丽芳，李宇华. 二阶 Sturm-Liouville 边值问题解的存在性. *山西大学学报 (自然科学版)*, 2009, 32(2): 168–171

(Hou Lifang, Li Yuhua. Existence of Solutions on Second-order Sturm-Liouville Boundary Value Problems. *Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)*, 2009, 32(2): 168–171

Existence of Solutions for a Kind of Two-point Boundary Value Problems of Nonlinear Sturm-Liouville Equation

CHEN JIAN SHEN JUAN

(*School of Mathematical Science, Anqing Teachers College, Anqing* 246133)

(*E-mail: chenjian20061001@126.com*)

WANG QISHEN

(*school of Physic, Anqing Teachers College, Anqing* 246011)

(*E-mail: wangqsh@aqtc.edu.cn*)

Abstract In this paper, we considered the existence of solutions to the first boundary value of the nonlinear Sturm-Liouville equation:

$$\begin{cases} p(x)u''(x) + f(u(x)) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

where $p(x)$ is a segmentation constant in interval $[0, 1]$.

Key words nonlinear sturm-Liouville equation; boundary value problems; segmentation functions

MR(2000) Subject Classification 39A05; 34B10

Chinese Library Classification O175.14