第 36 卷 第 2 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 36 No. 2
2013 年 3 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA March, 2013

一类分布鲁棒优化问题的线性化方法及其应用*

纪 颖

(哈尔滨工业大学基础与交叉科研院，哈尔滨 150080)

(E-mail: jiying_1981@126.com)

李一军 芦鹏宇 周 勇

(哈尔滨工业大学管理学院，哈尔滨 150080)

摘 要 本文考虑一类特殊的极大极小化问题，即分布鲁棒优化问题. 这类优化方法是不同于随机规划和鲁棒优化的一类方法，在这类问题中，不确定变量的概率分布往往是不能精确得知的，只知道概率分布所满足的一些条件，比如一次信息、二次信息以及支撑集合信息等. 如此分布鲁棒优化问题便是寻求在所有满足条件的分布中找寻满足最坏可能分布的解. 一般情况下，这类优化问题的求解都是 NP 难的. 本文考虑一类简单的情形，即考虑不确定变量的概率分布只满足一次信息、支撑集合信息以及仿射一次信息，通过应用半无限规划问题的对偶性，本文指出这类分布鲁棒优化问题等价于线性规划问题，从而原分布鲁棒优化问题可以应用现成的求解线性规划的方法进行求解. 为验证方法的有效性，本文将新方法应用于解决不确定条件下含有交易费用的利率管理问题.

关键词 极大极小化问题；分布鲁棒优化；半无限规划；不确定条件；利率管理

MR(2000) 主题分类 90C15; 90C22

中图分类 TP309

1 引言

传统的优化模型往往假设输入的数据是精确的且等于某些不真实的值. 这种方法没有考虑到模型的质量及可行性受到的数据不确定性的影响. 而鲁棒优化能够克服传

本文 2012 年 4 月 11 日收到. 2012 年 8 月 20 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金重点 (No. 71031003), 国家自然科学基金 (No. 71201040, 71071041, 11201099) 以及落户黑龙江省博士后启动基金 (No. LBH-Q11118) 资助项目.

统模型的这一缺点，在数据不确定的条件下能够在高概率下得到切合实际的鲁棒解.

一般情况下，鲁棒优化问题并不需要精确的知道其中不确定变量所满足的分布，而随机规划问题正好相反. 在随机规划问题中，不确定变量能够表示成服从确定分布的随机变量；而在鲁棒优化问题中，决策者通常不知道不确定变量所服从的确定分布，但知道此分布包含在某个支撑集合中. 而为了将鲁棒优化与随机规划结合起来，很多学者提出了分布鲁棒优化问题，在这类问题中决策者通过在一组可能的分布中找寻满足最坏可能分布的最优解 [1−5]. 在知道不确定变量概率分布一次信息、二次信息和支撑集合信息的情况下，这类优化问题的精确求解往往是 NP 难的 [1,3], 因此很多学者研究给出其近似问题，讨论其近似算法 [1,3,4,6]. 但在某些情况下，这种近似往往与实际情况相去甚远 [6]. 因此有必要给出这类分布鲁棒优化问题的精确解. 可以看到在实际应用中，通过历史数据模拟很多时候能够容易得到不确定变量的一次信息、支撑集合信息和仿射一次信息 (见概率分布所满足的第三个条件). 本文即考虑一类特殊的分布鲁棒优化问题，假设不确定变量所服从分布满足一次信息、支撑集合信息以及仿射一次信息，在此情况下我们指出原分布鲁棒优化问题等价于线性规划问题，因此可以用多项式时间算法进行求解.

本文考虑如下的分布鲁棒优化问题：

$$\min_{y\in Y}\sup_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\max_{1\le l\le L} a_l y^T z + b_l\Big], \tag{1}$$

其中 $y\in Y\subseteq R^n$ 为决策变量，而 z 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathbb{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量. 本文假设联合分布 $\mathbb{P}$ 并不能精确得知，而是存在于某一族分布集合 $\mathbb{F}$ 中，在此称集合 $\mathbb{F}$ 为模糊集. 需要指出，一般情况下问题 (1) 的求解是 NP 难的，因此目前关于此类问题的求解均为近似求解. 本文为精确求解问题 (1), 假设分布 $\mathbb{P}$ 满足一次信息、支撑集合信息和仿射一次信息等三个条件，在此三个假设条件下，利用半无限规划对偶理论本文指出问题 (1) 等价于线性规划问题. 为验证本文方法的有效性，将新方法应用于解决不确定条件下的利率管理问题.

2　线性等价问题

本文假设分布 $\mathbb{P}$ 满足如下的三个条件成立：

(i)　z 有一支撑凸集 $W\subseteq R^n$, 即 $\mathrm{Prob}_{\mathbb{P}}\,(z\in W)=1$;

(ii)　z 的均值为 0, 即 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[z]=0$;

(iii)　对于 $m=1,\cdots,M$, 假设关于随机变量 z 的函数 $\max\limits_{1\le\imath\le I}\big\{(g_i{}^m)^Tz+h_i{}^m\big\}$ 的期望值总是小于某个常数 ρ_m, 即 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\max\limits_{1\le\imath\le I}\{(g_i{}^m)^Tz+h_i{}^m\}\big]\le\rho_m$.

本文之所以考虑如上的三个假设条件是因为：条件 (i) 对不确定变量所在的支撑集合进行假设，而条件 (ii) 是对不确定变量的一次信息进行假设，这两个条件已经被广泛应用于分布鲁棒优化问题的分析中 [1,3]; 条件 (iii) 对不确定变量所在的仿射一次信息作出假设，本文之所以这样做不仅是因为在很多实际应用中人们容易得知不确定变量所

在分布的仿射一次信息，比如在水利发电问题、库存管理问题和图像处理问题中 [7−9]，还因为在如上的三个假设条件下分布鲁棒优化问题 (1) 能够转化为线性规划问题，从而可以用多项式时间算法求解.

假设支撑集 $W \subseteq R^n$ 可以表示为如下的锥集合：

$$W = \{z : Hz + Du \succ_K h \text{ for some } \ u \in R^n\},$$

其中 K 为一正则锥，即为具有非空内点的闭的极点凸锥， $H, D \in R^{MI\times n}$.

定理 1 在假设条件 (i)–(iii) 成立的条件下，问题 (1) 等价于如下的线性规划问题 (P):

$$\begin{aligned}
\inf_{\mu,\mu_0,s,\lambda_l,\nu_i} \quad & \mu_0 + \rho^T s, \\
\text{s.t.} \quad & \mu_0 - b_l + \lambda_l^T h + \sum_{i=1}^{I}\sum_{m=1}^{M} h_i^m \nu_{l,i}^m \geq 0, \\
& \lambda_l \succ_{K^*} 0, \\
& \nu_{l,i}^m \geq 0, \qquad \forall\, m, i, \\
& H^T\lambda_l - \sum_{i=1}^{I}\sum_{m=1}^{M} g_i^m \nu_{l,i}^m = \mu - a_l y, \\
& D^T\lambda_l = 0, \\
& \sum_{i=1}^{I} \nu_{l,i}^m = s_m, \qquad \forall\, m, l, \\
& y \in Y,
\end{aligned}$$

这里 K^* 为正则锥 K 的对偶锥.

证 如果令函数 f 为随机变量 z 的概率密度函数，则问题 (1) 中内部的极大化问题可以等价的表示为如下的半无限规划问题：

$$\begin{aligned}
\sup_{f(\cdot)} \ & \int_W \max_{1\leq l\leq L}\{a_l y^T z + b_l\} f(z)\,\mathrm{d}z, \\
\text{s.t.} \ & \int_W f(z)\,\mathrm{d}z = 1, \\
& \int_W z f(z)\, dz = 0, \qquad\qquad (2) \\
& \int_W \max_{1\leq \imath\leq I}\{({g_i}^m)^T z + {h_i}^m\} f(z)\,\mathrm{d}z \leq \rho_m, \qquad \forall\, m, \\
& f(z) \geq 0, \qquad \forall\, z \in W.
\end{aligned}$$

令 μ_0, μ 和 s 分别为问题 (2) 中前三个约束的对偶变量，则由 [10] 中关于半无限规划问题的强对偶定理知问题 (2) 等价于：

$$\inf_{\mu,\mu_0,s,} \ \mu_0 + \rho^T s,$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t. } & \mu_0 + \mu^T z + \sum_{m=1}^{M} \left(s^m \max_{1\leq \imath \leq I} \left\{ ({g_i}^m)^T z + {h_i}^m \right\} \right) \\
& \geq \max_{1\leq l\leq L} \{a_l y^T z + b_l\}, \qquad \forall z \in W, \\
& s \geq 0.
\end{aligned}$$

此问题等价于

$$\begin{aligned}
\inf_{\mu,\mu_0,s} \ & \mu_0 + \rho^T s \\
\text{s.t.} \quad & \mu_0 - b_l + \min_{z\in W} (\mu - a_l y)^T z + \sum_{m=1}^{M} \left(s^m \max_{1\leq \imath\leq I} \left\{ ({g_i}^m)^T z + {h_i}^m \right\} \right) \geq 0, \qquad \forall l, \\
& s \geq 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

由 W 的定义可知，上述问题中关于变量 z 的最小化问题等价于

$$\begin{aligned}
\min_{z,\mu,r} \ & (\mu - a_l y)^T z + \sum_{m=1}^{M} s^m r^m, \\
\text{s.t. } & Hz + D\mu \succ_k h, \\
& r^m \geq (g_i^m)^T z + h_i^m, \qquad \forall m, i.
\end{aligned} \tag{4}$$

令 λ_l 和 $\nu_{l,j}^m$ 分别为上述问题两个约束的对偶变量，则由锥规划问题的强对偶定理 (见 [11]) 知上述问题等价于

$$\begin{aligned}
\max_{\lambda_l,\nu_l} \quad & \lambda_l^T h + \sum_{i=1}^{I} \sum_{m=1}^{M} h_i^m \nu_{l,i}^m, \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_l \succ_{K^*} 0, \\
& \nu_{l,i}^m \geq 0, \qquad \forall m, i, \\
& H^T \lambda_l - \sum_{i=1}^{I} \sum_{m=1}^{M} g_i^m \nu_{l,i}^m = \mu - a_l y, \\
& D^T \lambda_l = 0, \\
& \sum_{i=1}^{I} \nu_{l,i}^m = s_m, \qquad \forall m,
\end{aligned} \tag{5}$$

这里 K^* 为正则锥 K 的对偶锥. 因此结合问题 (2)–(5), 则原问题便等价于线性规划问题 (P).

3　不确定条件下的利率管理问题

3.1　分布鲁棒利率最优化模型

本节我们将讨论利用上述的线性化方法分析不确定条件下的利率管理优化问题. 假定证券市场上存在 n 种风险资产，令向量 $z=(z_1,\cdots,z_n)^T\in R^n$ 为 n 种风险资产的不确定收益，而 $y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in R^n$ 表示投资在这 n 种风险资产上的投资量. 如此第 i 种风险资产上的投资回报为 y_iz_i , 从而可得出投资者在这 n 种风险资产上的总回报为 y^Tz.

实际投资活动中, 投资者必须每一次买卖支付交易费用, 交易费用一般包括固定交易费用和可变交易费用. 根据经济学理论，交易费用随着交易量的增加而增加，且边际交易费用递减，这一点和实际证券市场交易数据是吻合的，但是，如果在第 i 种风险资产上投资量超过一个阈值时，那么这种资产的流动性变差，导致边际交易费用递增. 因此，为了使交易费用函数符合市场实际交易情况，所构造的交易费用函数必须满足在阈值左边，交易费用函数为凹函数，而在右边，交易费用函数必须为凸函数. 为方便起见，在下面的讨论中我们假定在每一种资产上的投资量都不超过阈值，且假设在第 i 种风险资产上的交易费用函数 $C_i(y_i)=t_iy_i+\tau_i$ 为一个线性函数，这里 τ_i 表示第 i 种资产的固定交易费用，而 t_i 表示第 i 种资产可变交易费用的系数. 如此，在考虑交易费用的情况下，投资在第 i 种风险资产上的净收益为 $NR_i=z_iy_i-C_i(y_i)$, 从而投资组合的净收益为 $NR_p=\sum\limits_{i=1}^{n}NR_i=z^Ty-C(y)$, 其中 $C(y)=\sum\limits_{i}^{n}C_i(y_i)$. 由于交易费用函数为线性的，因此净收益函数也是一个线性函数.

利率最优化通常是根据投资者的偏好在风险和收益间做出权衡，从而得出最优投资组合，而分布鲁棒利率选择通常是考虑最坏分布情况下在风险和收益间做出权衡，从而得到投资组合的最优策略. 因此，最大化投资组合净收益的分布鲁棒优化模型可以表示为

$$\max_{y\in Y}\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[z^Ty-C(y)], \tag{6}$$

其中 $y\in Y\subseteq R^n$ 为决策变量，而 z 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathbb{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量， $\mathbb{P}$ 满足第 1 部分中的假设条件 (i)–(ii), 而集合 Y 为资产组合所受的约束。当随机变量的概率分布为已知精确值时，很多学者考虑了上面的模型 [12], 此时上面的模型是一个随机规划问题，可以选择应用随机规划方法求解上面的模型. 从上面的讨论知，为完成此鲁棒利率选择模型，只需要得到约束集合 Y. 这里假定资产组合 y 满足,

$$Ay\le b,\quad A\in R^{m\times n},\quad b\in R^m,\quad y\in R^n. \tag{7}$$

最典型的一种约束是资本预算约束，即资产组合 y 满足

$$e^Ty=\omega_0,\qquad e=(1,\cdots,1)^T\in R^n, \tag{8}$$

而为确保多样性和满足规定，我们假定资产组合满足一定的界约束，即

$$\underline{y}\le y\le\overline{y}, \tag{9}$$

其中 $\underline{y}$ 和 $\overline{y}$ 分别是资产组合的下界和上界. 如此，约束集合 Y 便可由 (7) 和 (9) 给出，

即

$$Y=\{y: Ay\le b,\ \underline{y}\le y\le \overline{y},\ A\in R^{m\times n},\ b\in R^m,\ y\in R^n\}. \tag{10}$$

问题 (6) 中的目标函数可表示为

$$z^Ty-C(y)=(z-t)^Ty-\tau, \tag{11}$$

其中 $t=(t_1,\cdots,t_n)^T,\ \tau=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i$, 由于 t 为常向量, 因此我们可以令 $z:=(z-t)$, 并且假设 $z-t$ 作为资产的新的不确定收益受第一部分所定义的集合 W 的约束. 如此问题 (6) 便等价于如下的分布鲁棒优化问题

$$\min_{y\in Y}\sup_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-z^Ty+\tau], \tag{12}$$

其中 $\mathbb{P}$ 满足第一部分的三个假设条件 (i)–(iii), 而 $z\in W$. 显然由定理 1 可知, (12) 等价于如下的线性规划问题:

$$\begin{aligned}
\inf_{\mu,\mu_0,s,\lambda_l,\nu_i}\quad & \mu_0+\rho^Ts,\\
\text{s.t.}\quad & \mu_0-\tau+\lambda^Th+\sum_{i=1}^{I}\sum_{m=1}^{M}h_i^m\nu_i^m\ge 0,\\
& \lambda\succ_{K^*}0,\qquad \nu_i^m\ge 0,\qquad \forall\, m,i,\\
& H^T\lambda-\sum_{i=1}^{I}\sum_{m=1}^{M}g_i^m\nu_i^m=\mu+y,\\
& D^T\lambda=0,\\
& \sum_{i=1}^{I}\nu_i^m=Ay\le b,\qquad \underline{y}\le y\le\overline{y},\\
& A\in R^{m\times n},\qquad b\in R^m,\qquad y\in R^n.
\end{aligned}$$

3.2 数值试验

本部分将讨论上面方法的有效性, 给出一些数值试验的结果和分析, 这些问题的维数从 500 到 10000, 即从中等规模问题到大规模问题. 这样做得原因在于由于现实利率管理问题中的问题规模都比较大, 因此我们在此要考虑大规模问题的数值试验. 我们在 DELL E8400, 内存 3.25 GB 的 PC 机上, 在 Matlab 7.0 环境下编程计算, 设定最大误差限 $\varepsilon=10^{-8}$, 利用单纯型方法求解得到的线性规划问题.

在本部分数值试验中, 假定资产组合 y 满足资本预算约束, $e^Ty=1$, 资产下界 $\underline{y}_i=0$, 上界 $\overline{y}_i=1,\ i=1,\cdots,n$. 为了保证问题 (12) 中可行集的有效性, 假定参数 g_i^m, h, ρ 中元素都是随机产生的, 且服从区间 [−1,1] 上的均匀分布, 而矩阵 H,D 中元素也都是随机产生的, 且服从区间 [1,2] 上的均匀分布, 交易费用 τ 也是随机产生的, 且服从区间 [0,1] 上的均匀分布. 上述选择参数的方法已经被很多学者所用 [3,12].

另外，为验证本文方法的有效性，我们将新方法与随机规划方法相比较．此时利率管理最优化问题 (12) 便成为

$$\min_{y\in Y}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-z^Ty+\tau],$$

其中 $z:\omega\in\Omega\to R$ 为连续随机变量．此处我们利用经典的 Halton 方法去近似问题的数学期望 [13], 假设 ω 在样本空间 $\Omega:=[0,1]$ 上均匀分布，而样本数量选取为 40000.

表 2.1 和 2.2 给出的是分别利用分布鲁棒优化方法和随机规划方法，对不同维数问题的数值结果．每一个问题测试 10 次，用 Min iter, Max iter, Avg iter, Avg Val 表示最小、最大、平均迭代次数和平均最优函数值．用 Time 表示 CPU 时间 (秒). 由表 2.1 和 2.2 可以发现，应用我们所给出的方法，其最小迭代步均为一步，而最大迭代步均在 35 步以内；而应用随机规划方法，其大部分最小迭代步为一步，而最大迭代步高达 447 步，每一问题的平均运行时间均比我们所给出的方法要长，而大部分问题的平均最优值比我们所给出的方法要小．这些结果表明相比较随机规划方法我们给出的方法能更加有效的解决中大规模利率管理优化问题.

表 2.1

Dimension	Min Iter	Avg Iter	Max Iter	Avg Val	Time
500	1	3	20	40.257	11.325
1000	1	3.6	22	90.331	11.732
1500	1	2.7	17	127.897	10.573
2000	1	1.9	8	184.021	9.832
3000	1	3.8	13	227.589	10.8
4000	1	7	25	308.998	12.11
5000	1	8.3	24	422.5	13
6000	1	6	19	525.336	15.4
7000	1	10	35	616.856	25.175
8000	1	4.5	6.6	709.325	29.496
10000	1	11	23	957.901	45.908

表 2.2

Dimension	Min Iter	Avg Iter	Max Iter	Avg Val	Time
500	1	4.6	38	32.158	21.221
1000	17	25.4	58	74.9	54.381
1500	1	32.4	63	108.286	74.02
2000	1	57.9	85	155.228	119.256
3000	1	77	112	220.045	272.054
4000	54	89.5	124	335.204	173.965
5000	87	100.6	143	399.587	210.368
6000	1	75.5	154	485.275	209.221
7000	1	87.2	167	604.851	312.876
8000	159	268.7	395	721.695	589.008
10000	365	397.8	447	900.874	1965.297

4 结论

本文主要讨论了一类特殊的分布鲁棒优化问题，在不确定变量满足某种假设条件的前提下，我们证明了这类问题等价于线性规划问题，而线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，如此便为原问题的求解和应用提供了便利. 为证明所给出方法的有效性，我们讨论了这类方法在利率管理中得应用，通过分析建模，不确定条件下的利率最优化问题可描述成分布鲁棒优化问题，从而等价于线性规划问题. 通过对中大规模问题的数值试验结果分析，表明本文方法的有效性.

参 考 文 献

[1] Goh J, Sim M. Distributionally Robust Optimization and Its Tractable Approximations. *Operations Research*, 2010, 58(4): 902–917

[2] Ben Tal A, Nemirovski A. Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data. *Mathematical Programming*, 2000, 88(3): 411–424

[3] Delage E, Ye Y Y. Distributionally Robust Optimization Under Moment Uncertainty with Application Data-driven Problems. *Operations Research*, Doi 10.1287/xxxx.0000.0000, 2011

[4] Ben Tal A, Nemirovski A. Robust Convex Optimizaion. *Mathematics of Operations Research*, 1998, 23(4): 769–805

[5] Ben Tal A, Nemirovski A. Robust Solutions to Uncertain Linear Programs. *Operations Research Letters*, 1999, 25(1): 1–13

[6] Chen X, Sim M, Sun P. A Robust Optimization Perspective on Stochastic Programming. *Operations Research*, 2007, 55(6): 1058–1071

[7] Zymler S, Kuhn D, Rustem B. Distributionally Robust Joint Chance Constraints with Second-order Moment Information. *Mathematical Programming*, Doi 10.1007/s10107-011-0494-7, 2011

[8] Wagner M R. Fully Distribution-free Profit Maximization: the Inventory Management Case. *Mathematics of Operations Research*, 2010, 35(4): 728–741

[9] Meng D Y, Zhao Q, Xu Z B. Improve Robustness of Sparse PCA by L_1-norm Maximaization. *Pattern Recognition*, 2012, 45: 487–497

[10] Isii K. On the Sharpness of Chebyshev-type Inequalities. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 1963, 12: 185–197

[11] Ben Tal A, Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization. http://www.isye.gatech.edu/faculty-staff/profile.php?entry=an63, 2012

[12] 薛洪刚. 投资组合 VaR 的计算与考虑交易费用的投资组合优化选择. 西安交通大学博士学位论文, 2004

(Xue Honggang. The computation for VaR and portfolio optimization including cost functions. The Doctoral Dissertation of Xi'an Jiaotong University, 2004)

[13] Lemieusx C. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sample. New York: Springer-Verlag, 2009

A Linearizing Method for Distributionally Robust Optimization Problem and Applications

JI Ying

(*Academy of Fundamental and Interdisplinary Sciences, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150080)

(*E-mail: jiying_1981@126.com*)

LI Yijun LU Pengyu ZHOU Yong

(*School of Management, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150080)

Abstract This paper considers a special Max-Min problem that is the distributionally robust optimization problem which is different from stochastic programming and robust optimization. In this kind of problem, the uncertain variable's probability distribution often can't be accurately acquired but with some known information about its probability, such as the first-order, second-order and support set information. Then the distributionally robust optimization problem is to find the worst-case solution under all possible distributions. In general to find the solution for this problem is NP hard. In this paper, we suppose a special case where the decision-maker gets across some parts of information about the uncertain distributions, for example the first-order, support set and affine first-order information. By applying the duality of the semi-infinite programming, the distributionally robust optimization problem can be equivalently reformulated as a linear optimization problem, and then it can be solved by some well-established linear programming approach. To verify the effectiveness of the method, we discuss an applications to portfolio management problem with transaction costs.

Key words maxmin problem; distributionally robust optimization; semi-infinite programming; uncertain conditions; portfolio management

MR(2000) Subject Classification 90C15; 90C22

Chinese Library Classification TP309