第 36 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 36 No. 2
2013 年 3 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　March, 2013

新型广义加权保费原理下风险保费的信度估计 *

温利民

(江西师范大学数信学院，南昌 330022)

(江西财经大学博士后流动站，南昌 330013)

(E-mail: wlmjxnu@163.com)

梅国平

(江西师范大学数信学院，南昌 330022)

(江西财经大学信息管理学院，南昌 330013)

摘　要　本文研究了新型广义加权保费原理下风险保费的信度估计问题. 利用了损失函数法，将新型广义加权保费原理定义为新型广义加权损失函数下风险的最优估计. 在该损失函数下，把估计限定在经验估计的线性组合，根据均方误差最小原则得到风险保费的信度估计，并证明了信度估计的相合性. 最后，在 Esscher 保费原理下对信度估计的相合性进行模拟验证，并在指数保费原理下与前人的结果进行了比较，结果发现已有的研究只是本文的一种特殊情况.

关键词　新型广义加权保费原理；风险保费；信度估计； Bayes 估计；相合性

MR(2000) 主题分类　62G35

中图分类　O211.9

1　引言

保费定价是指精算师对保险产品制定一个合理的价格的过程. 在厘定保费时，精算师必须对风险进行科学的分析和评价，以使得制定的价格能确保保险公司正常的赔付和获取一定的利润. 征收的保费过高，会使得投保人数量减少，流失保单；过低，会使得征收的保费不够理赔，造成亏损. 因此，保费定价是保险公司最为关注的重要问题之一. 保险公司在厘定费率时，既要考虑到总的保费收入，又要考虑到投保人的预期保

本文 2010 年 11 月 1 日收到. 2013 年 2 月 4 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (71001046, 71071056, 71063006), 江西省自然科学基金 (20114BAB211004) 资助项目.

费，使得保费在投保人之间公平分摊.

通常情况下，精算师制定保费的依据是保险产品的历史索赔数据．在精算学中，把一份保单可能导致的索赔定义为一个风险，用随机变量 X 来表示．这时该保险的历史索赔数据可以看作是该随机变量的随机样本的实现值．通过分析和了解这些数据信息，得到风险随机变量的分布特征，进而为该风险 (保单) 制定合理的价格 $H(X)$, 即为保费.

目前，保费定价最有效的方法就是利用信度理论 [1], 信度理论是精算学中最重要的经验保费厘定技巧．它是一种经验估费模型．在这个过程中，精算师根据过去的单个风险或者一个保单组合风险的经验数据，调整未来的保险费．信度原理起源于 Mowbray[2] 以及 Slellwayer[3], 他们在一种直观的基础上提出保费定价的信度公式：

$$\text{信度保费} = Z \times \text{经验保费} + (1 - Z) \times \text{聚合保费}, \tag{1}$$

其中 Z 被称为信度因子.

随后 Keffer[4] 将最大精确度信度原理运用到群体寿险 (Group life insurance). Bailey[5] 运用最小二乘法对最大精确信度理论建立数学模型，得到正态 - 正态， Beta- 二项等分布模型下的信度估计. 而真正无分布 (任意分布) 的信度理论的建立应属于 Bühlmann[6]. 他仍然用最小二乘法，在 Bayes 框架下，将估计限定在样本的线性函数类中，得到的最优保费估计恰好为信度加权形式，建立了无分布信度理论．二十世纪六十年代以来，信度理论在精算学领域成为研究的热点问题．关于信度理论的综述的文献可参考 [7–9] 等.

但是, 大部分信度理论的结果都只基于净保费原理下获得的, 而净保费不能满足保费的正的安全负荷性. 在破产理论中已经证明, 保险公司仅收取纯保费则将注定发生破产, 可参考 Asmussen[10]. 当然, 一种办法是通过设定安全负荷系数并运用期望值保费原理来制定保费, 但这样制定的保费没有竞争力 [11]. 解决这个问题的办法之一就是通过修改损失函数．这种想法最早是由 Gerber[12] 提出，他将平方损失函数修改为指数加权平方损失函数，得到了 Esscher 保费原理下的风险保费的信度估计．进而 Gómez-Déniz[13], Payandeh Najafabadi et al[14], Zhang[15] Wen et al[16] 分别在平衡损失函数, 熵损失函数, 相对损失函数和指数损失函数下考虑了风险保费的估计问题.

但是, 不同的保险公司可能根据自己的经营情况选取不同的保费原理, 而前面提到的研究都只能运用于单个保费原理, 不具有一般性. 注意到, 有很大一部分经典的保费原理都对应着某类损失函数，关于保费定价与损失函数关系的详细研究可参考 Heilmann[17], 他在文章中提出指数型损失函数, 分位数损失函数, 幂加权损失函数等多种损失函数, 其分别对应了指数保费原理, 分位数保费原理, 调整方差保费原理等. Furman and Zitikis[18] 提出了一种广义加权损失函数，在该损失函数下得到了一类广泛的保费原理：广义加权保费原理.

注意到，如果我们定义一种损失函数：

$$GL(X, a) = (v(a) - g(X))^2 h(X). \tag{2}$$

这里函数 $v(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 都是已知的函数. 如果选取不同 $v(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 的形式, 则这种损失函数能包含所有前面提到的所有损失函数, 因此我们将之称为新型广义加权损失函数, 在这种损失函数下得到的保费原理我们称之为新型广义加权保费原理.

本文将在损失函数 (2) 下考虑风险保费的最优估计. 由于该损失函数对应的新型广义加权保费原理不仅具有正的安全负荷, 而且包含了精算学中大部分常用的保费原理. 因此, 讨论该保费原理下的信度估计问题不仅具有理论意义, 而且具有很强的现实意义.

本文的结构如下：在第 2 节中讨论了损失函数 (2) 及其相应的新型广义加权保费原理, 并讨论该保费原理与常用保费原理的关系；第 3 节建立信度模型, 并在损失函数 (2) 下讨论风险保费的信度估计；第 4 节讨论信度估计的相合性；第 5 节对前面的结果作数值模拟, 验证得到的结论.

2 新型广义加权保费原理

假设某个风险的损失随机变量 X 只取非负值, 且具有分布函数 $F_X(x)$. 一种重要的保费计算原则就是用某个保费估计风险 X, 使得期望损失函数达到最小. 若取损失函数 (2), 最小化 $\min\limits_{P\in R}\mathrm{E}[GL(X,P)]$, 得到的下面的最优解.

命题 1 若函数 v 为单调的连续函数 (下文均作这个假设), 则求解最小化问题

$$\min_{P\in R}\mathrm{E}[GL(X,P)]=\min_{P\in R}\mathrm{E}\big[(v(P)-g(X))^2h(X)\big] \tag{3}$$

得到新型广义损失函数 (2) 下的最优保费为：

$$P=v^{-1}\Big(\frac{\mathrm{E}[g(X)h(X)]}{\mathrm{E}[h(X)]}\Big). \tag{4}$$

证 令 $\Phi=\mathrm{E}\big[(v(P)-g(X))^2h(X)\big]$ 中, 关于 Φ 对 P 求导, 并令导数为 0, 则有

$$\mathrm{E}[(v(P)-g(X))h(X)]=0. \tag{5}$$

解出 P 即为 (4) 式. 证毕.

事实上, 命题 1 保证了由 (4) 式给出的保费 P 是风险 X 的最佳估计. 称该保费 P 为聚合保费, 记为 $H(X)$. 由于聚合保费 (4) 又是在新型广义加权损失函数 (2) 下得到的, 因此 $H(X)$ 对应的原理称之为新型广义加权保费. 通过对 $v(x)$, $g(x)$ 以及 $h(x)$ 取不同的形式, 该聚合保费 (4) 退化为许多常用的保费原理, 并且大多数保费原理都具有正的安全负荷, 参考 Young[11].

- 期望值原理：$H(X)=(1+\alpha)\mathrm{E}(X)$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=(1+\alpha)x$ 以及 $h(x)=1$, 其中 $\alpha\geq 0$ 为正的常数；
- 指数保费原理：$H(X)=\frac{1}{\alpha}\log(\mathrm{E}(e^{\alpha X}))$, 这里 $v(x)=e^{\alpha x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ 以及 $h(x)=1$, 且 $\alpha\geq 0$ 为正常数；

- Esscher 保费原理： $H(X)=\frac{\mathrm{E}[Xe^{\lambda X}]}{\mathrm{E}[e^{\lambda X}]}$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=x$ 以及 $h(x)=e^{\lambda x}$, 这里 λ 为正的常数;

- 修正方差原理： $H(X)=\mathrm{E}(X)+\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{E}(X)}$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=x$ 以及 $h(x)=x$;

- Kamp 保费原理： $H(X)=\frac{\mathrm{E}[X(1-e^{-\lambda X})]}{\mathrm{E}[1-e^{-\lambda X}]}$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=x$ 以及 $h(x)=1-e^{-\lambda x}$, 其中 λ 为正的常数;

- 条件尾期望保费原理：$H(X)=\frac{\mathrm{E}[XI(x>q)]}{P(x>q)}=\mathrm{E}(X|X>q)$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=x$ 以及 $h(x)=I(x>q)$;

- 修正条件尾期望原理：$H(X)=\mathrm{E}(X|X>q)+\frac{\mathrm{Var}(X|X>q)}{\mathrm{E}(X|X>q)}$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=x$ 以及 $h(x)=xI(x>q)$;

- $H(X)=\frac{\mathrm{E}(Xh(X))}{\mathrm{E}(h(X))}$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=x$, 参考 Kamp[19];

- $H(X)=\frac{\mathrm{E}[X^{1+c}]}{\mathrm{E}[X^c]}$, $0\le c\le 1$, 这里取 $v(x)=x$, $g(x)=x$ 以及 $h(x)=x^c$, 参考 Heilmann[17].

因此，本文的保费 $H(X)$ 是一种非常广义形式的保费原理，可以包含精算学中常见的大部分保费原理．保险公司可以通过选取不同的 $v(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 函数形式，得到适合自己保险公司的保费原理.

3 信度模型的基本假设

类似于经典的信度原理，假设风险 X 由某个风险参数 Θ 识别，而风险参数 Θ 是不可观测的随机变量，具有未知的先验分布 $\pi(\theta)$. 在汽车保险中， $\pi(\theta)$ 可能表示车辆的型号、载重、驾驶人的性别、年龄、酗酒情况．这其中很多因素的信息保险公司都无法直接获取．给定风险参数 Θ 条件下， $X_1,X_2,\cdots X_n,X_{n+1}$ 为风险 X 的独立同分布的复制，即对 $i=1,2,\cdots,n+1$, (X_i,Θ) 与 (X,Θ) 有相同的联合分布．将上面的假设陈述如下：

假设 1 非负随机变量 X (也称为风险) 可以由风险参数 Θ 来识别，风险参数 Θ 的先验分布为 $\pi(\theta)$.

假设 2 给定 Θ, 随机序列 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布于 X, 具有相同的条件分布 $F(x,\theta)$. 记 $\underline{X_n}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 表示到时刻 n 为止的索赔经历 (也称为样本).

假设 1 与假设 2 表明风险结构属于 Bayes 框架．因此，保费的估计需要用到 Bayes 分析的工具.

若风险参数 Θ 是已知的，则可以用 Θ 的某个函数 $R(\Theta)$ 来估计 / 预测未来的索赔 X_{n+1}, 在损失函数 (2) 下，求解最优化问题：

$$\min_{R(\Theta)}\mathrm{E}[L(X_{n+1},R(\Theta))|\Theta]=\min_{R(\Theta)}\mathrm{E}\big[(g(X_{n+1})-v(R(\Theta)))^2h(X_{n+1})|\Theta\big], \tag{6}$$

得到

$$R(\Theta)=v^{-1}\Big(\frac{\mathrm{E}[g(X_{n+1})h(X_{n+1})|\Theta]}{\mathrm{E}[h(X_{n+1})|\Theta]}\Big), \tag{7}$$

将 $R(\Theta)$ 称为风险 X 的风险保费或个体保费．由于在实际中风险参数 Θ 是未知的，因此风险保费 $R(\Theta)$ 也是未知的，需要由样本来估计．

3 风险保费的估计

若没有索赔样本，即 $n=0$ 时，用一个实数 H 估计风险保费 $R(\Theta)$, 使得损失函数 (2) 达到最小．求解下面的最优化问题：

$$\min_{H\in R}\mathrm{E}[GL(R(\Theta),H)]=\min_{H\in R}\mathrm{E}\big[(g(R(\Theta))-v(H))^2h(P(\Theta))\big], \tag{8}$$

得到

$$H=v^{-1}\Big(\frac{\mathrm{E}[g(R(\Theta))h(R(\Theta))]}{\mathrm{E}[h(R(\Theta))]}\Big):=H_{\mathrm{col}}(X). \tag{9}$$

这里 $H_{\mathrm{col}}(X)$ 作为 $R(\Theta)$ 的一个估计, 本文称之为聚合估计. 类似的结论可参考 [13,14,16].

若观察到风险 X 的索赔样本 $\underline{X_n}$, 则可以根据样本的函数来构造风险保费的估计．记 $\mathcal{M}$ 表示样本 $\underline{X_n}$ 所有可测函数组成的集合．在该集合中，考虑最小化问题：

$$\begin{aligned}H_{BE}(\underline{X_n})&=\mathop{\arg\min}_{H(\underline{X_n})\in\mathcal{M}}\ \mathrm{E}\big[GL(R(\Theta),H(\underline{X_n}))\big]\\&=\mathop{\arg\min}_{H(\underline{X_n})\in\mathcal{M}}\ \mathrm{E}\big[(g(R(\Theta))-v(H(\underline{X_n})))^2h(R(\Theta))\big].\end{aligned} \tag{10}$$

定理 1 若函数 v 存在反函数，且 $v'(x)\neq 0$, 对任意 x, 则最优化问题 (10) 的解为：

$$H_{BE}(\underline{X_n})=v^{-1}\Big(\frac{\mathrm{E}[g(R(\Theta))h(R(\Theta))|\underline{X_n}]}{\mathrm{E}[h(R(\Theta))|\underline{X_n}]}\Big). \tag{11}$$

称 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 为风险保费的聚合估计.

证 由 Bayes 定理可知，最优化问题 (10) 只需在后验分布下达到最小．记

$$\Psi=\mathrm{E}\big[(g(R(\Theta))-v(H(\underline{X_n})))^2h(R(\Theta))\big|\underline{X_n}\big]. \tag{12}$$

令 $\frac{\partial\Psi}{\partial H}=0$, 得到下面的正规方程：

$$\mathrm{E}\big[(g(R(\Theta))-v(H(\underline{X_n})))v'(H(\underline{X_n}))h(R(\Theta))\big|\underline{X_n}\big]=0. \tag{13}$$

由于 $v'(H(\underline{X_n}))\neq 0$, 则有 $\mathrm{E}\big[g(R(\Theta))h(R(\Theta))|\underline{X_n}\big]-v(H(\underline{X_n}))\mathrm{E}\big[h(R(\Theta))|\underline{X_n}\big]=0$. 因此定理成立．证毕.

注意到 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 是风险保费在损失函数 (2) 下的最优估计，本文称之为 Bayes 估计．在某些分布假设下， Bayes 估计能够得到简洁的表达式，但一般情况下， Bayes 估计 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 的表达式比较复杂，甚至根本没有显示表达式，如下面的例子.

例 1 设风险 X 为 Bernoulli 分布：$\Pr(X=1)=1-\Pr(X=0)=\theta$, 而 $\theta \backsim U(0,1)$, 即 $(0,1)$ 上的均匀分布. 这时 $\mu(\theta)=\theta$ 以及 $\mathrm{Var}(X|\theta)=\theta(1-\theta)$. 取 $v(x)=e^{\alpha x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ 与 $h(x)=e^{hx}$, 其中 $\alpha>0$, $h\geq 0$ 为已知参数. 这时由 (4) 得到保费原理：

$$P=\frac{1}{\alpha}\log\Big[\frac{\mathrm{E}(e^{(\alpha+h)X})}{\mathrm{E}(e^{hX})}\Big]. \tag{14}$$

当 $h=0$ 时为指数保费原理. 注意到 θ 的后验分布为 $\mathrm{Beta}\big(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+1, n-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+1\big)$, 即

$$\pi(\theta|\underline{X_n})=\frac{\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}(1-\theta)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}}{\mathrm{Beta}\big(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+1, n-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+1\big)}.$$

因此，风险保费为

$$R(\theta)=\frac{1}{\alpha}\log\Big(\frac{\theta e^{\alpha+h}+1-\theta}{\theta e^{h}+1-\theta}\Big). \tag{15}$$

它的聚合估计和 Bayes 估计分别为

$$H_{\mathrm{col}}(X)=\frac{1}{\alpha}\log\Big(\frac{\int_0^1 e^{(\alpha+h)R(\theta)}\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^1 e^{hR(\theta)}\,\mathrm{d}\theta}\Big) \tag{16}$$

以及

$$H_{BE}(\underline{X_n})=\frac{1}{\alpha}\log\Big[\frac{\int_0^1 e^{(h+\alpha)R(\theta)}\pi(\theta|X_n)\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^1 e^{hR(\theta)}\pi(\theta|X_n)\,\mathrm{d}\theta}\Big]. \tag{17}$$

从上面的例子可以看出，样本函数的最优估计 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 依赖于样本的条件分布与风险参数的先验分布的所有信息. 但是，这些信息，特别是先验分布信息，在一般情况下无法获取. 因此，虽然 Bayes 估计 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 具有最优性，但却不能直接运用于实际中的保费定价. 一种可行的办法是在某种限制性条件下求解 (10), 得到的最优解被称之为信度估计，可参考 [1,20] 等.

注意到风险保费 $R(\Theta)=v^{-1}\big(\frac{\mathrm{E}[g(X)h(X)|\Theta]}{\mathrm{E}[h(X)|\Theta]}\big)$ 的形式，令 $P(\Theta)=\frac{\mathrm{E}[g(X)h(X)|\Theta]}{\mathrm{E}[h(X)|\Theta]}$, 则

$$R(\Theta)=v^{-1}(P(\Theta)). \tag{18}$$

为得到满足好的性质的信度估计，分成两步：首先估计 $P(\Theta)$, 然后将估计代入 (18).

第一步 记

$$\mathcal{M}_W=\Bigg\{a+bW(\underline{X_n}), a,b\in R \ \text{且}\ W(\underline{X_n})=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}g(X_i)h(X_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}h(X_i)}\Bigg\} \tag{19}$$

为样本的某种函数类. 并将 $P(\Theta)$ 的估计限定在函数类 $\mathcal{M}_W$ 中，求解下面的最优化问题

$$\min_{H(\cdot)\in\mathcal{M}_W} \mathrm{E}\big[(P(\Theta)-H(\cdot))^2h(P(\Theta))\big]=\min_{a,b\in R}\mathrm{E}\big[(P(\Theta)-a-bW(\underline{X_n}))^2h(P(\Theta))\big]. \tag{20}$$

得到下面的定理.

定理 2 最优化问题 (20) 的解为：

$$H_W(\underline{X_n})=ZW(\underline{X_n})+\Big(1-Z\frac{\mathrm{E}_{\&}[W_n(\Theta)]}{H_C(X)}\Big)H_C(X), \tag{21}$$

其中

$$Z=\frac{\mathrm{Cov}_{\&}(P(\Theta),W_n(\Theta))}{\mathrm{Var}_{\&}(W_n(\Theta))+\mathrm{E}_{\&}[\mathrm{Var}(W(\underline{X_n})|\Theta)]} \tag{22}$$

为信度因子，而 $W_n(\Theta)=\mathrm{E}[W(\underline{X_n})|\Theta]$, 以及 $H_C(X)=\mathrm{E}_{\&}[P(\Theta)]$. 这里 Θ 的新的概率分布 “&” 定义为：

$$\mathrm{Pr}_{\&}(\Theta\in A)=\frac{\mathrm{E}[I_A(\Theta)h(P(\Theta))]}{\mathrm{E}[h(P(\Theta))]}. \tag{23}$$

证　由于

$$\mathrm{E}\big[(P(\Theta)-a-bW(\underline{X_n}))^2h(P(\Theta))\big]=\mathrm{E}[h(P(\Theta))]\mathrm{E}_{\&}\big[(P(\Theta)-a-bW(\underline{X_n}))^2\big]. \tag{24}$$

因此，最优化问题 (20) 等价于

$$\min_{a,b\in R}\mathrm{E}_{\&}\big[(P(\Theta)-a-bW(\underline{X_n}))^2\big]. \tag{25}$$

令

$$\Phi=\mathrm{E}_{\&}\big[(P(\Theta)-a-bW(\underline{X_n}))^2\big], \tag{26}$$

则令 $\frac{\partial\Phi}{\partial a}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial b}=0$, 得到下面的正规方程组：

$$\begin{cases}\mathrm{E}_{\&}[P(\Theta)-a-bW(\underline{X_n})]=0,\\ \mathrm{E}_{\&}[(P(\Theta)-a-bW(\underline{X_n}))W(\underline{X_n})]=0.\end{cases} \tag{27}$$

解得：

$$\begin{aligned}b=&\frac{\mathrm{E}_{\&}[(P(\Theta)-\mathrm{E}_{\&}(P(\Theta)))(W(\underline{X_n})-\mathrm{E}_{\&}(W(\underline{X_n})))]}{\mathrm{E}_{\&}[(W(\underline{X_n})-\mathrm{E}_{\&}(W(\underline{X_n})))^2]}\\ =&\frac{\mathrm{Cov}_{\&}(P(\Theta),W_n(\Theta))}{\mathrm{Var}_{\&}(W(\Theta))+\mathrm{E}_{\&}[\mathrm{Var}(W(\underline{X_n})|\Theta)]}\\ =&Z\end{aligned}$$

以及

$$a=\mathrm{E}_{\&}(P(\Theta))-b\mathrm{E}_{\&}(W(\underline{X_n}))=H_C(X)-Z\mathrm{E}_{\&}(W_n(\Theta)). \tag{28}$$

因此

$$\begin{aligned} H_W(\underline{X_n}) =&a+bW(\underline{X_n}) \\ =&H_C(X)-Z\mathrm{E}_{\&}(W_n(\Theta))+ZW(\underline{X_n}) \\ =&ZW(\underline{X_n})+\Big(1-Z\frac{\mathrm{E}_{\&}(W_n(\Theta))}{H_C(X)}\Big)H_C(X). \end{aligned}$$

证毕.

第二步 通过 "代入"$v^{-1}(x)$ 的方法，风险保费 $R(\Theta)$ 的信度估计可以表示为：

$$H_{CE}(\underline{X_n})=v^{-1}\bigg(ZW(\underline{X_n})+\Big(1-Z\frac{\mathrm{E}_{\&}(W_n(\Theta))}{H_C(X)}\Big)H_C(X)\bigg). \tag{29}$$

4 估计的相合性

在本节，将证明信度估计 $H_{CE}(\underline{X_n})$ 的相合性，即当样本容量趋于无穷时，信度估计是否收敛到风险保费 $R(\Theta)$. 对经典信度保费的相合性讨论，可参考 [21].

定理 3 假设 $h(x)$ 为增函数，且 $h(0)>0$, 而 $v(x)$ 为连续函数，且存在唯一的逆函数，记 $u(\Theta)=\mathrm{E}(v(X)h(X)|\Theta)$, 若 $u(\Theta)$ 为平方可积的，则信度估计 $H_{CE}(\underline{X_n})$ 几乎处处收敛到风险保费 $R(\Theta)$.

证 首先，由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 在 Θ 给定下独立同分布，根据大数定律，有

$$W(\underline{X_n})=\frac{\sum\limits_{i=1}^n v(X_i)h(X_i)}{\sum\limits_{i=1}^n h(X_i)}\longrightarrow\frac{\mathrm{E}[v(X_1)h(X_1)|\Theta]}{\mathrm{E}[h(X_1)|\Theta]}=P(\Theta),\qquad \text{a.s.} \tag{30}$$

其次，注意到

$$W_n(\Theta)=\mathrm{E}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n v(X_i)h(X_i)}{\sum\limits_{i=1}^n h(X_i)}\middle|\Theta\right)\leq\frac{\mathrm{E}\big(\sum\limits_{i=1}^n v(X_i)h(X_i)|\Theta\big)}{nh(0)}=\frac{u(\Theta)}{h(0)}. \tag{31}$$

因此有

$$W_n(\Theta)\longrightarrow P(\Theta),\qquad \text{a.s.} \tag{32}$$

因此，由控制收敛定理，得到 $\mathrm{E}_{\&}[W_n(\Theta)]\longrightarrow\mathrm{E}_{\&}[P(\Theta)]=H_C(X)$. 由于 $u(\Theta)$ 为平方可积的，再由控制收敛定理及几乎处处收敛的性质知

$$\mathrm{Cov}_{\&}(P(\Theta),W_n(\Theta))=\mathrm{E}_{\&}[W_n(\Theta)P(\Theta)]-\mathrm{E}_{\&}[W_n(\Theta)]E_{\&}[P(\Theta)]\longrightarrow\mathrm{Var}_{\&}(P(\Theta)),\quad \text{a.s.} \tag{33}$$

以及

$$\mathrm{Var}_{\&}(W_n(\Theta))=\mathrm{E}_{\&}[(W_n(\Theta))^2]-[\mathrm{E}_{\&}(W_n(\Theta))]^2\longrightarrow\mathrm{Var}_{\&}(P(\Theta)),\quad \text{a.s.} \tag{34}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\&}\left[\mathrm{Var}(W(\underline{X_n})|\Theta)\right] =&\mathrm{E}_{\&}[\mathrm{E}(W^2(\underline{X_n})|\Theta)-(\mathrm{E}(W(\underline{X_n})|\Theta))^2]\\
=&\frac{\mathrm{E}[\mathrm{E}(W(\underline{X_n})^2|\Theta)\mathrm{E}[P(\Theta)]-(\mathrm{E}(W(\underline{X_n})|\Theta))^2\mathrm{E}[P(\Theta)]]}{\mathrm{E}[P(\Theta)]}\\
\longrightarrow&\mathrm{E}_{\&}[P^2(\Theta)-P^2(\Theta)]=0.
\end{aligned}
$$

根据信度因子 Z 的表达式，有

$$
Z\longrightarrow\frac{\mathrm{Var}_{\&}[P(\Theta)]}{\mathrm{Var}_{\&}[P(\Theta)]+0}=1,\qquad \text{a.s.} \tag{35}
$$

因此

$$
H_W(\underline{X_n})=ZW(\underline{X_n})+\Big(1-Z\frac{\mathrm{E}_{\&}(W_n(\Theta))}{H_C(X)}\Big)H_C(X)\longrightarrow P(\Theta),\qquad \text{a.s.}
$$

根据函数 $v(x)$ 的连续性，则 $H_{CE}(\underline{X_n})\xrightarrow{\text{a.s.}}v^{-1}[P(\Theta)]=R(\Theta)$.

5 数值模拟

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots$ 为独立同分布服从于 Poisson(θ) 分布，且风险参数 $\theta\sim$ Gamma(α,β), 其密度函数为 $\pi(\theta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}I(\theta>0)$. 容易得到 Θ 的后验分布为 $(\Theta|\underline{X_n})\sim$ Gamma$(n\overline{X}+\alpha,n+\beta)$.

(1) Esscher 保费原理下风险保费估计的相合性：若取 $v(x)=x$, $g(x)=x$, $h(x)=e^{hx}$, 这时保费原理为 Esscher 原理：

$$
H(X)=\frac{\mathrm{E}(Xe^{hX})}{\mathrm{E}(e^{hX})}. \tag{36}
$$

此时风险保费为

$$
R(\theta)=\theta e^h=P(\theta). \tag{37}
$$

所以风险保费的 Bayes 估计为

$$
H_{BE}(\underline{X_n})=\frac{\mathrm{E}(R(\theta)e^{hR(\theta)}|\underline{X_n})}{\mathrm{E}(e^{hR(\theta)}|\underline{X_n})}=\frac{(n\overline{X}+\alpha)e^h}{n+\beta-he^h}. \tag{38}
$$

根据强大数定律，$\overline{X}\xrightarrow{\text{a.s.}}\theta$, 则容易看出 $H_{BE}(\underline{X_n})\xrightarrow{\text{a.s.}}\theta e^h=R(\theta)$. 对于信度估计 $H_{CE}(\underline{X_n})$, 注意到

$$
\pi_{\&}(\theta)=\frac{\pi(\theta)h(P(\theta))}{\mathrm{E}[h(P(\theta))]}=\frac{(\beta-he^h)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-(\beta-he^h)},\qquad \theta>0. \tag{39}
$$

即 θ 的新的概率分布为 Gamma$(\alpha,\beta-he^h)$, 则 $H_C(X)=\mathrm{E}_{\&}[P(\theta)]=\frac{\alpha e^h}{\beta-he^h}$. 这时信度估计 $H_{CE}(\underline{X_n})$ 没有显示表达式，可以通过模拟得到. 取 $h=0.4$, $\alpha=2$, $\beta=1$, 在不同的样本容量 $n=20,200$ 时，计算估计 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 与 $H_{CE}(\underline{X_n})$ 的均方误差，如下表：

表 1 Poisson-Gamma 分布时贝叶斯保费和信度保费的模拟结果

		$n=20$				$n=200$			
θ 值	$R(\theta)$	H_{BE}	sd_{BE}	H_{CE}	sd_{CE}	H_{BE}	sd_{BE}	H_{CE}	sd_{CE}
0.1	0.1492	0.1194	0.1416	0.3429	0.6347	0.1419	0.0085	0.1728	0.0284
0.3	0.4475	0.3197	0.4375	0.6344	0.6460	0.4031	0.0057	0.4716	0.0373
0.5	0.7459	0.5173	0.7623	0.9218	0.6745	0.7011	0.0059	0.7661	0.0423
0.7	1.0443	0.7183	1.0689	1.2112	0.7039	1.0331	0.0024	1.0654	0.0495
0.9	1.3426	0.9213	1.3722	1.5009	0.7282	1.3214	0.0025	1.3613	0.0561

在表 1 中， H_{BE} 及 H_{CE} 为 Bayes 估计 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 及信度估计 $H_{CE}(\underline{X_n})$ 在 5000 次模拟的平均值, 而 sd_{BE} 与 sd_{CE} 为估计 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 和 $H_{CE}(\underline{X_n})$ 相对于风险保费 $R(\theta)$ 的均方误差. 从表中可以看出， Bayes 估计 $H_{BE}(\underline{X_n})$ 及信度估计 $H_{CE}(\underline{X_n})$ 都是相合的，并且有较快的收敛速度. 从表一中可以看出，相比而言，信度估计的均方误差比 Bayes 估计的均方误差稍微大一些，但信度估计只依赖于先验分布的一二阶矩，而 Bayes 估计依赖于样本和先验参数的具体分布，并且在大多数情况下，即使样本和先验参数的具体分布完全已知， Bayes 估计也没有显示表达式.

(2) 指数保费原理下的比较：若取 $v(x)=e^{\alpha x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ 以及 $h(x)=1$, 则得指数保费原理

$$H(X)=\frac{1}{\alpha}\log(\mathrm{E}(e^{\alpha X})). \tag{40}$$

这里 $\alpha\geq 0$ 为正常数. 此时风险保费为

$$R(\theta)=\frac{1}{\alpha}\log(\mathrm{E}(e^{\alpha X}|\theta))=\frac{\theta(e^{\alpha}-1)}{\alpha}. \tag{41}$$

由于 $h(x)=1$, 则 θ 的新的概率分布也是 Gamma(α,β). 相应的，有 $P(\theta)=\mathrm{E}(e^{\alpha X}|\theta)$ $=e^{\theta(e^{\alpha}-1)}$ 以及 $H_C(X)=\mathrm{E}[P(\theta)]=(\frac{\beta}{\beta-e^{\alpha}+1})^{\alpha}$. 因此，信度估计为

$$H_{CE}(\underline{X_n})=\frac{1}{\alpha}\log\Big(\frac{Z}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha X_i}+(1-Z)H_C(X)\Big), \tag{42}$$

其中信度因子为

$$Z=\frac{\mathrm{Var}[P(\theta)]}{\mathrm{Var}[P(\theta)]+\mathrm{E}[\mathrm{Var}(e^{\alpha X}|\theta)]}. \tag{43}$$

[16] 在指数损失函数下建立了风险保费的信度估计. 将本文得到的信度估计 (42) 与 [16] 的 (3.7) 式比较，发现这两个估计具有相同的形式. 由于本文得到的信度估计是在新型广义加权保费原理下讨论的，该保费原理不仅包含了 [16] 的指数保费原理，而且还包含了其他常用的保费原理，因此 [16] 讨论的指数保费原理的信度估计只是本文的一种特殊情况.

6　结论

本文考虑了新型广义加权保费原理下风险保费的信度估计问题．新型广义加权保费原理是一种非常广泛的保费原理，它包含了期望值原理，指数原理， Esscher 原理，修正方差保费原理， Kamp 保费原理，条件尾期望原理等精算学中常用的保费原理．根据损失函数法，本保费原理对应了新型广义加权损失函数．在该损失函数下，我们将估计限定在经验分布的线性组合中，得到了风险保费的信度估计．结论表明，在新型广义加权保费原理下，风险保费的信度估计能表达为 "信度" 加权形式．与 Bayes 估计相比，信度估计不需要具体的样本和先验分布假设，但又能满足相合性．本方法统一了精算学中众多的保费原理下风险保费的信度估计问题，已有的研究 [12,15,16] 等都可以看做本文研究的特殊情况．

参　考　文　献

[1] Bühlmann H, Gisler A. A Course in Credibility Theory and its Applications. Netherlands: Springer-Verlag, 2005

[2] Mowbray A H. How Extensive a Payroll is Necessary to Give a Dependable Pure Premium? *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1914, 1, 24–30

[3] Stellwagen H. Automobile Rate Making. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1925, 11, 276–292

[4] Keffer R. An Experience Rating Formula. *Transactions of the Society of Actuaries*, 1929, 30: 130–139

[5] Baily A L. A Generalized Theory of Creidibility. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1945, 32, 13–20

[6] Bühlmann H. Experience Rating and Credibility. *Astin Bulletin*, 1967, 4: 199–207

[7] 严颖，成世学，程侃．保险精算方法 (三) 信度理论．数理统计与管理, 1996, 15(6): 59–64
(Yan Y, Cheng S X, Cheng K. The Actuarial Method (c): Credibility Theory. *Applications of Statistics and Management*, 1996, 15(6): 59–64)

[8] 成世学．保关于可信性模型的若干评注．应用概率统计, 2002, 18(4): 438–448
(Cheng S X. Some Remarks on Credibility Model. *Chinese Journal of Applied Probability and Statisties*, 2002, 18(4): 438–448)

[9] Norberg R. Credibility Theory. In: Encyclopedia of Actuarial Science. Wiley, Chichester, UK, 2004

[10] Asmussen S. Ruin Probabilities. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2000

[11] Young V R. Premium Principles. In: Encyclopedia of Actuarial Science, Wiley, 2004, 1322–1331

[12] Gerber H U. Credibility for Esscher Premium. Mitleilungen der Vereinigung schweiz. Versicher ungsmathematiker, Heft 1980, 3, 307–312

[13] Gómez-Déniz E. A Generalization of the Credibility Theory Obtained by Using the Weighted Balanced Loss Function. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(2): 850–854

[14] Payandeh Najafabadi A T, Hatamib H, Najafabadi M O. A Maximum-entropy Approach to the Linear Credibility Formula. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51: 216–221

[15] Zhang J. Credibility Premium Under Relative Loss Function. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2007, 23(2): 157–164

[16] Wen L, Wang W, Wang J. The Credibility Premiums for Exponential Principle. *Acta Mathematica Sinica*, 2011, 27(11): 2217–2228

[17] Heilmann W R. Decision Theoretic Foundations of Credibility Theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1989, 8: 77–95

[18] Furman E, Zitikis R. Weighted Premium Calculation Principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(1): 459–465

[19] Kamps, U. On a Class of Premium Principles Including the Esscher Premium. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1998, 1: 75–80

[20] Wen L, Wu X, Zhou X. The Credibility Premiums for Models with Dependence Induced by Common Effects. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 44: 19–25

[21] Schmidt K D. Covergence of Bayes and Credibility Premiums. *Astin Bulletin*, 1991, 20(2): 167–172

The Credibility Estimators of Risk Premium Under a New Type of Generalized Weighted Premium Principle

WEN Limin MEI Guoping

(*Jiangxi Normal University, Nan chang* 330022)

(*Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang* 330013)

(*E-mail: wlmjxnu@163.com*)

Abstract In this paper, we study the credibility estimator of risk premium under the new-type generalized weighted premium principle. Use of a loss function method, the new generalized weighted premium principle is defined as the optimal estimate of the risk under the new-type generalized weighted loss function. Under this type of loss function, we constrain the estimator of risk premium to linear combination of empirical estimate and derive the credibility estimator of risk premium by minimizing the mean square error. We also prove the consistency of the credibility estimator. Finally, the numerical example is given under Esscher principle to verify the results of the paper. In addition, we also compare the credibility estimator under exponential principle with previous research. The results show that the previous estimator is the special case of this paper.

Key words new type of generalized weighted premium principle; risk premium; credibility estimator; bayes estimator; consistency

MR(2000) Subject Classification 62G35

Chinese Library Classification O211.9