Banach空间中脉冲微分方程初值问题解的存在性

秦丽娟

(甘肃农业大学理学院，兰州 730070)

(E-mail: qinlj@gsau.edu.cn)

摘　要　利用凝聚映射的不动点定理，对脉冲函数不加紧性条件和其他额外条件，通过逐段延拓的方法，获得了无穷区间上脉冲微分方程初值问题解的存在性，本质上改进了某些已知的结果.

关键词　Banach 空间；初值问题；非紧性测度；解的存在性

MR(2000) 主题分类　34K45; 45J05

中图分类　O175.15

1　引言及引理

设 E 为 Banach 空间， $T_r=\{u\in E\mid \|u\|\le r\}$ $(r>0)$, $R^+=[0,+\infty)$. 我们讨论 Banach 空间 E 中的非线性脉冲微分方程初值问题 (IVP)

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,\,u(t)), & t\in J,\quad t\neq t_k,\\ \Delta u|_{t=t_k}=I_k(u(t_k)), & k=1,2,\cdots,\\ u(0)=x_0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 $f:J\times E\to E$ 连续， $J=[0,+\infty)$, $0=t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots,t_k\to\infty(k\to\infty)$, $x_0\in E$, $I_k:E\to E$ $(k=1,2,\cdots)$. $\Delta u|_{t=t_k}=u(t_k^+)-u(t_k^-)$ 表示 $u(t)$ 在 $t=t_k$ 的跳跃度， $u(t_k^+)$, $u(t_k^-)$ 分别表示 $u(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右，左极限 $(k=1,2,\cdots)$. 记 $J_0=[0,t_1]$, $J_1=(t_1,t_2],\cdots,J_{m-1}=(t_{m-1},t_m],\cdots$, $J'=J\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_m,\cdots\}$. 令 $PC(J,E)=\{u:J\to E$ 在 $t\neq t_k$ 处连续，在 $t=t_k$ 处左连续，其右极限 $u({t_k}^+)$ 存在，$k=1,2,\cdots\}$.

本文 2011 年 3 月28日收到. 2012 年 2月 17 日收到修改稿.

关于问题 (1), [1] 利用上下解方法和单调迭代技巧，获得了 IVP (1) 的耦合解的迭代逼近. 除了假定上下解存在，还要求脉冲函数连续单调增，并且运用了一定的紧性条件，获得了问题 (1) 解的存在性结果. [2–4] 均研究了 Banach 空间中脉冲 Volterra 型积分方程解的存在性, [3] 改进了 [2] 与 [4] 中的结果，但仍有很强的限制条件 (见 [3] 中定理 1 的 (H1) 与 (H2)), 并且已有的文献均是在有限区间上讨论的.

本文用 Sadovskii 不动点定理获得了一阶非线性微分方程初值问题局部解的存在性，然后由延拓定理，获得其整体解的存在性，并用逐段延拓的方法，获得了 IVP (1) 在无穷区间上解的存在性. 在此过程中，对 f 限制满足条件 (H2), 虽然加强了 f 的条件，但是对脉冲函数不加紧性条件及其他额外条件，甚至连“连续”这一条件都不需要，从本质上改进了已有文献的结果.

本文的结果表明，对于 Banach 空间中一阶脉冲微分方程初值问题，其本质与非脉冲情形是一致的，因此只须考虑非脉冲的情形就可以了.

引理 1[5] 若 $D\subset E$ 为有界集，则存在一可数集 $D_0\subset D$, 使得

$$\alpha(D)\le 2\alpha(D_0).$$

引理 2[6] 设 E 是实 Banach 空间，若 $B\subset C([a,b],E)$ 有界且等度连续，记 $B(t)=\{u(t)\mid u\in B\}$, 则 $\alpha(B(t))$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$\alpha(B)=\max_{t\in[a,b]}\alpha(B(t)).$$

引理 3[7] 设 $B=\{u_n\}\subset C([a,b],E)$ 是有界集，则 $\alpha(B(t))$ Lebesgue 可积，且

$$\alpha\Big(\Big\{\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t\Big\}\Big)\le 2\int_a^b\alpha(B(t))\mathrm{d}t.$$

2 非脉冲情形下整体解的存在性结果

考虑非线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t)), & t\ge t_0,\\ u(t_0)=\bar{x} \end{cases}\tag{2}$$

解的存在性. 这里 $\bar{x}\in E$, $f\in C([t_0,+\infty)\times E,E)$, $t_0\ge 0$.

定理 1 设 $f:[t_0,+\infty)\times E\to E$ 连续，且满足下列条件:

(H1) 存在常数 $L>0$, 使得对任意集合 $D\subset T_r$, $t\in J$, 有

$$\alpha(f(t,D))\le L\alpha(D).$$

(H2) 存在 $h\in C(R^+,R^+)$, 使得 $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}r}{1+h(r)}=+\infty$, 对任意 $t\in J$, $x\in E$, 有

$$\|f(t,x)\|\le h(\|x\|),$$

则初值问题 (2) 的任一饱和解均在 $[t_0,+\infty)$ 上存在.

证　由 f 的连续性知，存在 $\delta>0$, 使得 f 在 $[t_0,t_0+\delta]\times\overline{B}(\overline{x},\delta)$ 上有界. 所以，存在常数 $M>0$, 使得

$$\|f(t,u)\|\le M,\qquad \forall\,(t,u)\in[t_0,t_0+\delta]\times\overline{B}(\overline{x},\delta).$$

取 $h=\min\left\{\delta,\frac{\delta}{M}\right\}$, 令 $I=[t_0,t_0+h]$, $\Omega=\left\{u\in C(I,E)\mid \|u(t)-\bar{x}\|\le\delta\right\}$, 则 Ω 是有界凸闭集.

定义算子 $A:\Omega\to C(I,E)$ 如下：

$$(Au)(t)=\bar{x}+\int_{t_0}^{t}f(s,u(s))\mathrm{d}s,\tag{3}$$

则初值问题 (2) 的解等价于算子 A 的不动点.

易见

$$\|(Au)(t)-\bar{x}\|\le\int_{t_0}^{t}\big\|f(s,u(s))\big\|\,\mathrm{d}s\le(t-t_0)M\le Mh\le\delta,$$

所以 $A:\Omega\to\Omega$.

下面分三部分完成证明：

(1) 先证 $A:\Omega\to\Omega$ 是连续算子.

设 $u_n\to u$ $(n\to\infty)$ 于 $C(I,E)$, 要证 $f(t,u_n(t))\to f(t,u(t))$ $(n\to\infty)$ 在 I 上一致成立.

反设不然，则存在 $\varepsilon_0>0$, 子列 $\{t_k\}\subset I$ 和 $\{n_k\}$, 且 $n_k\to\infty$ $(k\to\infty)$, 使得

$$\|f(t_k,u_{n_k}(t_k))-f(t_k,u(t_k))\|\ge\varepsilon_0,$$

而 $\{t_k\}$ 有收敛子列，设 $t_k\to t_1\in I$ $(k\to\infty)$, 则

$$u_{n_k}(t_k)\to u(t_1),\qquad k\to\infty.$$

由 f 在点 $(t_1,u(t_1))$ 的连续性，有

$$\big\|f(t_k,u_{n_k}(t_k))-f(t_1,u(t_1))\big\|\longrightarrow 0,\qquad k\to\infty.\tag{4}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\big\|f(t_k,u_{n_k}(t_k))-f(t_1,u(t_1))\big\|\\ \ge&\|f(t_k,u_{n_k}(t_k))-f(t_k,u(t_k))\|-\|f(t_k,u(t_k))-f(t_1,u(t_1))\|\\ \ge&\varepsilon_0-\|f(t_k,u(t_k))-f(t_1,u(t_1))\|\to\varepsilon_0,\qquad k\to\infty.\end{aligned}$$

这与 (4) 式矛盾. 所以 $A:\Omega\to\Omega$ 是连续算子.

(2) 对 $\forall\,u\in\Omega$, $t_1,t_2\in I$, 设 $t_0\le t_1\le t_2\le t_0+h$, 有

$$\|(Au)(t_2)-(Au)(t_1)\|=\Big\|\int_{t_1}^{t_2}f(s,u(s))\mathrm{d}s\Big\|\le M(t_2-t_1),$$

所以 $A(\Omega)$ 在 $[t_0,t_0+h]$ 上有界且等度连续.

$\forall B\subset\Omega$, 由引理 1, 存在 $B_1=\{u_n\}\subset B$, 使得

$$\alpha(A(B))\le 2\alpha(A(B_1)).$$

因为 $A(B_1)$ 是有界等度连续集，由引理 2 有

$$\alpha(A(B_1))=\max_{t\in I}\alpha(A(B_1)(t)).$$

由引理 3 及条件 (H1), 有

$$\begin{aligned}\alpha(A(B_1(t)))=&\alpha\Big(\Big\{\int_{t_0}^t f(s,u_n(s))\mathrm{d}s|n\in N\Big\}\Big)\le 2\int_{t_0}^t\alpha\big(\{f(s,u_n(s))\mid n\in N\}\big)\,\mathrm{d}s\\ =&2\int_{t_0}^t\alpha\big(f(s,B_1(s))\big)\,\mathrm{d}s\le 2L\int_{t_0}^t\alpha(B_1(s))\,\mathrm{d}s\\ \le&2Lh\alpha(B_1)\le 2Lh\alpha(B),\end{aligned}$$

所以 $\alpha(A(B))\le 2\alpha(A(B_1))\le 4Lh\alpha(B)$.

如果 $4Lh<1$, 则 $A:\Omega\to\Omega$ 是凝聚映射，由 Sadvoskii 不动点定理， A 在 $[t_0,t_0+h]$ 上存在不动点.

如果 $4Lh\ge 1$, 则把区间 I 分成区间长度为 h_1 的若干小区间 $I_1,I_2,\cdots,I_N$, 使 $4Lh_1<1$, 则由上面的证明过程知，初值问题 (2) 在 I_1 上至少有一个解 $u^*(t)$. 再用一次上面的结论， $u^*(t)$ 可延拓到 I_2 上， $\cdots$, 继续作下去，则 $u^*(t)$ 可延拓到 I_N 上.

所以，初值问题 (2) 在 $[t_0,t_0+h]$ 上至少有一个解. 由延拓定理，这个解可延拓成一个饱和解.

(3) 设 $u(t)$ 是 IVP(2) 的一个饱和解， $[t_0,T)$ 是其最大存在区间. 若 $T<+\infty$, 下证 $\lim\limits_{t\to T^-}u(t)$ 存在.

显然， $\|u(t)\|$ 在 $[t_0,T)$ 的任一有界子区间上绝对连续.

因为

$$\frac{\|u(t+\Delta t)\|-\|u(t)\|}{\Delta t}\le\Big\|\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}\Big\|.$$

令 $\Delta t\to 0^+$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|\le\|u'(t)\|,\qquad \text{a.e.}\ \ t\in[t_0,T).$$

由于 $u(t)$ 在 $[t_0,T)$ 上满足微分方程 (2), 由条件 (H2) 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|\le\|u'(t)\|=\|f(t,u(t))\|\le h(\|u(t)\|)<1+h(\|u(t)\|),\qquad \text{a.e.}\ \ t\in[t_0,T),$$

所以

$$\frac{\|u(t)\|'}{1+h(\|u(t)\|)}<1. \tag{5}$$

从 t_0 到 t 积分 (5) 式，得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\|u(\tau)\|'}{1+h(\|u(\tau)\|)}\,\mathrm{d}\tau<t-t_0,$$

所以

$$\int_{\|\overline{x}\|}^{\|u(t)\|}\frac{\mathrm{d}r}{1+h(r)}<t-t_0<T-t_0<+\infty,$$

结合条件 (H2) 知， $u(t)$ 在 $[t_0,T)$ 上有界.

所以，存在 $R>0$, 使得

$$\|u(t)\|\le R,\qquad \forall\, t\in[t_0,T).$$

令 $M_0=\max\limits_{0\le r\le R}h(r)$, 对 $\forall\, t_1,t_2\in[t_0,T)$, $t_1<t_2$, 有

$$\|u(t_2)-u(t_1)\|\le\int_{t_1}^{t_2}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s\le\int_{t_1}^{t_2}h(\|u(t)\|)\mathrm{d}t\le M_0(t_2-t_1),$$

所以， $\lim\limits_{t\to T^-}u(t)$ 存在. 由延拓定理， $u(t)$ 可延拓为更大区间，这与 $[t_0,T)$ 为其最大存在区间矛盾. 所以 $T=+\infty$.

因此初值问题 (2) 的任一饱和解均在 $[t_0,+\infty)$ 上存在. 定理证毕.

3　一阶脉冲微分方程初值问题的解

定理 2 设 $f:J\times E\to E$ 连续， $I_k:E\to E$ $(k=1,2,\cdots)$. 若 f 满足条件 (H1) 与 (H2), 则 IVP(1) 至少存在一个解 $u(t)\in PC(J,E)\cap C^1(J',E)$.

证　当 $t\in J_0=[0,t_1]$ 时，由定理 1, 初值问题

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t)), & t\in J_0,\\ u(0)=x_0\end{cases}$$

在 $[0,t_1]$ 上有一个解，记作 $u_0(t)$.

同理，初值问题

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t)), & t\in J_1,\\ u(t_1^+)=u_0(t_1)+I_1(u_0(t_1))\end{cases}$$

在 $(t_1,t_2]$ 上有一个解 $u_1(t)$.

继续作下去，一般地，初值问题

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t)), & t\in J_k,\\ u(t_k^+)=u_{k-1}(t_k)+I_k(u_{k-1}(t_k)), & k=2,3,\cdots\end{cases}$$

在 $(t_k,t_{k+1}]$ 上有一个解 $u_k(t)$ $(k=2,3,\cdots)$.

作

$$
u(t)=\begin{cases}
u_0(t), & t\in[0,t_1],\\
u_1(t), & t\in(t_1,t_2],\\
\vdots & \\
u_k(t), & t\in(t_k,t_{k+1}],\quad k=2,3,\cdots,\\
\vdots &
\end{cases}
$$

易见 $u(t)\in PC(J,E)\cap C^1(J',E)$ 且满足 IVP(1), 所以 $u(t)$ 是 IVP(1) 的一个解. 定理证毕.

4 二阶脉冲微分方程初值问题的解

下面考虑 Banach 空间 E 中的二阶脉冲微分方程初值问题

$$
\begin{cases}
u''(t)=f(t,u(t),u'(t)), & t\in J,\quad t\neq t_k,\\
\Delta u|_{t=t_k}=I_k(u(t_k),u'(t_k)), & \\
\Delta u'|_{t=t_k}=\overline{I}_k(u(t_k),u'(t_k)), & k=1,2,\cdots,\\
u(0)=x_0, \qquad u'(0)=x_1 &
\end{cases}
\tag{6}
$$

解的存在性.

这里 $J=[0,+\infty)$, $f\in C(J\times E\times E,E)$, $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$, $t_k\to\infty$ $(k\to\infty)$, $I_k,\overline{I}_k:E\to E$ $(k=1,2,\cdots)$, $x_0,x_1\in E$, $\Delta u'|_{t=t_k}$ 与前面定义的一致，表示 $u'(t)$ 在 $t=t_k$ 处的跃度. 令 $PC^1(J,E)=\{u:J\to E$ 在 $t\neq t_k$ 处连续可微，在 $t=t_k$ 处左连续，且 $u(t_k{}^+),u'(t_k{}^-),u'(t_k{}^+)$ 均存在， $k=1,2,\cdots\}$.

令

$$
v(t)=u'(t),\qquad U(t)=\begin{bmatrix}u(t)\\ v(t)\end{bmatrix},\qquad F(t,U(t))=\begin{bmatrix}v(t)\\ f(t,u(t),v(t))\end{bmatrix},
$$
$$
I_k'=\begin{bmatrix}I_k\\ \overline{I_k}\end{bmatrix},\qquad U_0=\begin{bmatrix}x_0\\ x_1\end{bmatrix},
$$

则二阶脉冲微分方程初值问题 (6) 化为 $E\times E$ 中的一阶脉冲初值问题

$$
\begin{cases}
U'(t)=F(t,U(t)), & t\in J,\quad t\neq t_k,\\
\Delta U|_{t=t_k}=I_k'(U(t_k)), & k=1,2,\cdots\\
U(0)=U_0 &
\end{cases}
\tag{7}
$$

由定理 2 可得出下面定理:

定理 3 设 $f:J\times E\times E\to E$ 连续， $I_k,\bar{I}_k:E\to E$ $(k=1,2,\cdots)$. 若 f 满足下列条件:

$(H1)'$ 存在常数 $L_1>0,\ L_2>0$, 对任意有界集 $U,V\subset E,\ t\in J$, 有

$$\alpha(f(t,U,V))\le L_1\alpha(U)+L_2\alpha(V).$$

$(H2)'$ 存在 $h\in C(R^+,R^+)$, 使得 $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}r}{1+h(r)}=+\infty$, 对 $\forall t\in J,\ x\in E$, 有

$$\|f(t,x,x')\|\le h(\|x\|+\|x'\|),$$

则 IVP(6) 至少存在一个解 $u(t)\in PC^1(J,E)\cap C^2(J',E)$.

注 对于非脉冲一阶微分方程初值问题 (2), 定理 1 的结果也是新结果.

参 考 文 献

[1] Erbe L H, Liu X. Quasi-solutions of Nonlinear Impulsive Differential Equations in Abstract Cones. *Appl. Anal.*, 1989, 34: 231–250

[2] 谢胜利，杨志林. Banach 空间非线性脉冲 Volterra 型积分方程和积分 - 微分方程的可解性. 数学学报, 2003, 46(3): 445–452

(Xie Shengli, Yang Zhilin. Solvability of Nonlinear Impulsive Volterra Integral Equations and Integro-Differential Equations in Banach Spaces. *Acta Mathematica Sinica*, 2003, 46(3): 445–452)

[3] 路慧芹，刘立山. Banach 空间非线性脉冲 Volterra 型积分方程整体解的存在性定理及应用. 数学物理学报, 2000, 20(1): 35–48

(Lu Huiqin, Liu Lishan. Existence Theorems of Solutions for Nonlinear Impulsive Volterra Integral in Banach Spaces and Applications. *Acta Mathematica Scientia*, 2000, 20(1): 35–48)

[4] Liu Lishan, Wu Congxin, Fei Guo. A Unique Solution of Initial Value Problems for First-order Impulsive Integro-differential Equations of Mixed Type in Banach Spaces. *J. Math. Anal.*, 2002, 275: 368–385

[5] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性. 数学学报, 2005, 48(6): 1089–1094

(Li Yongxiang. Existence of Solutions of Initial Value Problems for Abstract Semilinear Evolution Equations. *Acta Mathematica Sinica*, 2005, 48(6): 1089–1094)

[6] 郭大均，孙经先. 抽象空间常微分方程. 济南：山东科学技术出版社， 1989

(Guo Dajun, Sun Jingxian. The Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1989)

[7] Heinz H R. On the Behaviour of Measure of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-valued Functions. *Nonlinear Anal.*, 1983, 7: 1351–1371

[8] 于立新，刘立山. Banach 空间中一阶非线性脉冲积分 - 微分方程初值问题解的存在性. 系统科学与数学, 2003(4), 23(2): 257–265

(Yu Lixin, Liu Lishan. The Existence of Solutions of Initial Value Problems for First Order Nonlinear Implusive Integro-Differential Equation in Banach Space. *Journal of System Science and Mathematical Science*, 2003, 23(2): 257–265)

[9] Guo Dajun, Liu Xinzhi. Extremal Solutions of Nonlinear Impulsive Integro-differential Equations in Banach Space. *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, 177(2): 538–552

Existence of Solutions for the Initial Value Problems of the Impulsive Differential Equations in Banach Space

QIN Lijuan

(*College of Science, Gansu Agriculture University, Lanzhou* 730070)

(*E-mail: qinlj@gsau.edu.cn*)

Abstract Based on the fixed point theorem of condensing mapping, the impulsive functions not using compacting and extra conditions, the author obtains the existence results of initial value problems for impulsive equations by the method of extending interval on infinite interval and essentially improves the results.

Key words Banach spaces; initial value problems; measure of noncompactness; existence of solution

MR(2000) Subject Classification 34K45; 45J05

Chinese Library Classification O175.15