一类具有交叉扩散的捕食模型非常数正解的存在性 *

李艳玲　　李景荣
(陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

郭改慧
(陕西科技大学理学院，西安 710021)
(E-mail: guogaihui@sust.edu.cn)

摘　要　研究了一类具有扩散和交叉扩散项的 Holling-Tanner 捕食 - 食饵模型．首先利用最大值原理和 Harnack 不等式给出正解的先验估计，进一步利用度理论得到非常数正解的存在性与不存在性，从而给出非常数正解存在的充分条件．

关键词　交叉扩散；捕食 - 食饵；度理论
MR(2000) 主题分类　35K57
中图分类　O175.26

1　引言

捕食模型作为一类重要的生物模型，已被国内外学者广泛研究，且已取得许多有意义的成果，见 [1–10]．为更好地研究螨、蜘蛛等生物之间的相互影响， [1] 在 Neumann 边界条件下，利用不等式性质及 Leray-Schauder 度理论，给出一类具有 Holling-Tanner 反应项的捕食 - 食饵模型

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = au - u^2 - \dfrac{uv}{m+u}, & x \in \Omega, \\ -d_2\Delta v = bv - \dfrac{v^2}{\gamma u}, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

非常数正解的存在性和不存在性．这里， u, v 分别表示食饵和捕食者的密度， Ω 是 $\mathbf{R}^N (N \geq 1)$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域， ∂_ν 表示单位外法向量的方向导数．参数

本文 2010 年 12 月 3 日收到．2012 年 7 月 4 日收到修改稿．
* 国家自然科学基金 (11271236) 和陕西省教育厅科研计划 (12JK0856) 资助项目．

d_i $(i=1,2)$ 分别表示种群 u,v 的扩散系数， a,b 是 u,v 的固有增长率， γ 表示捕食者依赖被捕食者的程度， m 是被捕食者的饱和系数. 上述参数均取正值. 关于带自由扩散项的捕食模型的讨论，有兴趣的读者可参见 [2–5] 及其参考文献.

本文在 [1] 的基础上研究具有交叉扩散项的捕食模型

$$\begin{cases} -d_1\Delta[(1+d_3v)u] = au-u^2-\dfrac{uv}{m+u}, & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta[(1+d_4u)v] = bv-\dfrac{v^2}{\gamma u}, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu u=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， $d_3,d_4>0$, $-d_1\Delta[(1+d_3v)u]=-\mathrm{div}\{\nabla(d_1u+d_1d_3uv)\}$, $-d_2\Delta[(1+d_4u)v]=-\mathrm{div}\{\nabla(d_2v+d_2d_4uv)\}$, 而 $J_u=-\nabla(d_1u+d_1d_3uv)=-d_1d_3u\nabla v-(d_1+d_1d_3v)\nabla u$ 和 $J_v=-\nabla(d_2v+d_2d_4uv)=-d_2d_4v\nabla u-(d_2+d_2d_4u)\nabla v$ 分别是 u 和 v 沿 x 方向的扩散流量. 当 $d_3>0$ 时， $-d_1d_3u\nabla v$ 表示被捕食者 u 逃避捕食者，即被捕食者向着捕食者密度小的方向迁移. 当 $d_4>0$ 时， $-d_2d_4v\nabla u$ 表示被捕食者聚集起来形成一个团结互助，共同抵御外敌的群体. 在现实生态环境中，这样的捕食与自我防御行为是经常发生的.

由于种群间的相互影响在种群扩散中起着非常重要的作用，因此带交叉扩散项的捕食模型备受关注，见 [6–10]. 事实上， [6] 已在 (1.1) 中引入交叉扩散项，讨论了当 $d_3=0$, $d_4>0$ 时 (1.2) 非常数正解的存在性与不存性. 在本文的讨论中，我们假设 d_3,d_4 均大于 0, 即关于 u,v 的方程均带有交叉扩散项. 实践证明，本文所处理的情况较 [6] 更加复杂. [6–8] 中的边界条件均为齐次 Neumann 边界条件，它表示系统是自我封闭的，即捕食者和被捕食者在边界上的进出流量为零. [7] 讨论了强耦合的捕食模型非常数正解的存在性和不存在性，其交叉扩散项同模型 (1.2), 但反应项是典型的 Lotka-Volterra 反应函数，而本文所讨论的 Holling-Tanner 型捕食模型无论从实际上还是从理论上都更具生物意义. [8] 讨论了三种群的交叉扩散捕食模型，证明了交叉扩散能够导致系统产生空间斑图. [9,10] 则在 Dirichlet 边界条件下讨论了两类交叉扩散项的捕食模型. [9] 讨论了带 Lotka-Volterra 反应项的捕食模型，其交叉扩散项同模型 (1.2), 利用分歧理论和 Lyapunov-Schmidt 约化方法给出正解的多重性. [10] 讨论了带非线性扩散项的捕食模型，细致分析了非线性扩散系数对模型分歧结构的影响.

本文主要考虑 (1.2) 的正解, 即 $u,v>0$ $(x\in\overline{\Omega})$. 我们首先利用极大值原理及 Harnack 不等式给出 (1.2) 正解的先验估计, 然后利用 ε-Young 不等式及 Poincaré 不等式给出 (1.2) 非常数正解的不存在性，最后借助于 Leray-Schauder 度理论，通过对正解的局部性分析给出 (1.2) 非常数正解的存在性. 显然 (1.2) 有唯一正常数解 $(u,v)=(u^*,v^*)$, 其中

$$u^*=\frac{1}{2}\big[a-m-b\gamma+\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}\,\big],\qquad v^*=b\gamma u^*. \tag{1.4}$$

2　解的先验估计

引理 2.1[11] (最大值原理)　设 $g\in C(\overline{\Omega}\times R)$,

(i) 若 $\omega\in C^2(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega})$, 满足 $\Delta\omega+g(x,\omega(x))\ge 0,\ x\in\Omega$ 且 $\partial_\nu\omega\le 0,\ x\in\partial\Omega$, 如果 $\omega(x_0)=\max\limits_{\overline{\Omega}}\omega$, 那么， $g(x_0,\omega(x_0))\ge 0$.

(ii) 若 $\omega\in C^2(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega})$, 满足 $\Delta\omega+g(x,\omega(x))\le 0,\ x\in\Omega$ 且 $\partial_\nu\ \omega\ge 0, x\in\partial\Omega$, 如果 $\omega(x_0)=\min\limits_{\overline{\Omega}}\omega$, 那么， $g(x_0,\omega(x_0))\le 0$.

引理 2.2[12] (Harnack 不等式) 若 $c(x)\in C(\overline{\Omega})$, 令 $\omega\in C^2(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是 $\Delta\omega+c(x)\omega=0,\ x\in\Omega,\ \partial_\nu\omega=0,\ x\in\partial\Omega$ 的正解,那么存在常数 $C=C\big(\|c\|_\infty,\Omega\big)$, 使得 $\max\limits_{\overline{\Omega}}\omega\le C\min\limits_{\overline{\Omega}}\omega$.

为了方便，用 Λ 代表参数 a,b,m,γ, 以后提到的常数 $C,\underline{C},\overline{C}$ 等都与区域 Ω 和参数 Λ 有关，与 d 无关，其中 $d=(d_1,d_2,d_3,d_4)$.

定理 2.1 设 D_1,D_2,D_3,D_4 是任意正常数,存在正常数 $\underline{C}(\Lambda,D_1,D_2,D_3,D_4)$, $\overline{C}(\Lambda,D_1,D_2,D_3,D_4)$ 使得当 $d_1\ge D_1,\ d_2\ge D_2,\ d_3\le D_3,\ d_4\le D_4$ 时， (1.2) 的解 (u,v) 满足

$$\underline{C}(\Lambda,D_1,D_2,D_3,D_4)<u(x),v(x)<\overline{C}(\Lambda,D_1,D_2,D_3,D_4). \tag{2.1}$$

证 首先证明存在 $C=C(\Lambda,D_1,D_2,D_3,D_4)$ 使得

$$\max_{\overline{\Omega}}u\le C\min_{\overline{\Omega}}u,\qquad \max_{\overline{\Omega}}v\le C\min_{\overline{\Omega}}v. \tag{2.2}$$

令 $\omega=(1+d_3v)u,\ \chi=(1+d_4u)v$, 那么 (1.2) 化为

$$\begin{cases}-d_1\Delta\omega=au-u^2-\dfrac{uv}{m+u}, & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta\chi=bv-\dfrac{v^2}{\gamma u}, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu\omega=\partial_\nu\chi=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{2.3}$$

令 $x_0\in\overline{\Omega}$, 且 $\omega(x_0)=\max\limits_{\overline{\Omega}}\omega(x)$, 则由引理 2.1 和 (2.3) 的第一个方程知， $u(x_0)\le a,\ v(x_0)\le a(a+m)$. 结合 $d_3\le D_3$ 可得

$$\max_{\overline{\Omega}}u\le\max_{\overline{\Omega}}\omega=[1+d_3v(x_0)]u(x_0)\le[1+D_3a(m+a)]a=C_1. \tag{2.4}$$

类似地，令 $x_1\in\overline{\Omega}$, 且 $\chi(x_1)=\max\limits_{\overline{\Omega}}\chi(x)$, 则由引理 2.1 和 (2.3) 的第二个方程得

$$v(x_1)\le b\gamma u(x_1)\le b\gamma C_1.$$

结合 $d_4\le D_4$ 可得

$$\max_{\overline{\Omega}}v\le\max_{\overline{\Omega}}\chi=[1+d_4u(x_1)]v(x_1)\le b\gamma C_1(1+D_4C_1)=C_2. \tag{2.5}$$

另一方面， (1.2) 也可化为下列形式

$$\begin{cases}-\Delta\omega=\dfrac{(a-u)(m+u)-v}{d_1(1+d_3v)(m+u)}\omega, & x\in\Omega,\\ -\Delta\chi=\dfrac{b\gamma u-v}{d_2\gamma u(1+d_4u)}\chi, & x\in\Omega,\\ \partial_\nu\omega=\partial_\nu\chi=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{2.6}$$

由于 $\| u \|_\infty \le C_1, \| v \|_\infty \le C_2$, 结合 (2.4) 和 (2.5) 得，当 $d_1 \ge D_1$ 时，有

$$\Big\|\frac{(a-u)(m+u)-v}{d_1(1+d_3v)(m+u)}\Big\|_\infty \le \frac{(a+C_1)(m+C_1)+C_2}{D_1 m}.$$

那么对问题 (2.6) 的第一个方程由引理 2.2 得, 存在不依赖于 d 的正常数 C_1^* 使得 $\max\limits_{\overline{\Omega}} \omega \le C_1^* \min\limits_{\overline{\Omega}} \omega$, 从而有

$$\frac{\max\limits_{\overline{\Omega}} u}{\min\limits_{\overline{\Omega}} u} \le \frac{\max\limits_{\overline{\Omega}} \omega}{\min\limits_{\overline{\Omega}} \omega} \max(1+d_3v) \le C_1^*(1+D_3C_2) \le \overline{C_1}. \tag{2.7}$$

类似可得，当 $d_2 \ge D_2$ 时，有

$$\| \frac{b\gamma u - v}{d_2\gamma u(1+d_4u)} \|_\infty \le \| \frac{b+\dfrac{v}{\gamma u}}{d_2} \|_\infty \le \frac{b+b\overline{C}(1+D_4C_1)}{D_2}.$$

那么对问题 (2.6) 的第二个方程由引理 2.2 得, 存在不依赖于 d 的正常数 C_2^* 使得 $\max\limits_{\overline{\Omega}} \chi \le C_2^* \min\limits_{\overline{\Omega}} \chi$, 从而有

$$\frac{\max\limits_{\overline{\Omega}} v}{\min\limits_{\overline{\Omega}} v} \le \frac{\max\limits_{\overline{\Omega}} \chi}{\min\limits_{\overline{\Omega}} \chi} \max\,(1+d_4u) \le C_2^*(1+D_4C_1) \le \overline{C_2}. \tag{2.8}$$

取 $C(\Lambda, D_1, D_2, D_3, D_4) = \max\{\overline{C_1}, \overline{C_2}\}$, 则由 (2.7)(2.8) 知 (2.2) 成立.

取 $\overline{C}(\Lambda, D_1, D_2, D_3, D_4) = \max\{C_1, C_2\}$, 则 (2.1) 式右边成立．下证 (2.1) 式左边成立.

假设 (2.1) 式左边不成立，那么存在参数列 $(d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}, d_{4i}) = (d_1, d_2, d_3, d_4)$, $d_{1i} \ge D_1$, $d_{2i} \ge D_2$, $d_{3i} \le D_3$, $d_{4i} \le D_4$ 使得问题 (1.2) 对应的正解列 $\{(u_i, v_i)\}$ 满足

$$\min_{\overline{\Omega}} u_i \to 0 \text{ 或 } \min_{\overline{\Omega}} v_i \to 0, \qquad i \to \infty \tag{2.9}$$

且

$$\begin{cases} -d_{1i}\Delta[(1+d_{3i}v_i)u_i] = au_i - u_i^2 - \dfrac{u_iv_i}{m+u_i}, & x \in \Omega, \\ -d_{2i}\Delta[(1+d_{4i}u_i)v_i] = bv_i - \dfrac{v_i^2}{\gamma u_i}, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u_i = \partial_\nu v_i = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

对 (2.10) 式分别在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega u_i\Big(a-u_i-\frac{v_i}{m+u_i}\Big)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_\Omega v_i\Big(b-\frac{v_i}{\gamma u_i}\Big)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{2.11}$$

于是存在 $x_j \in \overline{\Omega}$, 对任意 $i \ge 1$, 使得 $b = \frac{v_i(x_j)}{\gamma u_i(x_j)}$, 即 $v_i(x_j) = b\gamma u_i(x_j)$. 因此，当 $i \to \infty$

时，由 (2.9), (2.11) 知存在 y_j 满足

$$a=u_i(y_j)+\frac{v_i(y_j)}{m+u_i(y_j)}\to 0,$$

矛盾．因此存在正常数 C_3, C_4, 使得 $\min\limits_{\overline{\Omega}} u\ge C_3,\ \min\limits_{\overline{\Omega}} v\ge C_4$. 取 $\underline{C}(\Lambda, D_1, D_2, D_3, D_4)=\min\{C_3, C_4\}$, 则 (2.1) 式左边成立．综上所述定理 2.1 成立．

3 解的局部性分析

这部分主要讨论 (1.2) 在 (u^*, v^*) 处的线性化算子．设 $0=\mu_0<\mu_1<\cdots$ 是 $-\Delta$ 在齐次 Neumann 边界条件下的特征值， $\mathbf{E}(\mu_i)$ 是 μ_i 在 $C^1(\overline{\Omega})$ 中对应的特征向量空间，ϕ_{ij} $(j=1,2,\cdots,\dim\mathbf{E}(\mu_i))$ 是 $\mathbf{E}(\mu_i)$ 的正交基， $\mathbf{X}_{ij}=\{\mathbf{c}\phi_{ij}|\mathbf{c}\in\mathbf{R}^2\}$, $\mathbf{X}=\{(u,v)\in[C^1(\overline{\Omega})]^2:\partial_\nu u|_{x\in\partial\Omega}=\partial_\nu v|_{x\in\partial\Omega}=0\}$, 则 $\mathbf{X}=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_i=\bigoplus_{j=1}^{\dim\mathbf{E}(\mu_i)}\mathbf{X}_{ij}$. 定义

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}^+=\big\{(u,v)^T\in\mathbf{X}|u>0,\ v>0,\ x\in\overline{\Omega}\big\},\\
&\mathbf{B}(C)=\big\{(u,v)^T\in\mathbf{X}|\underline{C}<u,v<\overline{C},\ x\in\overline{\Omega}\big\},\\
&\mathbf{\Phi}(u,v)=(d_1(1+d_3v)u, d_2(1+d_4u)v)^T,\\
&\mathbf{G}(u,v)=\Big(au-u^2-\frac{uv}{m+u}, bv-\frac{v^2}{\gamma u}\Big)^T,
\end{aligned}$$

则 (1.2) 可变为

$$\begin{cases}-\Delta\mathbf{\Phi}(u,v)=\mathbf{G}(u,v), & x\in\Omega,\\ \partial_\nu u=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{3.1}$$

因为

$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}(u,v)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}d_1(1+d_3v) & d_1d_3u\\ d_2d_4v & d_2(1+d_4u)\end{pmatrix},\qquad \det\Big(\frac{\partial\mathbf{\Phi}(u,v)}{\partial(u,v)}\Big)>0,$$

所以 $\big(\frac{\partial\mathbf{\Phi}(u,v)}{\partial(u,v)}\big)^{-1}$ 存在．设 $\mathbf{w}=(u,v)^T$, 则 $\mathbf{w}$ 为 (1.2) 正解的充分必要条件是 $\mathbf{w}\in\mathbf{X}^+$, 且 $\mathbf{w}$ 为下列问题的正解

$$\mathbf{F}(\mathbf{w})=\mathbf{w}-(\mathbf{I}-\Delta)^{-1}\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w})]^{-1}[\mathbf{G}(\mathbf{w})+\nabla\mathbf{w}\Phi_{\mathbf{ww}}(\mathbf{w})\nabla\mathbf{w}]+\mathbf{w}\}=0,\tag{3.2}$$

其中 $(\mathbf{I}-\Delta)^{-1}$ 是 $\mathbf{I}-\Delta$ 在 $\mathbf{X}$ 上的逆．由于 $\mathbf{F}(\cdot)$ 是恒等算子 $\mathbf{I}$ 的紧扰动，那么对于 $\mathbf{B}=\mathbf{B}(C)$, 若在 $\partial\mathbf{B}$ 上 $\mathbf{F}(\mathbf{w})\neq 0$, 则 $\deg(\mathbf{F}(\cdot), 0, \mathbf{B})$ 可以定义．

令 $\mathbf{w}^*=(u^*, v^*)^T$ 如 (1.4) 定义，则

$$D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)=\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\Delta)^{-1}\big\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]^{-\mathbf{1}}\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)+\mathbf{I}\big\}.\tag{3.3}$$

如果 $D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)$ 可逆，那么 $\mathbf{F}$ 在点 $\mathbf{w}^*$ 的指数定义为 $\operatorname{index}(\mathbf{F}(\cdot), \mathbf{w}^*)=(-1)^r$, 其中 r 是 $D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)$ 的负特征值的代数重数．由于 $\mathbf{X}_{ij}$ 在 $D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)$ 的作用下是不变的，则 μ 是

$D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)$ 在 $\mathbf{X}_{ij}$ 上的特征值的充分必要条件是 μ 为下列矩阵的特征值

$$\mathbf{I}-\frac{1}{1+\mu_i}\big\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]+\mathbf{I}\big\}=\frac{1}{1+\mu_i}\big\{\mu_i\mathbf{I}-[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]^{-1}\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)\big\}. \tag{3.4}$$

因此， $D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)$ 可逆当且仅当矩阵 $\mathbf{I}-\frac{1}{1+\mu_i}\big\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]+\mathbf{I}\big\}$ 非奇异．记

$$H(\mu)=\det\big\{\mu\mathbf{I}-\big[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)\big]^{-1}\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)\big\}. \tag{3.5}$$

如果 $H(\mu_i)\neq 0$, 那么 $D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)$ 在 $\mathbf{X}_{ij}$ 上的负特征值的代数重数是奇数的充分必要条件是 $H(\mu_i)<0$. 于是有下列引理成立.

引理 3.1　如果对于所有的 $i\geq 0$, 矩阵 $\mu_i\mathbf{I}-[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]^{-1}\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)$ 非奇异，那么 $\operatorname{index}(\mathbf{F}(\cdot),\mathbf{w}^*)=(-1)^r$, 其中 $r=\sum\limits_{\mu_i\geq 0,\ H(\mu_i)<0}\dim\mathbf{E}(\mu_i)$.

为计算 $\operatorname{index}(\mathbf{F}(\cdot),\mathbf{w}^*)$, 下面将仔细考虑 $H(\mu_i)$ 的符号．注意到

$$H(\mu)=\det\big\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]^{-1}\big\}\det\big\{\mu\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)-\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)\big\}, \tag{3.6}$$

由于 $\det\big\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)]^{-1}\big\}>0$, 因此只需考虑 $\det\big\{\mu\Phi_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)-\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)\big\}$ 的符号.

下面将通过分析 $H(\mu)=0$ 的两个根确定 $H(\mu_i)$ 的符号．经计算得

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)=\begin{pmatrix} d_1(1+d_3v^*) & d_1d_3u^* \\ d_2d_4v^* & d_2(1+d_4u^*)\end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)=\begin{pmatrix} a-2u^*-\dfrac{mv^*}{(m+u^*)^2} & -\dfrac{u^*}{m+u^*} \\ b^2\gamma & -b\end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

不妨设 $\det\big\{\mu\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)-\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)\big\}=A\mu^2+B\mu+C$, 其中

$$\begin{aligned} A=&d_1d_2(1+d_3v^*+d_4u^*)>0, \qquad C=\frac{bu^*}{m+u^*}\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}>0,\\ B=&bd_1+2d_1d_3b^2\gamma u^*-\frac{d_2u^*}{m+u^*}\big[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}\\ &+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})\big], \end{aligned} \tag{3.9}$$

当 $B^2-4AC>0$ 时，记 $\det\{\mu\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)-\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)\}=0$ 的两个根分别为 $\mu_1(d)$ 和 $\mu_2(d)$, 且 $\mu_1(d)<\mu_2(d)$. 注意到当 $B>0$ 时，对应的 $\mu_1(d)$ 和 $\mu_2(d)$ 为负根．因此，如果 $\mu_1(d)$ 和 $\mu_2(d)$ 为非负且不相等，那么要求 $B^2-4AC>0$, $B<0$.

引理 3.2　设 $B^2-4AC>0$, $B<0$. 那么

(i) 固定 d_2,d_3,d_4, 则 $\lim\limits_{d_1\to 0^+}\mu_2(d)=+\infty$, 且当 d_2 或 d_4 充分大时， $\lim\limits_{d_1\to 0^+}\mu_1(d)<\mu_1$.

(ii) 固定 d_1,d_3,d_4, 则存在正常数 $D_2(d_1,d_3,d_4)$, 使得当 $d_2>D_2$ 时， $0<\mu_1(d)<\mu_1$.

(iii) 固定 d_1,d_2,d_3 固定，则存在正常数 $D_4(d_1,d_2,d_3)$, 使得当 $d_4>D_4$ 时， $0<\mu_1(d)<\mu_1$.

证　(i) 当 $d_1<\frac{d_2u^*[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]}{b(1+2d_3b\gamma u^*)(m+u^*)}$ 时， $B<0$, 对应的 $\mu_1(d)$ 和 $\mu_2(d)$ 为正根，令 $A_1=d_2(1+d_3v^*+d_4u^*)$, $B_1=b(1+2d_3b^2\gamma u^*)$, $B_2=$

$\frac{d_2u^*}{m+u^*}[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]$, 则 $B=d_1B_1-B_2$,

$$\begin{aligned}\mu_1(d)&=\frac{2C}{B_2-B_1d_1+\sqrt{(B_2-B_1d_1)^2-4d_1A_1C}},\\ \mu_2(d)&=\frac{B_2-B_1d_1+\sqrt{(B_2-B_1d_1)^2-4d_1A_1C}}{2d_1A_1}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

又由于 $B_2-B_1d_1>0$, 则对固定的 $d_2>0,\ d_3\geq 0,\ d_4>0$, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{d_1\to 0^+}\mu_1(d)=\frac{C}{B_2}\\ =&\frac{b\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}}{d_2[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]},\\ &\lim_{d_1\to 0^+}\mu_2(d)\geq\lim_{d_1\to 0^+}\frac{B_2}{2d_1A_1}-\frac{B_1}{2A_1}=+\infty,\end{aligned}\tag{3.11}$$

因此，当 d_2 或 d_4 有一个充分大时，有 $\lim\limits_{d_1\to 0^+}\mu_1(d)<\mu_1$.

(ii) 当 $d_2>\frac{(bd_1+2d_1d_3b^2\gamma u^*)(m+u^*)}{u^*[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]}$ 时 $B<0$, 对应的 $\mu_1(d)$ 和 $\mu_2(d)$ 为正根， $A,B,$ 和 C 分别除以 d_2 得

$$\begin{aligned}&\lim_{d_2\to\infty}\frac{A}{d_2}=d_1(1+d_3v^*+d_4u^*),\qquad\lim_{d_2\to\infty}\frac{C}{d_2}=0,\\ &\lim_{d_2\to\infty}\frac{B}{d_2}\\ =&-\frac{u^*[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]}{m+u^*},\end{aligned}\tag{3.12}$$

于是

$$\lim_{d_2\to\infty}\mu_1(d)=0,\tag{3.13}$$
$$\lim_{d_2\to\infty}\mu_2(d)=\frac{u^*[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]}{d_1(1+d_3v^*+d_4u^*)(m+u^*)},$$

因此，存在正数 $D_2(d_1,d_3,d_4)$, 使得当 $d_2>D_2(d_1,d_3,d_4)$ 时，有 $0<\mu_1(d)<\mu_1$.

(iii) 当 $d_4>\frac{[(bd_1+2d_1d_3b^2\gamma u^*)(m+u^*)-d_2u^*(b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})}{d_2(u^*)^2(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})}$ 时 $B<0$, 对应的 $\mu_1(d)$ 和 $\mu_2(d)$ 为正根， $A,B,$ 和 C 分别除以 d_4 得

$$\begin{aligned}&\lim_{d_4\to\infty}\frac{A}{d_4}=d_1d_2u^*,\qquad\lim_{d_4\to\infty}\frac{C}{d_4}=0,\\ &\lim_{d_4\to\infty}\frac{B}{d_4}=-\frac{d_2(u^*)^2}{m+u^*}(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}).\end{aligned}\tag{3.14}$$

于是

$$\lim_{d_4\to\infty}\mu_1(d)=0,\qquad\lim_{d_4\to\infty}\mu_2(d)=\frac{u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})}{d_1(m+u^*)},\tag{3.15}$$

因此，存在正数 $D_4(d_1,d_2,d_3)$, 使得当 $d_4>D_4(d_1,d_2,d_3)$ 时，有 $0<\mu_1(d)<\mu_1$.

另外，考虑 d_3, 对固定的 d_1,d_2,d_4, 如果 $B<0$, 那么要求

$$d_3 < \frac{d_2u^*[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]-bd_1(m+u^*)}{2\gamma d_1b^2u^*(m+u^*)}.$$

综合引理 3.1 和引理 3.2 可得下面引理:

引理 3.3 对于给定的 μ_i, $i\geq 0$, 如果 $\mu_1(d)<\mu_i<\mu_2(d)$, 那么 $H(\mu_i)<0$. 而当 $\mu_i<\mu_1(d)$ 或 $\mu_i>\mu_2(d)$ 时， $H(\mu_i)>0$.

4 非常数正解的不存在性

下面讨论 (1.2) 非常数正解的不存在性. 令 $\overline{v}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v\,\mathrm{d}x$, $\overline{u}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,\mathrm{d}x$, μ_1 是算子 $-\Delta$ 在齐次 Neumann 边界条件下的第二特征值.

定理 4.1 设 ε,M,N 为任意正常数, 满足 $M>\frac{2(a+C(\varepsilon))}{\mu_1}$, $N>2(\frac{MD_3\overline{C}^2}{4\underline{C}}+\frac{b+\varepsilon}{\mu_1})$. 对任意正常数 D_1,D_2,D_3 和 D_4, 其中 $D_1<\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}$, $D_2<\frac{MD_3\overline{C}^2}{4\underline{C}}+\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}$, 存在依赖于 D_1,D_2,D_3 和 D_4 的正常数 $\widetilde{D_1},\widetilde{D_2},\widetilde{D_4}$, 满足 $D_1\leq\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}<\widetilde{D_1}<2\widetilde{D_1}<M$, $D_2\leq\frac{MD_3\overline{C}^2}{4\underline{C}}+\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}<\widetilde{D_2}<2\widetilde{D_2}<N$ 和 $\widetilde{D_4}<D_4$, 使得当 $\widetilde{D_1}<d_1<M$, $\widetilde{D_2}<d_2<N$, $d_3\leq D_3$, $d_4<\widetilde{D_4}$ 时, (1.2) 没有非常数正解.

证 假设存在序列 $\{(d_{1i},d_{2i},d_{3i},d_{4i})\}$ 满足 $D_1<\widetilde{D_1}<d_{1i}<M$, $D_2<\widetilde{D_2}<d_{2i}<N$, $d_{3i}\leq D_3$, $d_{4i}<\widetilde{D_4}<D_4$ 且 $d_{1i}\to d_1$, $d_{2i}\to d_2$, $d_{3i}\to d_3$, $d_{4i}\to 0$, 使得 (1.2) 存在非常数正解 $(u_i,v_i)\to(u,v)$. (1.2) 中关于 u_i,v_i 的方程两边同乘以 $(u_i-\overline{u}_i),(v_i-\overline{v}_i)$, 积分并相加得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\big\{d_{1i}|\nabla u_i|^2+d_{1i}d_{3i}v_i|\nabla u_i|^2+d_{1i}d_{3i}u_i\nabla u_i\nabla v_i+d_{2i}|\nabla v_i|^2\\&+d_{2i}d_{4i}u_i|\nabla v_i|^2+d_{2i}d_{4i}v_i\nabla u_i\nabla v_i\big\}\,\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega\Big\{\Big[a-(u_i+\overline{u}_i)-\frac{mv_i}{(m+u_i)(m+\overline{u}_i)}\Big](u_i-\overline{u}_i)^2\\&+\Big[\frac{\overline{v}_i^2}{\gamma u_i\overline{u}_i}-\frac{\overline{u}_i}{m+\overline{u}_i}\Big](u_i-\overline{u}_i)(v_i-\overline{v}_i)+\Big[b-\frac{v_i+\overline{v}_i}{\gamma u_i}\Big](v_i-\overline{v}_i)^2\Big\}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.1}$$

对 (4.1) 两边取极限，注意 $d_{4i}\to 0$, 得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\big(d_1|\nabla u|^2+d_1d_3v|\nabla u|^2+d_1d_3u\nabla u\nabla v+d_2|\nabla v|^2\big)\,\mathrm{d}x\\=&\int_\Omega\Big\{\Big[b-\frac{v+\overline{v}}{\gamma u}\Big](v-\overline{v})^2+\Big[\frac{\overline{v}^2}{\gamma u\overline{u}}-\frac{\overline{u}}{m+\overline{u}}\Big](u-\overline{u})(v-\overline{v})\\&+\Big[a-(u+\overline{u})-\frac{mv}{(m+u)(m+\overline{u})}\Big](u-\overline{u})^2\Big\}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.2}$$

由定理 2.1 及 ε-Young 不等式得

$$\int_\Omega (d_1|\nabla u|^2+d_2|\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \Big[(a+C(\varepsilon))(u-\overline{u})^2+(b+\varepsilon)(v-\overline{v})^2+\frac{d_1d_3u^2}{4v}|\nabla v|^2\Big]\,\mathrm{d}x, \quad (4.3)$$

这里 $C(\varepsilon)$ 是与 $\varepsilon,\underline{C},\overline{C}$ 有关的常数. 由定理 2.1, $d_1\le M,\ d_3\le D_3$ 及 Poincaré 不等式

$$\mu_1\int_\Omega (u-\overline{u})^2\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \mid \nabla(u-\overline{u})\mid^2\ \mathrm{d}x, \quad (4.4)$$

进一步可得

$$\int_\Omega (d_1|\nabla u|^2+d_2|\nabla v|^2)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \Big[\Big(\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}\Big)\mid\nabla u\mid^2+\Big(\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}+\frac{MD_3\overline{C}^2}{4\underline{C}}\Big)|\nabla v|^2\Big]\,\mathrm{d}x. \quad (4.5)$$

(4.5) 式显然与已知条件 $d_{1i}>\widetilde{D_1}>\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1},\ d_{2i}>\widetilde{D_2}>\big(\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}+\frac{MD_3\overline{C}^2}{4\underline{C}}\big)$ 矛盾. 因此，当 $\widetilde{D_1}<d_1<M,\ \widetilde{D_2}<d_2<N,\ d_3\le D_3,\ d_4<\widetilde{D_4}$ 时，(1.2) 没有非常数正解.

定理 4.2 设 ε,M,N 为任意正常数, 满足 $M>2\big(\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}+\frac{ND_4\overline{C}^2}{4\underline{C}}\big),\ N>\frac{2(b+\varepsilon)}{\mu_1}$. 对任意正常数 D_1,D_2,D_3 和 D_4, 其中 $D_1<\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}+\frac{ND_4\overline{C}^2}{4\underline{C}},\ D_2<\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}$, 存在依赖于 D_1,D_2,D_3 和 D_4 的正常数 $\widetilde{D_1},\widetilde{D_2},\widetilde{D_3}$, 满足 $D_1\le\frac{ND_4\overline{C}^2}{4\underline{C}}+\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}<\widetilde{D_1}<2\widetilde{D_1}<M,\ D_2\le\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}<\widetilde{D_2}<2\widetilde{D_2}<N$ 和 $\widetilde{D_3}<D_3$, 使得当 $\widetilde{D_1}<d_1<M,\ \widetilde{D_2}<d_2<N,\ d_3<\widetilde{D_3},\ d_4\le D_4$ 时，(1.2) 没有非常数正解.

证 假设存在序列 $\{(d_{1i},d_{2i},d_{3i},d_{4i})\}$ 满足 $D_1<\widetilde{D_1}<d_{1i}<M,\ D_2<\widetilde{D_2}<d_{2i}<N,\ d_{3i}<\widetilde{D_3}<D_3,\ d_{4i}\le D_4$, 且 $d_{1i}\to d_1,\ d_{2i}\to d_2,\ d_{3i}\to 0,\ d_{4i}\to d_4$, 使得 (1.2) 存在非常数正解 $(u_i,v_i)\to(u,v)$. (1.2) 中关于 u_i,v_i 的方程两边同乘以 $(u_i-\overline{u}_i),(v_i-\overline{v}_i)$, 积分并相加，两边取极限，注意 $d_{3i}\to 0$, 得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \big(d_1|\nabla u|^2+d_2|\nabla v|^2+d_2d_4u|\nabla v|^2+d_2d_4v\nabla u\nabla v\big)\,\mathrm{d}x\\ =&\int_\Omega\Big\{\Big[b-\frac{v+\overline{v}}{\gamma u}\Big](v-\overline{v})^2+\Big[\frac{\overline{v}^2}{\gamma u\overline{u}}-\frac{\overline{u}}{m+\overline{u}}\Big](u-\overline{u})(v-\overline{v})\\ &+\Big[a-(u+\overline{u})-\frac{mv}{(m+u)(m+\overline{u})}\Big](u-\overline{u})^2\Big\}\,\mathrm{d}x. \quad (4.6)\end{aligned}$$

类似于 (4.2)-(4.5) 的讨论并结合 (4.6) 得

$$\int_\Omega \big(d_1|\nabla u|^2+d_2|\nabla v|^2\big)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \Big[\Big(\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}+\frac{ND_4\overline{C}^2}{4\underline{C}}\Big)|\nabla u|^2+\Big(\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}\Big)|\nabla v|^2\Big]\,\mathrm{d}x. \quad (4.7)$$

(4.7) 式显然与已知条件 $d_{1i}>\widetilde{D_1}>(\frac{a+C(\varepsilon)}{\mu_1}+\frac{ND_4\overline{C}^2}{4\underline{C}}),\ d_{2i}>\widetilde{D_2}>\frac{b+\varepsilon}{\mu_1}$ 矛盾. 因此，当 $\widetilde{D_1}<d_1<M,\ \widetilde{D_2}<d_2<N,\ d_3<\widetilde{D_3},\ d_4\le D_4$ 时，问题 (1.2) 没有非常数正解.

定理 4.3 设 $d_3=d_4=0$. 对任意给定的正常数 D_1 和 D_2, 存在依赖于 D_1 和 D_2 的正常数 $\widetilde{D_1}$, 满足 $\widetilde{D_1}>D_1$, 使得当 $d_1>\widetilde{D_1},\ d_2\ge D_2$ 时，(1.2) 没有非常数正解.

证 假设存在序列 $\{(d_{1i},d_{2i})\}$ 满足 $d_{1i}\ge D_1,\ d_{2i}\ge D_2$, 且 $d_{1i}\to+\infty,\ d_{2i}\to d_2$, 使得问题 (1.2) 存在非常数正解 (u_i,v_i). (1.2) 中关于 u_i,v_i 的方程两边分别同乘以

$(u_i-\overline{u}_i),(v_i-\overline{v}_i)$, 积分相加，并利用 $\varepsilon-$Young 不等式得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \big(d_{1i}|\nabla u_i|^2+d_{2i}|\nabla v_i|^2\big)\,\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega \Big\{\Big[a-(u_i+\overline{u}_i)-\frac{mv_i}{(m+u_i)(m+\overline{u}_i)}\Big](u_i-\overline{u}_i)^2\\
&+\Big[\frac{\overline{v}_i^2}{\gamma u_i\overline{u}_i}-\frac{\overline{u}_i}{m+\overline{u}_i}\Big](u_i-\overline{u}_i)(v_i-\overline{v}_i)+\Big[b-\frac{v_i+\overline{v}_i}{\gamma u_i}\Big](v_i-\overline{v}_i)^2\Big\}\,\mathrm{d}x\\
\le&\int_\Omega \big[(a+C(\varepsilon))(u_i-\overline{u}_i)^2+(b+\varepsilon)(v_i-\overline{v}_i)^2\big]\,\mathrm{d}x\\
\le&\frac{1}{\mu_1}\int_\Omega \big[(a+C(\varepsilon))|\nabla u_i|^2+(b+\varepsilon)|\nabla v_i|^2\big]\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}\tag{4.8}
$$

其中 $C(\varepsilon)$ 还与 $\underline{C},\overline{C}$ 有关，这里 ε 可以是任意正常数．由于

$$\lim_{d_{1i}\to+\infty}\int_\Omega (d_{1i}|\nabla u_i|^2+d_{2i}|\nabla v_i|^2)\,\mathrm{d}x\to+\infty,$$

而由 (4.8) 得

$$\lim_{d_{1i}\to+\infty}\int_\Omega \big[(a+C(\varepsilon))|\nabla u_i|^2+(b+\varepsilon)|\nabla v_i|^2\big]\,\mathrm{d}x\to C,$$

其中 C 是正常数．矛盾说明，当 $d_1>\widetilde{D_1}$，$d_2\ge D_2$ 时，(1.2) 没有非常数正解.

类似可得

定理 4.4　设 $d_3=d_4=0$. 对任意给定的正常数 D_1 和 D_2, 存在依赖于 D_1 和 D_2 的正常数 $\widetilde{D_2}$, 满足 $\widetilde{D_2}>D_2$, 使得当 $d_1\ge D_1$，$d_2>\widetilde{D_2}$ 时，(1.2) 没有非常数正解.

5　非常数正解的存在性

下面讨论 (1.2) 的非常数正解的存在性.

定理 5.1　对于固定的正常数 d_1,d_3 和 d_4, 存在正常数 $D_2(d_1,d_3,d_4)$, 当 $d_2>D_2(d_1,d_3,d_4)$ 时，如果存在某个 $n\ge1$ 使得 $\mu_0<\mu_1(d)<\mu_1$，$\mu_2(d)\in(\mu_n,\mu_{n+1})$ 并且 $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dim\mathbf{E}(\mu_i)$ 为奇数，那么 (1.2) 存在非常数正解.

证　$\widetilde{D_1},\widetilde{D_2}$ 和 $\widetilde{D_4}$ 如定理 4.1 定义，取正常数 D_1,D_3,D_4 和 $D_2(d_1,d_3,d_4)$, 满足 $D_1\le d_1<\widetilde{D_1}$，$D_2\le d_2<\widetilde{D_2}$，$d_3\ge D_3$ 和 $\widetilde{D_4}<d_4\le D_4$. 对 $0\le t\le1$, 令 $\mathbf{w}=(u,v)^T$,

$$
\begin{aligned}
&d_1(t)=2\widetilde{D_1}+t[d_1-2\widetilde{D_1}],\qquad d_2(t)=2\widetilde{D_2}+t[d_2-2\widetilde{D_2}],\\
&d_3(t)=d_3,\qquad d_4(t)=\frac{\widetilde{D_4}}{2}+t\Big[d_4-\frac{\widetilde{D_4}}{2}\Big],\\
&\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{w})=(d_1(t)(1+d_3(t)v)u,\qquad d_2(t)(1+d_4(t)u)v),\\
&\mathbf{G}(\mathbf{w})=\Big(au-u^2-\frac{uv}{m+u},bv-\frac{v^2}{\gamma u}\Big)^T.
\end{aligned}
$$

考虑下列问题

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{w}) = \mathbf{G}(t,\mathbf{w}), & x\in\Omega, \\ \partial_\nu\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{w}) = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

问题 (5.1) 的非常数正解的存在性等价于下面问题的非常数正解

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t,\mathbf{w}) =&\mathbf{w}-(\mathbf{I}-\Delta)^{-1}\big\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(t,\mathbf{w})]^{-1}[\mathbf{G}(\mathbf{w})+\nabla\mathbf{w}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{ww}}(\mathbf{w})\nabla\mathbf{w}]+\mathbf{w}\big\} \\ =&0, \qquad \mathbf{w}\in\mathbf{X}^+\end{aligned}$$

的存在性. 显然，$\mathbf{F}(1,\mathbf{w})=\mathbf{F}(\mathbf{w})$, $D_{\mathbf{w}}\mathbf{F}(\mathbf{w}^*)=\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\Delta)^{-1}\big\{[\mathbf{\Phi}_{\mathbf{w}}(t,\mathbf{w}^*)]^{-1}\mathbf{G}_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}^*)+\mathbf{I}\big\}$. 根据定理的条件和引理 3.3 得到 $H(0)>0$; 当 $1\le i\le n$ 时， $H(\mu_i)<0$; 当 $i>n$ 时 $H(\mu_i)>0$. 于是， $\sum\limits_{H(\mu_i)<0}\dim\mathbf{E}(\mu_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dim\mathbf{E}(\mu_i)=\sigma_n$ 为奇数. 由引理 3.1 得

$$\operatorname{index}\mathbf{F}((1,\cdot),\omega^*)=(-1)^{\sigma_n}=-1,$$

由定理 4.1 知，当 $t=0$ 时 (1.2) 只有常数正解，且对任意 $\mu\ge 0$ 有 $H(\mu)>0$. 因此，

$$\operatorname{index}\mathbf{F}((0,\cdot),\omega^*)=(-1)^0=1,$$

另一方面, 对于 $0\le t\le 1$, 由定理 2.1 知, 存在正常数 C 使得在 $\partial\mathbf{B}(C)$ 上 $\mathbf{F}(t,\mathbf{w})\neq 0$. 于是，根据度的同伦不变性得 $\deg(\mathbf{F}((1,\cdot),0,\mathbf{B}(C)))=\deg(\mathbf{F}((0,\cdot),0,\mathbf{B}(C)))$. 如果 $\mathbf{F}(t,\mathbf{w})$ 在 $\mathbf{B}(C)$ 内仅有常数正解，那么

$$\deg(\mathbf{F}((1,\cdot),0,\mathbf{B}(C)))=\deg\left(\mathbf{F}((0,\cdot),0,\mathbf{B}(C))\right)=\operatorname{index}\mathbf{F}((0,\cdot),\mathbf{w}^*)=1.$$

与 $\deg\left(\mathbf{F}((1,\cdot),0,\mathbf{B}(C))\right)=\operatorname{index}\left(\mathbf{F}((1,\cdot),\mathbf{w}^*)\right)=-1$ 矛盾. 因此，问题 (1.2) 存在非常数正解.

定理 5.2 对于固定的正常数 d_1, d_2 和 d_3, 存在正常数 $D_4(d_1,d_2,d_3)$ 当 $d_4>D_4(d_1,d_2,d_3)$ 时，如果存在某个 $n\ge 1$ 使得 $\mu_0<\mu_1(d)<\mu_1$, $\mu_2(d)\in(\mu_n,\mu_{n+1})$ 并且 $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dim\mathbf{E}(\mu_i)$ 为奇数，那么 (1.2) 存在非常数正解.

证 $\widetilde{D_1},\widetilde{D_2}$ 和 $\widetilde{D_3}$ 如定理 4.2 定义，取正常数 D_1,D_2,D_3 和 $D_4(d_1,d_2,d_3)$, 满足 $D_1\le d_1<\widetilde{D_1}$, $d_2>\widetilde{D_2}$, $\widetilde{D_3}<d_3\le D_3$ 和 $D_4(d_1,d_2,d_3)<d_4\le D_4$. 对 $0\le t\le 1$, 令 $\mathbf{w}=(u,v)^T$,

$$\begin{aligned} &d_1(t)=2\widetilde{D_1}+t[d_1-2\widetilde{D_1}], \qquad d_2(t)=2\widetilde{D_2}+t[d_2-2\widetilde{D_2}], \\ &d_3(t)=\frac{\widetilde{D_3}}{2}+t\Big[d_3-\frac{\widetilde{D_3}}{2}\Big], \qquad d_4(t)=d_4, \end{aligned}$$

$\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{w})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ 类似于定理 5.1 定义. 考虑问题 (5.1). 由定理 5.2 的条件和引理 3.3 得 $H(0)>0$: 当 $1\le i\le n$ 时，$H(\mu_i)<0$; 当 $i>n$ 时 $H(\mu_i)>0$. 于是， $\sum\limits_{H(\mu_i)<0}\dim\mathbf{E}(\mu_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dim\mathbf{E}(\mu_i)=\sigma_n$ 为奇数. 由引理 3.1 得 $\operatorname{index}\mathbf{F}((1,\cdot),\mathbf{w}^*)=-1$. 由定理 4.2 知，当

$t=0$ 时， $\operatorname{index}\mathbf{F}((0,\cdot),\mathbf{w}^*)=(-1)^0=1$. 因此，类似定理 5.1 的讨论，并利用度的同伦不变性得到 (1.2) 存在非常数正解.

注 5.1　设 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dim\mathbf{E}(\mu_i)$ 为奇数.

(i) 对于固定的 $d_3\geq 0$ 和 $d_4\geq 0$, 根据 (3.1), 可以选择适当小的 d_1 使得

$$\frac{u^*[b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}+d_4u^*(2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am})]}{d_1(1+d_3v^*+d_4u^*)(m+u^*)}\in(\mu_n,\mu_{n+1}).$$

于是, 存在充分大的正常数 $D_2(d_1,d_3,d_4)$, 使得当 $d_2>D_2(d_1,d_3,d_4)$ 时，$\mu_0<\mu_1(d)<\mu_1$, $\mu_2(d)\in(\mu_n,\mu_{n+1})$. 并且，对于任意 $d_2>D_2(d_1,d_3,d_4)$, (1.2) 始终存在非常数正解.

(ii) 固定 $d_2>0$ 和 $d_3\geq 0$, 根据 (3.2), 可以选择适当小的 d_1 使得

$$\frac{2b\gamma-\sqrt{(a-m-b\gamma)^2+4am}}{d_1(m+u^*)}\in(\mu_n,\mu_{n+1}).$$

于是, 存在充分大的正常数 $D_4(d_1,d_2,d_3)$, 使得当 $d_4>D_4(d_1,d_2,d_3)$ 时，$\mu_0<\mu_1(d)<\mu_1$, $\mu_2(d)\in(\mu_n,\mu_{n+1})$. 并且，对于任意 $d_4>D_4(d_1,d_3,d_4)$, (1.2) 始终存在非常数正解.

定理 5.3　固定 d_1,d_2,d_3,d_4. 如果存在正整数 $n_2>n_1\geq 0$ 使得 $\mu_1(d)\in(\mu_{n_1},\,\mu_{n_1+1})$, $\mu_2(d)\in(\mu_{n_2},\mu_{n_2+1})$, 并且 $\sigma_n=\sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2}\dim\mathbf{E}(\mu_i)$ 为奇数，那么 (1.2) 存在非常数正解.

证　其证明过程类似于定理 5.1. 由定理 5.3 的条件和引理 3.3 得，当 $0\leq i\leq n_1$ 时， $H(\mu_i)>0$; 当 $n_1<i<n_2$ 时， $H(\mu_i)<0$; 当 $i\geq n_2$ 时， $H(\mu_i)>0$. 于是，$\sum\limits_{H(\mu_i)<0}\dim\mathbf{E}(\mu_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dim\mathbf{E}(\mu_i)=\sigma_n$ 为奇数. 由引理 3.1 得 $\operatorname{index}\mathbf{F}((1,\cdot),\mathbf{w}^*)=-1$. 由定理 4.1 知，当 $t=0$ 时 $\operatorname{index}\mathbf{F}((0,\cdot),\mathbf{w}^*)=1$. 根据度的同伦不变性得 (1.2) 存在非常数正解.

参　考　文　献

[1] Peng R, Wang M X. Positive Steady-states of the Holling-tanner Prey-predator Model with Diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A*, 2005, 135(1): 149–164

[2] Wang M X. Stationary Patterns for a Prey-predator Model with Prey-dependent and Ratio- dependent Functional Responses and Diffusion. *Physica D*, 2004, 196(1-2): 172–192

[3] Ko W, Ryu K. Qualitative Analysis of a Predator-prey Model with Holling Type II Functional Response Incorporating a Prey Refuge. *J. Differential Equations*, 2006, 231(2): 534–550

[4] Du Y H, Lou Y. Some Uniqueness and Exact Multiplicity Results for a Predator-prey Model. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1997, 349(6): 2443–2475

[5] Guo G H, Wu J H. Multiplicity and Uniqueness of Positive Solutions for a Predator-prey Model with B-D Functional Response. *Nonlinear Analysis: TMA*, 2010, 72(3-4): 1632–1646

[6] Peng R, Wang M X, Yang G Y. Stationary Patterns of the Holling-tanner Prey-predator Model with Diffusion and Cross-diffusion. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 196(2): 570–577

[7] Zeng X Z, Zhou S Q. Non-constant Positive Steady-state Solutions of a Prey-predator Model with Cross-diffusion. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 332(2): 989–1009

[8] Wang M X. Stationary Patterns of Strongly Coupled Prey-predator Models. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, 292(2): 484–505

[9] Kuto K, Yamada Y. Multiple Coexistence States for a Prey-predator System with Cross-diffusion. *J. Differential Equations*, 2004, 197(2): 315–348

[10] Wu J H, Guo G H, Ma C. Nonlinear Diffusion Effect on Bifurcation Structures for a Predator-prey Model. *Differential and Integral Equations*, 2011, 24(1/2): 177–198

[11] Lou Y, Ni W M. Diffusion, Self-diffusion and Cross-diffusion. *J. Differential Equations*, 1996, 131(1): 79–131

[12] Lin C S, Ni W M, Takagi I. Large Amplitude Stationary Solutions to a Chemotais Systems. *J. Differential Equations*, 1988, 72(1): 1–27

The Existence of Non-constant Positive Solutions for a Predator-prey Model with Cross-diffusion

LI Yanling LI Jingrong

(*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062)

GUO Gaihui

(*College of Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an* 710021)

(*E-mail: guogaihui@sust.edu.cn*)

Abstract This paper will discuss a Holling-Tanner predator-prey ecological model with diffusion and cross-diffusion. By means of maximum principle and Harnack inequality, a priori estimates are first established. Furthermore, the degree theory is utilized to obtain the existence and non-existence of non-constant positive solutions. The results indicate that non-constant positive solutions are created under some conditions.

Key words cross-diffusion; predator-prey; degree theory

MR(2000) Subject Classification 35K57

Chinese Library Classification O175.26