有重复观测的变系数 EV 模型的参数估计 *

李泽华 [1]　刘金山　吴小腊

(华南农业大学理学院，广州 510642)

([1]E-mail: lzhljl@sina.com)

摘　要　构造了有重复观测的变系数 EV 模型中的诸多参数估计，包括系数函数、测量误差方差以及测量误差与回归误差的协方差等估计，去除了有关测量误差方差已知或可靠比已知的假定．在一些较弱的条件下，证明了所有的这些估计都是强相合的，同时获得了系数函数估计的渐近正态性以及收敛速度．

关键词　变系数 EV 模型；测量误差；重复观测

MR(2000) 主题分类　62J05; 62H12

中图分类　O212.1

1　引言

考虑如下模型

$$\begin{cases} Y(t)=\beta_0(t)+x^{'}\beta_1(t)+\varepsilon, \\ X=x+u \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 X 和 x 都是 R^p 中的随机向量，x 不可直接观测，称潜在变量 [1], X 为可观测变量，Y 是一维实值随机变量，t 是一实变量 (可以是时间、温度等). 假定 t 在一个闭区间上变化，不失一般性，认为 $t\in[0,1]$，ε 是随机误差，u 是 $p\times 1$ 维测量误差向量．称上述模型为结构型变系数 EV 模型．

关于该模型，国内外已有一些讨论，参见 [2–10] 等．在这些讨论中，[2] 首先研究了该模型一维情形下系数函数的相合估计，[4] 将它推广到一般的 p 维情形．[5] 利用调整的加权最小二乘方法估计其中的系数函数，得到了估计的强相合性和渐近正态性．[6] 利用核函数法和广义最小二乘法给出了其系数函数的一步核估计，得到了估计的强相

本文 2011 年 4 月 25 日收到．2012 年 6 月 5 日收到修改稿．

* 国家自然科学基金 (11171117,10871072), 广东省自然科学基金 ((S2011010002371) 和华南农业大学校长科学基金 (2009K020) 资助项目．

合性及一致强相合性, [7] 在 [6] 的基础上给出了系数函数的第二步核估计及误差方差估计, 证明了所给估计具有强相合性及一致强相合性. [9] 对该问题进行了比较详细的研究, 利用修正的局部线性方法 (corrected local linear estimator) 给出了函数系数的相合估计, 证明了其渐近分布为正态分布, 并给出了误差方差的相合估计, 还利用广义似然方法 (generalized likelihood technique) 讨论了该模型的最优拟合检验 (goodness-of-fit test) 问题. [10] 利用与 [9] 一样的方法也讨论了该模型的估计问题, 并讨论了窗宽的选择.

上述文献中的结论都是基于一定的模型识别条件而存在. 归纳起来, 这些识别条件有两类:

其一, 假定

$$E[(u^{'},\varepsilon)^{'}]=0,\qquad \mathrm{Cov}\,(u)=\Sigma_u,\qquad E(\varepsilon^2)=\sigma^2. \tag{1.2}$$

其中 $\Sigma_u>0$ 是一个已知矩阵, σ^2 为未知参数, $\beta_0(t),\beta_1(t)$ 是关于 t 的有界连续函数. 参见 [5,9,10].

其二, 假定

$$E[(u^{'},\varepsilon)^{'}]=0,\qquad \mathrm{Cov}\,[(u^{'},\varepsilon)^{'}]=\sigma^2 I_{p+1}, \tag{1.3}$$

其中 $\sigma^2>0$ 为未知参数, 参见 [2,4,6–8].

考虑到在实际中, 上述模型识别条件很难达到, 因为测量误差向量的协方差阵在实际中往往是未知的且很少是可靠比 (测量误差和回归方程误差的方差之比) 已知的, 而在很多的应用中, 数据可以在每一设计点处进行重复观测, 因而测量误差向量的协方差阵可以通过重复观测数据进行估计, 利用这一估计, 可直接构造出系数函数 $\beta_0(t),\beta_1(t)$ 的估计, 即测量误差向量协方差阵已知或可靠比已知的假设可以去除. [11,12] 对这一情形的其它 EV 模型获得了一些有意义的结果.

本文在数据可以在每一设计点处进行重复观测的情形下, 讨论模型 (1.1) 中的系数函数的估计问题.

令 $\{(Y_{ij},X_{ij},t_i):1\le j\le n_i,\ 1\le i\le n\}$ 服从模型 (1.1), 即

$$\begin{cases} Y_{ij}=\beta_0(t_i)+x_i^{'}\beta_1(t_i)+\varepsilon_{ij} \\ X_{ij}=x_i+u_{ij}, \end{cases}\qquad 1\le j\le n_i,\quad 1\le i\le n, \tag{1.4}$$

其中 x_i 是潜在变量, t 是未知的固定设计点列, X_{ij},Y_{ij} 是可观测变量. $x_1,\cdots,x_n$ i.i.d., 测量误差 $(u_{ij}^{'},\varepsilon_{ij})^{'}$ i.i.d. 且 x_i 与 $(u_{ij}^{'},\varepsilon_{ij})^{'}$ 独立, 满足

$$E[(u_{ij}^{'},\varepsilon_{ij})^{'}]=0,\quad \mathrm{Var}\,(u_{ij})=\Sigma_u>0,\quad E(\varepsilon_{ij}^2)=\sigma_\varepsilon^2>0,\quad \mathrm{Cov}\,[(u_{ij}^{'},\quad \varepsilon_{ij})^{'}]=\rho\ne 0$$

且 $\min\limits_{1\le i\le n} n_i\ge 2$, 其中 $\Sigma_u,\sigma_\varepsilon^2,\rho$ 都未知, 这是本模型区别于前述文献的主要之处.

本文的主要目的是构造 $\beta_0(t),\beta_1(t)$ 在任一固定点 $t_0\in[0,1]$ 处的相合估计 $\widehat{\beta}_0(t),\widehat{\beta}_1(t)$ 以及 $\Sigma_u,\sigma_\varepsilon^2,\rho$ 的相合估计, 并讨论其渐近分布. 大家知道, 统计量的渐近分布是进行统计推断的基础.

2　估计量的构造及主要结论

2.1　估计量的构造

由于直接沿用 [3] 的方法很难对一般的 p 维变系数 EV 模型进行讨论，本文借用 [5] 的调整加权最小二乘 (AWLS) 方法构造相应的估计量.

给定权函数 $W_{ni}(t_0),\ i=1,\cdots,n$ 满足

(1) $W_{ni}(t_0)>0$;　(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)=1$.

关于权函数的选择，可先选定 $K(y)$ 是对称的且支撑在 $[-1,1]$ 上的有界概率密度函数，称之为核函数，然后选择窗宽 $h_n\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 由事先选定的设计点 $0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le 1$ 及 $t_0\in(0,1)$ 构造如下权函数

$$W_{ni}(t_0)=\int_{A_i} W_n(s,t_0)\,\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
&A_1=\Big[0,\frac{t_1+t_2}{2}\Big),\quad A_i=\Big[\frac{t_{i-1}+t_i}{2},\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\Big),\quad i=2,3,\cdots,n-1,\\
&A_n=\Big[\frac{t_{n-1}+t_n}{2},1\Big];\qquad W_n(s,t)=\frac{1}{h_n}\Big[K\Big(\frac{s-t}{h_n}\Big)+K\Big(\frac{s+t}{h_n}\Big)I\{0\le s,t\le h_n\}\\
&\qquad\qquad +K\Big(\frac{2-s-t}{h_n}\Big)I\{1-h_n\le s,\ t\le 1\}\Big].
\end{aligned}$$

选择窗宽 h_n 时应注意 h_n 随 n 的增大而减少，且 $h_n\to 0\ (n\to\infty)$, 有关 $W_{ni}(t_0)$ 的选取及其性质详见 [13].

注记 1　核函数可取 Epanechinkov 核 $K(y)=\frac{3}{4}(1-y^2)I\{|y|\le 1\}$ 或 Biweight 核 $K(y)=\frac{15}{16}(1-y^2)^2 I\{|y|\le 1\}$ 等.

为表述方便，本文约定如下记号：

$$\begin{aligned}
&X_{i.}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij},\qquad \widetilde{X}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}X_{ij},\qquad \widetilde{X^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}X_{ij}X_{ij}^{'},\\
&\widetilde{Y^\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}Y_{ij}^{\alpha},\quad \alpha=1,2;\qquad \widetilde{XY}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}X_{ij}Y_{ij},\\
&S_X^2=\widetilde{X^2}-\widetilde{X}\widetilde{X}^{'},\qquad S_Y^2=\widetilde{Y^2}-(\widetilde{Y})^2,\qquad S_{XY}^2=\widetilde{XY}-\widetilde{X}\widetilde{Y},\qquad N_n=\sum_{i=1}^{n}n_i.
\end{aligned}$$

类似地有 $Y_{i.},u_{i.},\varepsilon_{i.}$ 等.

假定在 t_0 点处真实的线性关系 (回归超平面) 为 $y=\beta_0+x^{'}\beta_1$, 则，当 Σ_u,ρ 已知时，点 $(Y_{ij}^{'},X_{ij})^{'}$ 到超平面 $y=\beta_0+x^{'}\beta_1$ 的加权调整平方距离定义为

$$Q(\beta_0,\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\big[(Y_{ij}-\beta_0-X_{ij}^{'}\beta_1)^2-\beta_1^{'}\Sigma_u\beta_1+2\beta_1^{'}\rho\big]. \tag{2.2}$$

所谓参数调整的加权最小二乘估计方法，就是使得各观测点到此回归超平面的加权调整平方距离和达到最小的点 $\widehat{\beta}_{n0},\widehat{\beta}_{n1}$ 作为 β_0,β_1 的估计，即

$$(\widehat{\beta}_{n0},\widehat{\beta}_{n1})=\mathrm{argmin}_{b_0,b_1}Q(b_0,b_1).$$

令 $\frac{\partial Q(b_0,b_1)}{\partial b_0}=0,\ \frac{\partial Q(b_0,b_1)}{\partial b_1}=0$, 得到 β_0,β_1 的估计为

$$\begin{cases}\widetilde{\beta}_{n1}=(S_X^2-\Sigma_u)^{+}(S_{XY}^2-\rho),\\ \widetilde{\beta}_{n0}=\widetilde{Y}-\widetilde{X}'\widetilde{\beta}_{n1}.\end{cases}\tag{2.3}$$

注记 2 “+” 代表矩阵的广义加号逆.

但文中假定 Σ_u,ρ 未知，为此利用重复观测数据，先定义 Σ_u,ρ 的估计量为

$$\widehat{\Sigma}_u=\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-X_{i.})(X_{ij}-X_{i.})',$$

$$\widehat{\rho}=\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-X_{i.})(Y_{ij}-Y_{i.}).$$

再令其替代 $\widetilde{\beta}_{n0},\widetilde{\beta}_{n1}$ 中的 Σ_u,ρ, 即得 β_0,β_1 的估计量为

$$\begin{cases}\widehat{\beta}_{n1}=(S_X^2-\widehat{\Sigma}_u)^{+}(S_{XY}^2-\widehat{\rho}),\\ \widehat{\beta}_{n0}=\widetilde{Y}-\widetilde{X}'\widehat{\beta}_{n1}.\end{cases}\tag{2.4}$$

最后定义 σ_ε^2 的估计量为

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2=Q(\widehat{\beta}_{n0},\widehat{\beta}_{n1})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\big[(Y_{ij}-\widehat{\beta_0}-X_{ij}'\widehat{\beta}_1)^2-\widehat{\beta}_1'\widehat{\Sigma}_u\widehat{\beta}_1+2\widehat{\beta}_1'\widehat{\rho}\big].\tag{2.5}$$

至此，得到了 $\beta_0(t_0),\beta_1(t_0),\Sigma_u,\rho,\sigma_\varepsilon^2$ 的估计量.

2.2 主要结论

首先给出如下条件：

C1 (1) $E(x)=E(X)=\mu_x$, $\mathrm{Var}\,(x)=\Sigma_x>0$ 且存在有限；

(2) 测量误差 $(u_{ij}',\varepsilon_{ij})'$ i.i.d., 满足 $E[(u_{ij}',\varepsilon_{ij})']=0$, $\mathrm{Var}\,(u_{ij})=\Sigma_u>0$, $E(\varepsilon_{ij}^2)=\sigma_\varepsilon^2>0$, $\mathrm{Cov}\,[(u_{ij}',\varepsilon_{ij})']=\rho\neq 0$;

(3) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ i.i.d., x_i 与 $(u_{ij}',\varepsilon_{ij})'$ 独立；

(4) 每次观测至少重复 2 次以上，即 $\min\limits_{1\le i\le n}n_i\ge 2,\ 1\le i\le n.$

C2 设计点 $t_i,\ i=1,\cdots,n$ 满足 $0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le 1$ 且

(1) $\max\limits_{1\le i\le n}\{|t_{i+1}-t_i|\}=O\big(\frac{\log n}{n}\big)$; (2) $\max\limits_{1\le i\le n}\{|t_i-\frac{i}{n}|\}=O(\frac{\log n}{\sqrt{n}})$.

C3 $E[\|x_1\|^4+\|u_{11}\|^4+\|\varepsilon_{11}\|^4]<+\infty$.

C4 $\{W_{ni}(t_0)\}_{i=1}^n$ 由 (2.1) 给出，其中核函数 $K(\cdot)$ 是满足 Lipschitz 条件，且具有紧支撑的对称概率密度函数.

C5　$\beta_0(t),\beta_{1j}(t)$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 的一阶导数满足 r 阶 Lipschitz 条件，即对所有 $t,s\in[0,1]$ 有

$$|\beta_0^{(1)}(t)-\beta_0^{(1)}(s)|+\sum_{j=1}^{p}|\beta_{1j}^{(1)}(t)-\beta_{1j}^{(1)}(s)|\le L|t-s|^r,$$

其中 $\beta_1(t)=(\beta_{11}(t),\cdots,\beta_{1p}(t))',L,\ 0<r\le 1$ 为正常数.

下面的定理表明本文所作的估计具有相合性和渐近正态性.

定理 2.1 当条件 C1–C4 成立, 且 $\frac{\log n}{nh_n}\to 0\ (n\to\infty)$ 时，$\widehat{\beta}_{n0},\widehat{\beta}_{n1},\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ 分别是 $\beta_0,\beta_1,\sigma_{\varepsilon}^2$ 的弱相合估计.

定理 2.2 当条件 C1 成立，$\widehat{\rho},\widehat{\Sigma}_u$ 分别是 ρ,Σ_u 的强相合估计.

定理 2.3 当条件 C1–C4 成立，且 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0\ (n\to\infty)$ 时，$\widehat{\beta}_{n0},\widehat{\beta}_{n1},\widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ 分别是 $\beta_0,\beta_1,\sigma_{\varepsilon}^2$ 的强相合估计.

定理 2.4 当条件 C1–C5 成立，且 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0\ (n\to\infty)$ 时，则有

$$(\widehat{\beta}_{n0}-\beta_0,(\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1)')'=O_p\Big(h_n^{1+r}+\frac{\log n}{n}\Big).$$

若取 $h_n\sim(\frac{\log n}{n})^{\frac{1}{3+2r}}$, 则有

$$(\widehat{\beta}_{n0}-\beta_0,(\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1)')'=O_p\Big(\frac{\log n}{n}\Big)^{\frac{1+r}{3+2r}}.$$

注记 3 在这里，r 是光滑参数. 定理表明估计量的收敛速度与曲线在该点处的光滑程度有关. 当 r 在 0 到 1 之间变化时，估计量的收敛速度介于 $O(n^{-\frac{1}{3}})$ 与 $O(n^{-\frac{2}{5}})$ 之间，且当 $r=1,\ h_n\sim\big(\frac{\log n}{n}\big)^{\frac{1}{5}}$ 时，可达最优收敛速度 $O(n^{-\frac{2}{5}})$.

定理 2.5 当条件 C1–C5 成立，且 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0\ (n\to\infty)$, 且 $nh_n^{2+2r}\to 0$ 时，则

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big]^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\beta}_{n0}-\beta_0,(\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1)')'\xrightarrow{d.}N(0,\Omega_1),$$

其中 $\Omega_1=\mathrm{Cov}\left[(\zeta_{0i},\zeta_{1i}'\Sigma_x^{-1})'\right]$, $\zeta_{0i}=\varepsilon_{ij}-u_{ij}'\beta_1(t_0)-E(x_{ij}')\Sigma_x^{-1}\zeta_{1i}$, $\zeta_{1i}=(x_i-E(x_1))\varepsilon_{ij}-(x_i-E(x_1))u_{ij}'\beta_1(t_0)-(u_{ij}u_{ij}'-\widehat{\Sigma}_u)\beta_1(t_0)+(u_{ij}\varepsilon_{ij}-\widehat{\rho})$. “$\xrightarrow{d.}$” 表示依分布收敛.

3　主要结果的证明

为了证明本文的定理，需要用到以下几个引理.

引理 3.1 当 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0\ (n\to\infty)$ 时，$\{W_{ni}(t_0)\}_{i=1}^n$ 具有以下性质：

a) 当 n 较大时，存在正常数 C, 使得

$$\max_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\le\frac{C\log n}{nh_n}.\tag{3.1}$$

b) 对于任意的正整数 $\delta>0$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\sum_{i=n}^{n} W_{ni}(t_0) I\{|t_i-t_0|\geq\delta\}\to 0. \tag{3.2}$$

引理 3.2 设 $f(t)$ 为有界函数，且在 t_0 附近连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i)=f(t_0). \tag{3.3}$$

引理 3.3 设 $f(t)$ 为有界函数且在 t_0 附近连续，随机变量 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ i.i.d. 满足 $E\varepsilon_1=0$, $E\varepsilon_1^2=\sigma^2<\infty$. 随机向量或矩阵序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立， $E\xi_i$ 存在，存在有限数 D, 使得 $\|\mathrm{Cov}\,(\xi_i)\|\leq D$ (或对随机矩阵有 $\|\mathrm{Cov}\,(\mathrm{vec}(\xi_i))\|\leq D$, $i=1,2,\cdots,n$), 函数 $\mathrm{vec}\,(\cdot)$ 表示将矩阵按列展开成一个向量，且 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0$ $(n\to\infty)$, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i)(\xi_i-E\xi_i)\xrightarrow{\text{a.s}}0; &&\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\xi_i\xrightarrow{\text{a.s}}E\xi;\\
&\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i)\varepsilon_i\xrightarrow{\text{a.s}}0; &&\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\varepsilon_i\xrightarrow{\text{a.s}}0;\\
&\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) f(t_i)\xi_i\varepsilon_i\xrightarrow{\text{a.s}}0; &&\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\xi_i\varepsilon_i\xrightarrow{\text{a.s}}0.
\end{aligned}$$

注记 4 引理 3.1–3.3 的证明参见 [4] 中的引理 1–2 和 [2] 中引理 3 及其推论. 并且，当把条件 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0$ $(n\to\infty)$ 换成 $\frac{\log n}{nh_n}\to 0(n\to\infty)$ 时，上述结论相应地由 “$\xrightarrow{\text{a.s}}0$” 变为 “$\xrightarrow{P}0$”.

引理 3.4 设 X_n 为 i.i.d. 序列， $E|X_1|<\infty$, a_n 为一正实数列， $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\infty$, 记 $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_iX_i}{A_n}, N(n)=\sharp\{i:\frac{A_i}{a_i}\leq n\}$, 若 $\max\limits_{1\leq i\leq n}\frac{a_i}{A_n}\to 0$ 且 $\sup\limits_{n}\frac{N(n)}{n}<\infty$, 则

$$T_n\xrightarrow{\text{a.s}}E(X_1),\qquad n\to\infty.$$

引理 3.5 假定 X_n 为具有零均值的独立随机变量列, 若 $0<a_n\uparrow\infty$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}E\big(\frac{|X_n|^p}{a_n^p}\big)<\infty$, 对某个 p 满足 $1\leq p\leq 2$ 成立，记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 则

$$\frac{S_n}{a_n}\xrightarrow{\text{a.s}}0,\qquad n\to\infty.$$

引理 3.4, 3.5 的证明请参见 [11] 中的引理 1.1, 1.2.

由于定理 2.1 的证明过程与定理 2.3 的证明完全类似，下文只证明定理 2.3. 为此，先证明定理 2.2.

定理 2.2 的证明 只证 $\widehat{\rho}\xrightarrow{\text{a.s}}\rho$, Σ_u 类似可得.

由于 $\widehat{\rho}=\frac{1}{N_n-n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{i.})(u_{ij}-u_{i.})$, 故若能证明

$$\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{i.})(u_{ij}(l)-u_{i.}(l))\xrightarrow{\text{a.s}}\rho(l),\qquad l=1,\cdots,p,$$

则问题得证，其中 $u_{ij}(l)$ 表示 u_{ij} 的第 l 个分量，其它类似．而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{i.})(u_{ij}(l)-u_{i.}(l))\\=&\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(1-\frac{1}{n_i})\varepsilon_{ij}u_{ij}(l)-\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{m\neq s}^{n_i}\varepsilon_{im}u_{is}(l).\end{aligned}$$

注意到当 $n_i\geq 2$ 时， $\frac{1}{2}\leq 1-\frac{1}{n_i}\leq 1$, 此时可验证引理 3.4 的条件满足，从而有

$$\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\Big(1-\frac{1}{n_i}\Big)\varepsilon_{ij}u_{ij}(l)\xrightarrow{\text{a.s}}\rho(l),\qquad l=1,\cdots,p.$$

又因为

$$\begin{aligned}E\Big(\frac{1}{n_i}\sum_{m\neq s}^{n_i}\varepsilon_{im}u_{is}(l)\Big)^2=&\frac{1}{n_i^2}E\Big[\sum_{m\neq s}^{n_i}\varepsilon_{im}^2(u_{is}(l))^2+\varepsilon_{im}u_{im}\varepsilon_{is}u_{is}\Big] &(3.4)\\ \leq&\Big(1-\frac{1}{n_i}\Big)^2\big[E\varepsilon_{11}^2(u_{11}(l))^2+(E\varepsilon_{11}u_{11}(l))^2\big] &(3.5)\\ \leq&2E\varepsilon_{11}^2E\big[(u_{11}(l))^2\big], &(3.6)\end{aligned}$$

且 $\frac{n}{N_n-n}\leq 1$, 进而由引理 3.5 得

$$\frac{1}{N_n-n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n_i}\sum_{m\neq s}^{n_i}\varepsilon_{im}u_{is}(l)\xrightarrow{\text{a.s}}0.$$

所以

$$\widehat{\rho}\xrightarrow{\text{a.s}}\rho.$$

证毕.

定理 2.3 的证明 在定理 2.3 的条件下，当 $n\to\infty$ 时，可以证明如下事实：

$$\widetilde{X}\xrightarrow{\text{a.s}}E(x_1)=\mu_x,\tag{3.7}$$
$$S_X^2\xrightarrow{\text{a.s}}\Sigma_u+\Sigma_x,\tag{3.8}$$
$$\widetilde{Y}\xrightarrow{\text{a.s}}\beta_0+\mu_x^{'}\beta_1,\tag{3.9}$$
$$\widetilde{Y^2}\xrightarrow{\text{a.s}}\beta_0^2+\beta_1^{'}(\Sigma_x+\mu_x\mu_x^{'})\beta_1+\sigma_\varepsilon^2+2\beta_0\mu_x^{'}\beta_1,\tag{3.10}$$
$$S_Y^2\xrightarrow{\text{a.s}}\sigma_\varepsilon^2+\beta_1^{'}\Sigma_x\beta_1,\tag{3.11}$$
$$S_{XY}^2\xrightarrow{\text{a.s}}\Sigma_x\beta_1+\rho,\tag{3.12}$$
$$\widetilde{XY}\xrightarrow{\text{a.s}}\beta_0\mu_x+(\Sigma_x+\mu_x\mu_x^{'})\beta_1+\rho.\tag{3.13}$$

事实上，由引理 3.3 可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\widetilde{X}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}X_{ij}\xrightarrow{\text{a.s}}EX_{ij}=E(x_i+u_{ij})=E(x_i)=\mu_x.$$

(3.7) 式获证．又

$$\begin{aligned}\widetilde{X^2}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}X_{ij}X_{ij}^{'}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}x_ix_i^{'}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}u_{ij}x_i^{'}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}x_iu_{ij}^{'}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}u_{ij}u_{ij}^{'}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

由引理 3.3, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}x_ix_i^{'}\xrightarrow{\text{a.s}}\mu_x\mu_x^{'}+\Sigma_x,\tag{3.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}u_{ij}x_i^{'}\xrightarrow{\text{a.s}}0,\tag{3.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}x_iu_{ij}^{'}\xrightarrow{\text{a.s}}0,\tag{3.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}u_{ij}u_{ij}^{'}\xrightarrow{\text{a.s}}\Sigma_u.\tag{3.18}$$

所以 $\widetilde{X^2}\xrightarrow{\text{a.s}}\mu_x\mu_x^{'}+\Sigma_x+\Sigma_u$. 从而 (3.8) 式获证．类似地可得 (3.9)–(3.13) 成立．由上述事实和定理 2.2 的结论以及 $\widehat{\beta}_{n0},\widehat{\beta}_{n1}$ 的定义有

$$\begin{aligned}&\widehat{\beta}_{n1}=(S_X^2-\widehat{\Sigma}_u)^{+}(S_{XY}^2-\widehat{\rho})\xrightarrow{\text{a.s}}(\Sigma_u+\Sigma_x-\Sigma_u)^{-1}(\Sigma_x\beta_1+\rho-\rho)=\beta_1,\\&\widehat{\beta}_{n0}=\widetilde{Y}-\widetilde{X}^{'}\widehat{\beta}_{n1}\xrightarrow{\text{a.s}}\beta_0+\mu_x^{'}\beta_1-\mu_x^{'}\beta_1=\beta_0.\end{aligned}$$

由 $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ 的定义有

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}[(Y_{ij}-\widehat{\beta_0}-X_{ij}^{'}\widehat{\beta}_1)^2-\widehat{\beta}_1^{'}\widehat{\Sigma}_u\widehat{\beta}_1+2\widehat{\beta}_1^{'}\widehat{\rho}]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}[Y_{ij}^2+\widehat{\beta_0}^2+\widehat{\beta}_1^{'}X_{ij}X_{ij}^{'}\widehat{\beta}_1-2Y_{ij}\widehat{\beta_0}\\&\quad-2\widehat{\beta}_1^{'}X_{ij}Y_{ij}+2\widehat{\beta_0}X_{ij}^{'}\widehat{\beta}_1-\widehat{\beta}_1^{'}\widehat{\Sigma}_u\widehat{\beta}_1+2\widehat{\beta}_1^{'}\widehat{\rho}]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}Y_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\widehat{\beta}_1^{'}X_{ij}X_{ij}^{'}\widehat{\beta}_1-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}Y_{ij}\widehat{\beta_0}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\widehat{\beta}_1' X_{ij}Y_{ij}+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\widehat{\beta_0}X_{ij}'\widehat{\beta}_1\\
&+\widehat{\beta_0}^2-\widehat{\beta}_1'\widehat{\Sigma}_u\widehat{\beta}_1+2\widehat{\beta}_1'\widehat{\rho}. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

依次应用 (3.10), (3.14), (3.9), (3.13), (3.7) 式的结论即有

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \xrightarrow{\text{a.s}} \sigma_\varepsilon^2.$$

为证定理 2.4 和 2.5, 再给两个引理.

引理 3.6 在条件 C1–C5 成立下，对固定的 $t_0\in(0,1)$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\beta_k(t_i)-\beta_k(t_0)=O\Big(h_n^{1+r}+\frac{\log n}{n}\Big),\qquad k=0,1.$$

证明类似 [13] 中引理 6.1(iii) 的证明.

引理 3.7 设 $f(t)$ 为有界函数，且在点 t_0 附近连续，则在引理 3.3 的条件下，当 $n\to\infty$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(f(t_i)-f(t_0))(\xi_i-E\xi_i)=o_p\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

证 $\forall\varepsilon>0$, 由引理 3.3 的证明可知, 当 n 充分大时, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}^2(t_0)}{n_i}(f(t_i)-f(t_0))^2<\varepsilon$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\mathrm{Cov}\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(f(t_i)-f(t_0))(\xi_i-E\xi_i)\Big]\Big\|\\
\le& D\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}^2(t_0)}{n_i}(f(t_i)-f(t_0))^2<D\varepsilon.
\end{aligned}
$$

故引理 3.7 成立.

定理 2.5 的证明 由定理 2.3 的证明可知， $(S_X^2-\widehat{\Sigma}_u)^+\xrightarrow{\text{a.s}}\Sigma_x^{-1}$. 因此，当 n 充分大时有

$$\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1=(S_X^2-\widehat{\Sigma}_u)^+(S_{XY}^2-\widehat{\rho}-(S_X^2-\widehat{\Sigma}_u)\beta_1).$$

注意到 $\mathrm{Cov}\,(X_{ij})=\Sigma_x+\Sigma_u$, $\mathrm{Cov}\,(Y_{ij})=\beta_1'(t_i)\Sigma_x\beta_1(t_i)+\sigma_\varepsilon^2\le C\|\Sigma_x\|+\sigma_\varepsilon^2$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(X_{ij}-E(X_{11}))=O_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big),\\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(Y_{ij}-E(Y_{11}))=O_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_X^2 =& \widetilde{X^2} - \widetilde{X}\widetilde{X}' \\
=& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(X_{ij}-E(X_{11}))(X_{ij}-E(X_{11}))' \\
&- \Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(X_{ij}-E(X_{11}))\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(X_{ij}-E(X_{11}))'\Big] \\
=& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(X_{ij}-E(X_{11}))(X_{ij}-E(X_{11}))' + o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
S_{XY}^2 =& \widetilde{XY} - \widetilde{X}\widetilde{Y} \\
=& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\big[(x_i-E(x_i))(x_i-E(x_i))'\beta_1(t_i)\big] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(x_i-E(x_i))\varepsilon_{ij} \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}u_{ij}(x_i-E(x_i))'\beta_1(t_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}u_{ij}\varepsilon_{ij} \\
&+ o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
& S_{XY}^2 - \widehat{\rho} - (S_X^2 - \widehat{\Sigma}_u)\beta_1 \\
=& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(x_i-E(x_1))(x_i-E(x_1))'(\beta_1(t_i)-\beta_1(t_0)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}u_{ij}(x_i-E(x_1))'(\beta_1(t_i)-\beta_1(t_0)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(x_i-E(x_1))\varepsilon_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(x_i-E(x_1))u_{ij}'\beta_1(t_0) \\
&- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(u_{ij}u_{ij}'-\widehat{\Sigma}_u)\beta_1(t_0) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(u_{ij}\varepsilon_{ij}-\widehat{\rho}) \\
&+ o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \\
\cong& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\zeta_{1i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\zeta_{2i}(\beta_1(t_i)-\beta_1(t_0)) \\
&+ o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big),
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

其中

$$\begin{aligned}\zeta_{1i}=&(x_i-E(x_1))\varepsilon_{ij}-(x_i-E(x_1))u_{ij}^{'}\beta_1(t_0)\\&-(u_{ij}u_{ij}^{'}-\widehat{\Sigma}_u)\beta_1(t_0)+(u_{ij}\varepsilon_{ij}-\widehat{\rho}),\\ \zeta_{2i}=&(x_i-E(x_1))(x_i-E(x_1))^{'}+u_{ij}(x_i-E(x_1))^{'}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

由引理 3.6, 3.7 和 $E(\zeta_{2i})=\Sigma_x$ 可知

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\zeta_{2i}(\beta_1(t_i)-\beta_1(t_0))\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(\zeta_{2i}-\Sigma_x)(\beta_1(t_i)-\beta_1(t_0))+\Sigma_x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(\beta_1(t_i)-\beta_1(t_0))\\=&o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac12}\Big)+O_p\Big(h_n^{1+r}+\frac{\log n}{n}\Big).\end{aligned}\tag{3.24}$$

再由 $\sum\limits_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\ge\frac{\big(\sum\limits_{i=1}^{n}W_{ni}(t_0)\big)^2}{n}=\frac1n$ 和 $nh_n^{2+2r}\to0$ 可得

$$S_{XY}^2-\widehat{\rho}-(S_X^2-\widehat{\Sigma}_u)\beta_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\zeta_{1i}+o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac12}\Big).$$

所以

$$\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\Sigma_x^{-1}\zeta_{1i}+o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac12}\Big).$$

又

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{n0}-\beta_0=&\widetilde{Y}-\widetilde{X}'\widehat{\beta}_{n1}-\beta_0\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\beta_0(t_i)-\beta_0+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}x_i^{'}(\beta_1(t_i)-\beta_1)\\&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(\varepsilon_{ij}-u_{ij}^{'}\beta_1)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}X_{ij}^{'}(\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1)\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(\varepsilon_{ij}-u_{ij}^{'}\beta_1)-E(X_{ij}^{'})(\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1)+o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac12}\Big)\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}\zeta_{0i}+o_p\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\Big)^{\frac12}\Big),\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中 $\zeta_{0i}=\varepsilon_{ij}-u_{ij}^{'}\beta_1(t_0)-E(x_{ij}^{'})\Sigma_x^{-1}\zeta_{1i}$. 由于 $(\zeta_{0i},\zeta_{1i})^{'}$ i.i.d. 且

$$\frac{\max\limits_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)}{\big(\sum\limits_{i=1}^{n}W_{ni}^2(t_0)\big)^{\frac12}}\le\sqrt{n}\max_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\le C\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\longrightarrow0.$$

由林德贝格中心极限定理可得

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^{2}(t_0)\Big]^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\beta}_{n0}-\beta_0,(\widehat{\beta}_{n1}-\beta_1)')'\\=&\Big[\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^{2}(t_0)\Big]^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{W_{ni}(t_0)}{n_i}(\zeta_{0i},\zeta_{1i})'\xrightarrow{d.}N(0,\Omega_1).\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.4 的证明 定理 2.4 的证明由定理 2.5 证明中的 (3.22) 、 (3.25) 式和引理 3.6 可得.

参 考 文 献

[1] Full W A. Measurement Error Models. New York: Wiley, 1987

[2] 欧阳光. 变系数结构关系 EV 模型的参数估计. 应用数学学报, 2005, 28(1): 73–85
(Ouyang Guang. On Parameter Estimation for Linear Varying-coefficients Structural EV Models. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2005, 28(1): 73–85)

[3] 欧阳光. 有重复观测的变系数线性结构关系 EV 模型的参数估计. 应用数学学报, 2006, 29(2): 247–253
(Ouyang Guang. On Parameter Estimation for Linear Varying-coefficients Structural EV Models with Replicated Observations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2006, 29(2): 247–253)

[4] 崔恒建, 王强. 变系数结构关系 EV 模型的参数估计. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2005, 41(6): 563–568
(Cui Hengjian, Wang Qiang. Parameter Estimation of Varying Coefficients Structural EV Model. *Journal of Beijing Normal University* (Natural Science), 2005, 41(6): 563–568)

[5] 崔恒建. 变系数线性 EV 模型的参数的调整加权最小二乘估计及其渐近性质. 系统科学与数学, 2007, 27(1): 82–92
(Cui Hengjian. Adjust Weighted LS Estimation for the Parameter in the Varying Coefficients Linear EV Model. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2007, 27(1): 82–92)

[6] 李泽华, 刘万荣, 肖正阳. 变系数 EV 模型系数参数的一步核估计. 湖南师范大学学报 (自然科学版), 2006, 29(1): 14–17
(Li Zehua, Liu Wanrong, Xiao Zhengyang. One Step Kernel Smoothing Estimation of Coefficient Functions for Varying-coefficients EV Models. *Journal of Natural Science of Hunan Normal University*, 2006, 29(1): 14–17)

[7] 李泽华, 刘万荣, 吴小腊. 变系数 EV 模型基于核估计的误差方差估计. 系统科学与数学, 2009, 29(3): 342–352
(Li Zehua, Liu Wanrong, Wu Xiaola. Estimation of the Error Variance Based on Kernel Estimation in Varying-coefficients EV Models. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2009, 29(3): 342–352)

[8] 李泽华. 变系数 EV 模型系数参数的核估计. 湖南师范大学硕士论文, 2006

(Li Zehua. Kernel Smoothing Estimaton for Varying-coefficients EV Models. Master Degree Dissertation of Hunan Normal University, 2006)

[9] You Jinhon, Zhou Yong, Chen Gemai. Corrected Local Polynomial Estimation in Varying-coefficient Models with Measurement Errors. *The Canadian Journal of Statistics*, 2006, 34(3): 391–410

[10] Liang Li, Tom Greene. Varying coefficients Model with Measurement Error. *Biometrics*, 2008, (64): 519–526

[11] 张三国，陈希孺. 有重复观测时 EV 模型修正极大似然估计的相合性. 中国科学 (A 辑), 2000, 30(6): 522–528

(Zhang Sanguo, Chen Xiru. Consistency of Modified MLE in EV Model with Replicated Observations. *Science in China* (Series A), 2000, 30(6): 522–528)

[12] 崔恒建. 有重复观测的部分线性 EV 模型的参数估计. 中国科学 (A 辑), 2004, 34(4): 467–482

(Cui Hengjian. On Parameter Estimation for Partially Linear EV Models with Replicated Observations. *Science in China* (Series A), 2004, 34(4): 467–482)

[13] Cui Hengjian, He Xuming, Zhu Lixing. On Refression Estimators with De-noised Cariables. *Statistics Sinica*, 2002, 12: 1191–1205

On Parameter Estimation for Varying-coefficients EV Model with Replicated Observations

LI Zehua

(*College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou* 510642)

LIU Jinshan

(*College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou* 510642)

WU Xiaola

(*Zhujiang College, South China Agricultural University, Guangzhou* 510900)

(*E-mail: lzhljl@sina.com*)

Abstract Removing the assumption that measurement error variance or reliability ratio is known, we propose the adjust weighted LS estimators (AWLSE) for the estimated parameters of varying-coefficients EV model with replicated observations as well as the variance of model error. Under some mild conditions, we conclude that all of these estimators are strongly consistence and coefficient function estimators are asymptotically normal.

Key words varying-coefficient EV model; measurement error; replicated observations

MR(2000) Subject Classification 62J05; 62H12

Chinese Library Classification O212.1