第 36 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 36 No. 2
2013 年 3 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　March, 2013

n-double 图的连通性*

郭利涛
(厦门理工学院数学系，厦门 361024)
(E-mail: ltguo@yahoo.cn)
覃城阜
(广西师范学院数学科学学院，南宁 530001)
(E-mail: qtclf@163.com)
郭晓峰
(厦门大学数学科学学院，厦门 361005)

摘　要　设 $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个连通图，直积 (direct product) (也称为 Kronecker product, tensor product 和 cross product) $G_1\otimes G_2$ 的点集为 $V(G_1\otimes G_2)=V(G_1)\otimes V(G_2)$, 边集为 $E(G_1\otimes G_2)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2): u_1u_2\in E(G_1),\ v_1v_2\in E(G_2)\}$. 简单图 G 的 n-double 图 $D_n[G]=G\otimes T_n$ ，其中 n 个点的全关系图 T_n 是完全图 K_n 在每个点加上一个自环得到的图. 在本文中，我们研究了 $D_n[G]$ 的 (边) 连通性，超 (边) 连通性.

关键词　n-double 图；(边) 连通性；超 (边) 连通性
MR(2000) 主题分类　05C40
中图分类　O157.5

1　引言

本文中我们假定所考虑的图都是有限无向图. 除非特别说明，我们参见 Bondy, Murty[1] 的术语和定义.

设 $G=(V,E)$ 是一个连通图， $d_G(v)$ 表示 G 中点 v 的度，在不引起混淆的情况下将其简写为 $d(v)$, $\delta(G)$ 是 G 的最小度. 设 $S\subset V$, $G[S]$ 是由 S 导出的 G 的子图， $G-S$ 表示 $V\setminus S$ 导出的 G 的子图，并且 $\overline{S}=V-S$. 我们记 K_n 为 n 阶完全图. 令 $X,Y\subset V$,

本文 2010 年 3 月 22 日收到. 2012 年 10 月 15 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (11171279, 11126321, 11161006, 71201049), 厦门理工学院博士启动金 (YKJ12030R) 和广西自然科学基金 (2012GXNSFBA053005) 资助项目.

$[X,Y]$ 为一个端点在 X 中另一个端点在 Y 中的边集．围长 $g(G)$ 是 G 中最短圈的长度．对 $x,y\in V(G)$, $e=xy$ 表示连接 x 和 y 边．

连通图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 是最小的正整数 k, 使得存在 $S\subset V$, $|S|=k$ 且 $G-S$ 不连通或者导出平凡图 K_1. 类似地，我们可以定义连通图 G 的边连通度 $\lambda(G)$. 图 G 被称为极大 -κ, 如果 $\kappa(G)=\delta(G)$. 图 G 是超连通的或超 -κ 的，如果 G 的每个最小点割是一个点的邻域，即每个最小点割孤立一个点．类似地，我们可以定义极大 -λ 和超 -λ 图.

直积 (direct product) (也称为 Kronecker product, tensor product 和 cross product) $G_1\otimes G_2$ 的点集为 $V(G_1\otimes G_2)=V(G_1)\otimes V(G_2)$, 边集为 $E(G_1\otimes G_2)=\big\{(u_1,v_1)(u_2,v_2): u_1u_2\in E(G_1),\ v_1v_2\in E(G_2)\big\}$.

我们定义简单图 G 的 n-double 图为 $D_n[G]=G\otimes T_n$. n 个点的全关系图 T_n 是完全图 K_n 在每个点加上一个自环得到的图． G 的 double 图一般记 $D[G]=D_2[G]=G\otimes T_2$ 且 $D_n^2[G]=D_n[G]\otimes T_n, D_n^k[G]=D_n^{k-1}[G]\otimes T_n$. 因为一个简单图和任何图的直积是简单图，则 $D_n[G]$ 也是简单图.

在 $D_n[G]$ 中我们有 $(v,h)(w,k)\in E(D_n(G))$ 的充要条件是在 G 中 $vw\in E(G)$. 如果 $V(T_n)=\{1,\cdots,n\}$, 令 $S_i=\big\{(v,i):v\in V(G)\big\}$, 将 S_i 导出的子图记为 G_i. 显然 G_i 是 $D_n[G]$ 的同构于 G 的子图且 $G_i\cap G_j=\varnothing$, $i\neq j$. 特别地， $\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ 是 $D_n[G]$ 的支撑子图．进而，如果在 G 中 $vw\in E(G)$, 则 (v,i) 和 (w,j) 相邻， (v,j) 和 (w,i) 相邻．我们称 $\{G_1,\cdots,G_n\}$ 是 $D_n[G]$ 的典型分解．我们记 $d_{D_n[G]}((v,i))$ 为 $d_D((v,i))$. 如果 $(v,i)\in V(D_n[G])$, 则有 $d_D((v,i))=nd_G(v)$.

2 $D_n[G]$ 的性质

我们首先给出下面的引理.

引理 2.1[2] 对任意图 $G\neq K_1$,

(1) G 是连通的充要条件是 $D[G]$ 是连通的.

(2) 如果 G 是连通的则 $D[G]$ 的每对点都在一个圈上.

类似引理 2.1, 我们有下面的结论.

命题 2.2 对任意图 $G\neq K_1$, 下面的性质成立：

(1) G 连通的充要条件是 $D_n[G]$ 是连通的.

(2) 如果 $g(G)=3$, 则 $g(D_n[G])=3$. 如果 $g(G)\geq 4$, 则 $g(D_n[G])=4$.

(3) $D_n[G]$ 没有桥.

(4) $\kappa(D_n[G])=n\kappa(G)$.

证 设 $\{G_1,\cdots,G_n\}$ 是 $D_n[G]$ 的典型分解.

(1) 因为 G_i 是 $D_n[G]$ 的同构于 G 的子图．如果 G 是连通的，则 $G_i, i=1,2\cdots,n$ 是连通的且任意两个子图之间有边相连．故 $D_n[G]$ 是连通的．反之，如果 G 不连通，则 $D_n[G]$ 不连通.

(2) 注意到如果 $xy\in E(G)$, 则 $(x,i)(y,i)(x,j)(y,j)(x,i)$ 是一个 4- 圈 $(i\neq j)$.

(3) 由引理 2.1 (2) 结论得证.

(4) 设 X 是 G 的最小点割且 $X_i = X \otimes \{i\}$ $(i=1,\cdots,n)$. 因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是 $D_n[G]$ 的一个点割，则 $\kappa(D_n[G]) \le n\kappa(G)$. 下面我只需证明 $|S| \ge n\kappa(G)$ 即可.

如果 S 是 $D_n[G]$ 的一个最小点割，则设 $S_i = S \cap V(G_i)$.

断言 1　对 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，$|S_i| \ge \kappa(G)$.

否则，存在某个 S_i 使得 $|S_i| < \kappa(G)$. 则 $G_i - S_i$ 是连通的．由 $D_n[G]-S$ 是不连通的，必存在 $G_j(j \ne i)$ 使得 $G_j - S_j$ 中存在一些点 (u,j) 满足 (u,j) 在 $G_i - S_i$ 中没有邻点．于是 $N_{G_i}((u,i)) \subseteq S_i$ 及 $|S_i| \ge \kappa(G)$, 矛盾．故断言成立.

由断言我们有：$|S| \ge n\kappa(G)$.

由上面的结果我们可以得到下面的命题.

命题 2.3 任意连通图 $G \ne K_1$，G 是极大 -κ 的充要条件是 $D_n[G]$ 是极大 -κ.

证　$\kappa(G) = \delta(G) \Leftrightarrow \kappa(D_n[G]) = n\kappa(G) = \delta(D_n[G]) = n\delta(G)$.

进而，我们有下面的命题.

命题 2.4 任意连通图 $G \ne K_1$，G 是超 -κ 的充要条件是 $D_n[G]$ 是超 -κ 的.

证　设 G 是超 -κ 的；$\{G_1,\cdots,G_n\}$ 是 $D_n[G]$ 的的典型分解. 我们有 $\kappa(G)=\delta(G)$, 由命题 2.3 我们有 $\kappa(D_n[G]) = n\kappa(G) = \delta(D_n[G]) = n\delta(G)$. 设 $(v,1) \in G_1$ 且 $d_{D_n[G]}((v,1)) = \delta(D_n[G]) = n\delta(G)$, 则 $N_{D_n[G]}((v,1))$ 是 $D_n[G]$ 的最小点割.

设 S 是 $D_n[G]$ 的最小点割但不是最小度点的邻集．令 $S_i = S \cap V(G_i)$; 类似于引理 2.2(4) 的证明我们有 $|S_i| \ge \kappa(G)$. 进一步有 $|S_i| = |S_j| = \kappa(G)$ $(i \ne j)$. 此时如果 S_i 不是 G_i 的点割，则由 $D_n[G]-S$ 是不连通的，必存在 G_j $(j \ne i)$ 使得 $G_j - S_j$ 中存在连通分支 T_j 其中的点在 $G_i - S_i$ 中没有邻点．于是 $T_i = \big\{(u,i) \mid (u,j) \in T_j\big\}$ 是 $G_i - S_i$ 一个分支，矛盾．故 S_i 是 G_i 的点割.

对于每个 S_i 我们定义相应的 $S_i^{(j)} = \big\{(u,j) : (u,i) \in S_i\big\}$, 我们有如下的断言.

断言 2　对任意 i,j，$S_j = S_i^{(j)}$.

否则，存在 S_i, S_j 使得 $S_j \ne S_i^{(j)}$. 由 $|S_j| = |S_i^{(j)}|$, 可知存在存在 $(x,i) \in S_i, (y,j) \in S_j$ $(x \ne y)$, 使得 $(y,i) \in G_i - S_i$，$(x,j) \in G_j - S_j$. 易见 (y,i) 与 $G_j - S_j$ 的每个连通分支相连；(x,j) 与 $G_i - S_i$ 的每个连通分支相连，我们有 $(G_i - S_i) \cup (G_j - S_j)$ 是连通的. 类似上面的证明我们可以得出矛盾．故断言成立.

因此 S_i 是 G_i 的某个点的邻域且由断言得 S 是 $D_n[G]$ 的某个点的邻域．则 $D_n[G]$ 是超 -κ 的.

反之，设 $D_n[G]$ 是超 -κ 的．我们有 $\kappa(D_n[G]) = n\kappa(G) = \delta(D_n[G]) = n\delta(G)$. 由命题 2.3 有 $\kappa(G) = \delta(G)$. 设 G 不是超 -κ 的．设 S_i 和 S_j 分别是 G_i 和 G_j 的最小割．但是 S_i 和 S_j 至少有一个不是 G_i 或者 G_j 的一个点的邻集．因为这些 S_i 的并是 $D_n[G]$ 的最小点割且不是 $D_n[G]$ 的一个点的邻集，与 $D_n[G]$ 是超 -κ 的矛盾．因此 G 是超 -κ 的.

从命题 2.4 我们可以对 k 用归纳法证明得到下面的命题.

命题 2.5 任意连通图 $G \ne K_1$，G 是超 -κ 的的充要条件是 $D_n^k[G]$ 是超 -κ 的.

对 $D_n[G]$ 的边连通度，我们得到了它的下界.

命题 2.6 任对意连通图 $G \ne K_1$, 设 $S = [X,Y]$ 是 $D_n[G]$ 的最小边割, 则 $|S| \ge n\lambda(G)$ 且等号成立当且仅当 $|X| = 1$ 或 $|Y| = 1$ 且其中的点的度数为 $\lambda(G)$. 进一步我们有

$\lambda(D_n[G]) \geq n\lambda(G)$.

证　设 $S=[X,Y]$ 是 $D_n[G]$ 的最小边割，其中 X,Y 是 $D_n[G]-S$ 的两个分支．我们只需证明 $|S|\geq n\lambda(G)$. 设 $\{G_1,\cdots,G_n\}$ 是 $D_n[G]$ 的典型分解．令 $X_i=X\cap V(G_i)$ 和 $Y_j=Y\cap V(G_j)$. 由对称性我们可设 $Y_1,\cdots,Y_k=\emptyset$, $X_{t+1},X_{t+2},\cdots,X_{t+l}=\emptyset$, 其中 $t\geq k$. 其余的 X_i 和 Y_j 都不为空集．于是我们容易得到 $|S|\geq kl|G|\lambda(G)+(n-k-l)^2\lambda(G)+l(n-k-l)\lambda(G)+k(n-k-l)\lambda(G)$.

当 $k=l=0$ 时，我们容易得到 $|S|\geq n^2\lambda(G)>n\lambda(G)$.

当 $k=0$, $l\neq 0$, $|S|\geq (n-l)^2\lambda(G)+l(n-l)\lambda(G)=n(n-l)\lambda(G)\geq n\lambda(G)$. 容易证明此时等号成立当且仅当 $|X|=1$ 其中的点的度数为 $\lambda(G)$.

类似的，我们可以证明当 $l=0,k\neq 0$ ， $|S|\geq n\lambda(G)$. 等号成立当且仅当 $|Y|=1$ 其中的点的度数为 $\lambda(G)$.

当 $k\neq 0$, $l\neq 0$ 时，我们容易得到 $|S|\geq kl|G|\lambda(G)+(n-k-l)^2\lambda(G)\geq 2kl\lambda(G)+(n-k-l)\lambda(G)>n\lambda(G)$.

命题 2.7　任意连通图 $G\neq K_1$, $\lambda(D_n[G])=n\lambda(G)$ 的充要条件是 $\lambda(G)=\delta(G)$.

证　因为 $\delta(G)=\lambda(G)$, 则 $\lambda(D_n[G])\leq\delta(D_n[G])=n\delta(G)=n\lambda(G)$. 由命题 2.6 $\lambda(D_n[G])=n\lambda(G)$.

设 $\lambda(D_n[G])=n\lambda(G)$ 和 $S=[X,Y]$ 是 $D_n[G]$ 的最小边割，其中 X,Y 是 $D_n[G]-S$ 的两个分支．由命题 2.6 $|X|=1$ 或 $|Y|=1$. 不妨设 $|X|=1$ ，则有 $n\lambda(G)=|S|\geq n\delta(G)$, 即 $\lambda(G)=\delta(G)$.

推论 2.8　任意连通图 $G\neq K_1,K_2$, 如果 G 是超 -λ 的，则 $D_n[G]$ 是超 -λ 的．

证　设 G 是超 -λ 的．我们有 $\lambda(G)=\delta(G)$. 由命题 2.7 $\lambda(D_n[G])=n\lambda(G)=n\delta(G)=\delta(D_n[G])$. 如果 $D_n[G]$ 不是超 -λ 的，则有一个最小边割 $S=[X,Y]$ 使得 $|X|,|Y|\geq 2$. $\{G_1,\cdots,G_n\}$ 是 $D_n[G]$ 的典型分解．令 $X_i=X\cap V(G_i)$ 且 $Y_j=Y\cap V(G_j)$.

如果 $X_1,\cdots,X_k=\emptyset$, $X_{k+1},\cdots,X_n\neq\emptyset$ 且 $Y_{k+1},\cdots,Y_n\neq\emptyset$, 则有 $|[X_{k+i},Y_{k+i}]|\geq\lambda(G)$ $(i=1,\cdots,n-k)$ 且 $|[G_j,X_{k+i}]|\geq\delta(G)$ $(j=1,\cdots,k;\ i=1,\cdots,n-k)$.

如果 $k\leq n-2$, 则 $n\lambda(G)=|S|\geq(n-k)\lambda(G)+\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n-k}|[G_j,X_{k+i}]|\geq(n-k)\lambda(G)+2k\delta(G)>n\lambda(G)$, 矛盾．

如果 $k=n-1$, 则 $X=X_n\neq\emptyset$. 因为 $|X|\geq 2$ 且 X 是连通的，我们有 $|[X,G_j]|\geq\delta(G)+1(j=1,\cdots,k)$, 则 $n\lambda(G)=|S|\geq(n-k)\lambda(G)+\sum\limits_{j=1}^{k}|[G_j,X]|>n\lambda(G)$, 矛盾．

如果 $X_1,\cdots,X_n\neq\emptyset$ 及 $Y_1,\cdots,Y_n\neq\emptyset$, 则也可以得到矛盾．

如果 $X_1,\cdots,X_k=\emptyset$ 及 $Y_{k+1},\cdots,Y_n$ 中某些是空集, 则设 $Y_{k+l}=\emptyset$ 且 $X_{k+l}=G$. X_{k+l} 的每个点在 Y_1 中至少有 $\delta(G)$ 点邻点且 $|[X_{k+l},Y_1]|\geq n\delta(G)$. 因此 $n\lambda(G)=|S|>n\lambda(G)$, 矛盾．

注　我们可以验证 $D_n[P_4]$ 是超 -λ 的且 P_4 不是超 -λ 的．因此推论 2.8 的逆不成立．

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory and Its Application. Berlin: Academic Press, 1976

[2] Munarini E, Perelli Cippo C, Scagliola A, Salvi N Z. Double Graphs. *Discrete Math.* 2008, 308: 242–254

Connectivity of n-double Graphs

GUO Litao

(*Department of Mathematics, Xiamen University of Technology, Xiamen* 361024)

(*E-mail: ltguo@yahoo.cn*)

QIN Chengfu

(*School of Mathematics Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning* 530001)

(*E-mail: qtclf@163.com*)

GUO Xiaofeng

(*School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen* 361005)

Abstract Let $G=(V,E)$ be a connected graph. The direct product (also named Kronecker product, tensor product and cross product) $G_1\times G_2$ has vertex set $V(G_1\times G_2)=V(G_1)\times V(G_2)$ and edge set $E(G_1\times G_2)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2): u_1u_2\in E(G_1), v_1v_2\in E(G_2)\}$. We define the *n-double* of a simple graph G as the graph $D_n[G]=G\times T_n$. The total graph T_n on n vertices is the graph associated to the total relation (where every vertex is adjacent to every vertex). It can be obtained from the complete graph K_n by adding a loop to every vertex. In this paper, we study the (edge)connectivity, super (edge)connectivity of $D_n[G]$.

Key words n-double graphs; (edge)connectivity; super (edge)connectivity

MR(2000) Subject Classification 05C40

Chinese Library Classification O157.5