

# 磁盘发电机系统的动力学研究 及其在混沌同步中的应用\*

张付臣<sup>†</sup> 舒永录<sup>‡</sup> 姚宪忠

(重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331)

(E-mail: <sup>†</sup>zhangfuchen1983@163.com; <sup>‡</sup>shuyonglu@163.com)

**摘要** 本文通过构造适当的 Lyapunov 函数, 研究了磁盘发电机系统的最终有界集、正向不变集和全局指数吸引集, 得到了该系统界的四维椭球估计表达式. 然后将所得到的该系统界的估计应用到完全同步之中去, 并做出了相应的数值模拟.

**关键词** 混沌系统; 全局指数吸引集; 数值模拟

**MR(2000) 主题分类** 34C05; 58A05

**中图分类** O175.12

## 1 引言

自从 1963 年美国气象学家 Lorenz 发现了第一个混沌系统以来<sup>[1]</sup>, 混沌作为一种非常有趣的非线性现象被广泛的研究, 混沌也成为了非线性科学中的一个研究热点. 许多混沌系统也应运而生. 1999 年, 香港城市大学陈关荣教授发现了一个与 Lorenz 系统非常相似但拓扑上不等价的非线性混沌系统 -Chen 系统<sup>[2]</sup>. 2002 年, 吕金虎发现了另一个混沌系统 -LÜ 系统<sup>[3]</sup>. 随后更多的混沌系统也相继被发现. 混沌系统在非线形电路, 保密系统, 神经网络, 生物系统等领域都有着广泛的应用.

一个混沌系统的界在混沌系统的控制和同步及其应用中有重要意义, 从技术上讲这也是一项十分艰巨的任务. 1987 年, Leonov 等人研究了 Lorenz 系统的界并得出了该系统的球形和柱形上界<sup>[4]</sup>. 2003 年, 秦文新, 陈关荣讨论了 Chen 系统的有界性, 得到了 Chen 系统的上界估计<sup>[5]</sup>. 2004 年, 廖晓昕讨论了 Lorenz 系统的全局吸引集和正向不变集<sup>[6]</sup>. 2005 年, 李大美等人对 Lorenz 系统族的界进行了估计<sup>[7]</sup>. 2007–2009 年, 李大美, 陆君安等人先后得到 Lorenz-Haken 超混沌系统的四维椭球形最终界与四

本文 2011 年 10 月 24 日收到, 2012 年 4 月 8 日收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(10601071), 重庆市自然科学基金(2009BB3185), 中央高校基本科研业务费(No. CD-JXS 11 10 00 26) 资助项目.

维 Lorenz-Stenflo 系统的最终界和正向不变集<sup>[8,9]</sup>. 2010年, 张付臣等人讨论了 LÜ 系统解的有界性<sup>[10]</sup>. 2011年, 张付臣, 舒永录等人结合全局指数吸引集和迭代定理讨论了一个新的三维混沌系统解的界<sup>[11]</sup>.

研究混沌系统的目的是为了应用, 在混沌长期的研究中, 人们发现混沌同步在保密通讯领域有巨大的应用前景. 因此混沌同步一直亦是混沌控制的研究热点之一. 本文根据 [12] 提出的一类四维连续自治系统, 基于李雅普诺夫稳定性理论给出了此混沌系统的全局指数吸引集估计表达式, 并以此混沌系统为驱动装置, 实现该系统的完全同步.

## 2 混沌系统界的估计

一个最新的磁盘发电机系统, 这个系统的动力学方程为<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -u_1 x_1 + w_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -u_2 x_2 + w_2 x_1, \\ \dot{w}_1 = q_1 - \varepsilon_1 w_1 - x_1 x_2, \\ \dot{w}_2 = q_2 - \varepsilon_2 w_2 - x_1 x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $u_1, u_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, q_1, q_2$  为系统的正参数.  $q_1, q_2$  表示应用到转子的力矩,  $u_1, u_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  均表示影响磁盘发电机系统的耗散率. 当参数  $(u_1, u_2, q_1, q_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.001, 0.0002, 0.19, 0.21, 0.15, 0.15)$ , 且初值为  $(x_1(0), x_2(0), w_1(0), w_2(0)) = (3.2, 8.5, 3.5, 2.0)$  时, 系统 (2.1) 的轨线相图, 如图 1 所示. 当  $(u_1, u_2, q_1, q_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.2, 0.5, 5.9, 9.15, 0.5, 0.1)$ , 且初值为  $((x_1(0), x_2(0), \omega_1(0), \omega_2(0)) = (2.2, 2.0, 10.5, 20)$  时, 系统 (2.1) 的轨线相图, 如图 2 所示.

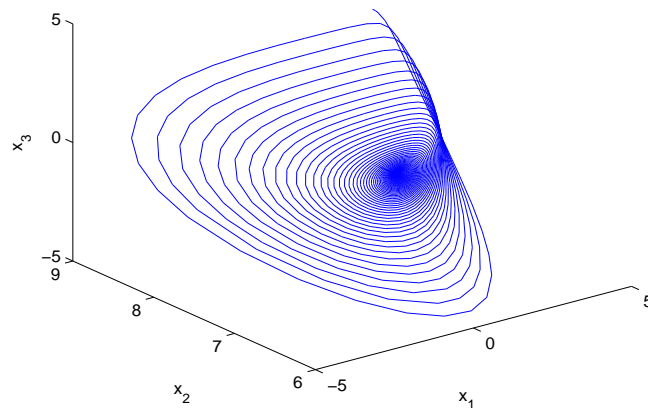


图 1 系统 (2.1) 在  $(u_1, u_2, q_1, q_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.001, 0.0002, 0.19, 0.21, 0.15, 0.15)$  时投影到  $(x_1, x_2, x_3)$  平面上轨线的相图

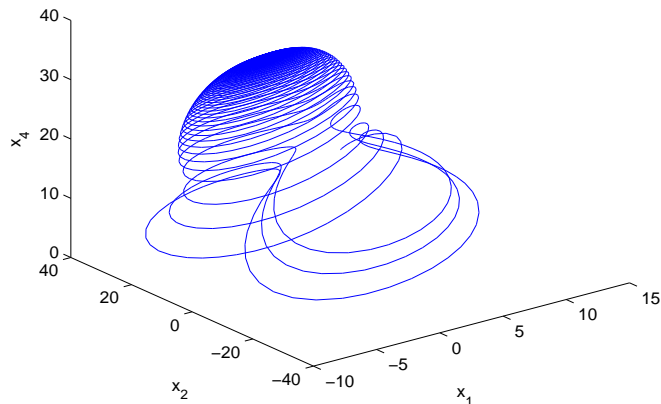


图 2 系统 (2.1) 在  $(u_1, u_2, q_1, q_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.2, 0.5, 5.9, 9.15, 0.5, 0.1)$  时投影到  $(x_1, x_2, x_4)$  平面上轨线的相图

考虑系统

$$\dot{X} = f(X), \quad X \in R^4, \tag{2.2}$$

设  $X = (x_1, x_2, w_1, w_2)$  为系统 (2.2) 的状态向量,  $\Omega \subset R^4$  为包含原点的紧集,  $t_0 \geq 0$  为初始时刻,  $X(t, t_0, X_0)$  表示满足  $X(t, t_0, X_0) = X_0$  的系统 (2.2) 的解, 在不会混淆的情况下, 该解我们简记为  $X(t)$ . 解向量  $X(t, t_0, X_0)$  到集合  $\Omega$  的距离定义为  $\rho(X(t, t_0, X_0), \Omega) = \inf_{Y \in \Omega} \|X(t, t_0, X_0) - Y\|$ .

**定义 1**<sup>[6]</sup> 若在  $R^4$  内存在一个紧集  $\Omega$ , 使得对于  $\forall X_0 \in \Omega$ , 当  $t \geq t_0$  时, 恒有  $X(t, t_0, X_0) \in \Omega$ , 则称  $\Omega$  为系统 (2.2) 的一个正向不变集.

**定义 2**<sup>[6]</sup> 对于系统 (2.2), 如果存在广义正定径向无界的 Lyapunov 函数  $V(X(t))$  和正实数  $L > 0, \alpha > 0$ ,  $\forall X_0 \in R^4$ , 当  $V(X(t)) > L, V(X(t_0)) > L$  时, 存在指数估计式

$$(V(x(t)) - L) \leq (V(x_0) - L)e^{-\alpha(t-t_0)},$$

那么系统 (2.2) 就说是全局指数吸引或是 Lagrange 意义下全局指数稳定, 并且  $\Omega = \{X | V(X) \leq L\}$  被称为该系统的一个全局指数吸引集.

下面我们将研究当参数  $u_1 > 0, u_2 > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, q_1 > 0, q_2 > 0$  时, 系统 (2.1) 的最终有界集, 正向不变集和全局指数吸引集.

**定理 1** 对于参数  $u_1 > 0, u_2 > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, q_1 > 0, q_2 > 0$ , 系统 (2.1) 存在一个正实数  $l_0 > 0$  使集合

$$\Omega = \{(x_1, x_2, w_1, w_2) | x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \leq l_0\} \tag{2.3}$$

是系统 (2.1) 的最终有界集和正向不变集. 其中  $l_0 = \max_{(x_1, x_2, w_1, w_2) \in \Gamma} (x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2)$ .

证 定义广义正定径向无界的 Lyapunov 函数

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \quad (2.4)$$

沿着系统 (2.1) 的轨线对时间  $t$  求导数

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 2w_1\dot{w}_1 + 2w_2\dot{w}_2 \\ &= 2x_1(-u_1x_1 + w_1x_2) + 2x_2(-u_2x_2 + w_2x_1) + 2w_1(q_1 - \varepsilon_1w_1 - x_1x_2) \\ &\quad + 2w_2(q_2 - \varepsilon_2w_2 - x_1x_2) \\ &= -2u_1x_1^2 - 2u_2x_2^2 - 2\varepsilon_1w_1^2 - 2\varepsilon_2w_2^2 + 2q_1w_1 + 2q_2w_2. \end{aligned}$$

让  $\dot{V} = 0$ , 我们得到下列四维椭球面  $\Gamma$ :

$$2u_1x_1^2 + 2u_2x_2^2 + 2\varepsilon_1\left(w_1 - \frac{q_1}{2\varepsilon_1}\right)^2 + 2\varepsilon_2\left(w_2 - \frac{q_2}{2\varepsilon_2}\right)^2 = \frac{q_1^2}{2\varepsilon_1} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon_2}. \quad (2.5)$$

方程 (2.5) 是一个四维的椭球面. 在  $\Gamma$  外部, 也就是当

$$2u_1x_1^2 + 2u_2x_2^2 + 2\varepsilon_1\left(w_1 - \frac{q_1}{2\varepsilon_1}\right)^2 + 2\varepsilon_2\left(w_2 - \frac{q_2}{2\varepsilon_2}\right)^2 > \frac{q_1^2}{2\varepsilon_1} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon_2}$$

时, 我们有  $\dot{V} < 0$ , 这就说明等值域面  $V = c$  是单调递减的, 而在  $\Gamma$  内部, 我们有  $\dot{V} > 0$ , 因此,  $V(X) = x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2$  只能在四维椭球面  $\Gamma$  上取得最大值.  $\max_{(x_1, x_2, w_1, w_2) \in \Gamma} V$

是  $\Gamma$  上的点到原点  $(0, 0, 0, 0)$  的距离平方的最大值. 因为  $\Gamma$  是一个有界闭集,  $V(X)$  在  $\Gamma$  上连续, 由连续函数在有界闭集上存在最大最小值定理,  $V(X)$  在  $\Gamma$  上可以取到最大值. 令此最大值记为  $l_0$ , 即

$$l_0 = \max_{(x_1, x_2, w_1, w_2) \in \Gamma} V.$$

对于 (2.3) 中的集合  $\Omega$ , 我们有  $\Gamma \subset \Omega$ . 我们接下来要证

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(X(t), \Omega) = 0, \quad (2.6)$$

$X(t) = (x_1(t), x_2(t), w_1(t), w_2(t))$ . 我们用反证法证明 (2.6) 式成立.

若不然, 则设系统 (2.1) 的轨线恒停留在  $\Omega$  之外, 因为  $V(X)$  在  $\Omega$  之外严格单调下降, 故极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(X(t)) = V^* > l_0.$$

令

$$s = \inf_{X \in D} (-\dot{V}(X(t))),$$

其中,  $D = \{X(t) \mid V^* \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0))\}$ ,  $t_0$  初始时间, 这里  $V^* > 0, s > 0$ , 所以有

$$\frac{dV(X(t))}{dt} \leq -s, \quad (2.7)$$

从而  $t \rightarrow +\infty$  时, 我们有  $0 \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0)) - s(t - t_0) \rightarrow -\infty$ , 这显然是一个矛盾. 所以 (2.6) 式成立. 所以说  $\Omega$  是系统 (2.1) 的最终有界集.

最后我们说  $\Omega$  也是系统 (2.1) 的正向不变集, 原因如下:

假设  $V(X(t))$  在  $\Gamma$  上的点  $P_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{w}_0)$  达到它的最大值. 因为  $\Gamma \subset \Omega$ , 对于  $\Gamma$  上的任何点 ( $X(t) \neq P_0$ ), 我们有  $\dot{V}(X(t)) < 0$ , 因此系统 (2.1) 的任何轨线  $X(t) (X(t) \neq P_0)$  将进入  $\Omega$  内. 当  $X(t) = P_0$  时, 由连续定理  $X(t)$  将进入  $\Omega$  内. 总结以上几种情况, 我们推断出  $\Omega$  是系统 (2.1) 的正向不变集, 所以  $\Omega$  是系统 (2.1) 的最终有界集和正向不变集. 从而定理 1 得证.

**定理 2** 令

$$V_1(x_1, x_2, w_1, w_2) = V_1(X) = x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2,$$

$$L_2 = \frac{q_1^2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta} + \frac{q_2^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta}, \quad \beta = \min\{u_1, u_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

则系统 (2.1) 有全局指数吸引集估计式:

$$V_1(X(t)) - L_2 \leq (V_1(X(t_0)) - L_2)e^{-\beta(t-t_0)}, \quad (2.8)$$

特别的, 集合

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, w_1, w_2) \mid V_1(X(t)) \leq L_2\}$$

$$= \{(x_1, x_2, w_1, w_2) \mid x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \leq L_2\} \quad (2.9)$$

为系统 (2.1) 的全局指数吸引集.

证 令

$$V_1(x_1, x_2, w_1, w_2) = x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2, \quad f_1(x) = -u_1 x_1^2, \quad f_2(x) = -u_2 x_2^2,$$

$$f_3(w) = -\varepsilon_1 w_1^2 + 2q_1 w_1, \quad f_4(w) = -\varepsilon_2 w_2^2 + 2q_2 w_2$$

和

$$\frac{df_1(x)}{dx} = -2u_1 x_1 = 0, \quad \frac{df_2(x)}{dx} = -2u_2 x_2 = 0,$$

$$\frac{df_3(w)}{dw} = -2\varepsilon_1 w_1 + 2q_1 = 0, \quad \frac{df_4(w)}{dw} = -2\varepsilon_2 w_2 + 2q_2 = 0.$$

我们得到上述方程的解  $x_1 = 0, x_2 = 0, w_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_1}, w_2 = \frac{q_2}{\varepsilon_2}$ . 因为  $u_1 > 0, u_2 > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, q_1 > 0, q_2 > 0$ , 从而有

$$\sup_{x \in R} f_1(x) + \sup_{x \in R} f_2(x) + \sup_{w \in R} f_3(w) + \sup_{w \in R} f_4(w) = \frac{q_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{q_2^2}{\varepsilon_2}.$$

当  $V_1(X(t)) \geq L_2$  时, 沿着系统 (2.1) 的轨线对时间求导数, 我们有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(2.1)} &= 2x_1(-u_1x_1 + w_1x_2) + 2x_2(-u_2x_2 + w_2x_1) \\ &\quad + 2w_1(q_1 - \varepsilon_1w_1 - x_1x_2) + 2w_2(q_2 - \varepsilon_2w_2 - x_1x_2) \\ &= -2u_1x_1^2 - 2u_2x_2^2 \\ &\quad - 2\varepsilon_1w_1^2 + 2q_1w_1 - 2\varepsilon_2w_2^2 + 2q_2w_2 \\ &= -u_1x_1^2 - u_2x_2^2 - \varepsilon_1w_1^2 - \varepsilon_2w_2^2 - u_1x_1^2 - u_2x_2^2 - \varepsilon_1w_1^2 - \varepsilon_2w_2^2 + 2q_1w_1 + 2q_2w_2 \\ &\leq -\beta V_1 + f_1(x) + f_2(x) + f_3(w) + f_4(w) \\ &\leq -\beta V_1 + \sup_{x \in R} f_1(x) + \sup_{x \in R} f_2(x) + \sup_{w \in R} f_3(w) + \sup_{w \in R} f_4(w) \\ &\leq -\beta V_1 + \frac{q_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{q_2^2}{\varepsilon_2} \leq -\beta V_1 + \beta L_2 \leq 0, \end{aligned}$$

对上述不等式两边积分有

$$\begin{aligned} V_1(X(t)) &\leq V_1(X(t_0))e^{-\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \beta L_2 e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \\ &= V_1(X(t_0))e^{-\beta(t-t_0)} + L_2(1 - e^{-\beta(t-t_0)}), \end{aligned}$$

从而当  $V_1(X(t)) \geq L_2, V_1(X(t_0)) \geq L_2$  时, 有全局指数估计式

$$V_1(X(t)) - L_2 \leq (V_1(X(t_0)) - L_2)e^{-\beta(t-t_0)},$$

根据定义, 对上述公式两边取上极限便有

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} V_1(X(t)) \leq L_2,$$

即,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x_1, x_2, w_1, w_2) \mid V_1(X(t)) \leq L_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, w_1, w_2) \mid x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \leq L_2\}, \end{aligned}$$

为系统 (2.1) 的全局指数吸引集. 其中,

$$L_2 = \begin{cases} \frac{q_1^2 \varepsilon_2 + q_2^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}, & \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2, \varepsilon_1 \leq u_1, \varepsilon_1 \leq u_2, \\ \frac{q_1^2 \varepsilon_2 + q_2^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2^2}, & \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq u_1, \varepsilon_2 \leq u_2, \\ \frac{q_1^2 \varepsilon_2 + q_2^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 u_1}, & u_1 \leq \varepsilon_1, u_1 \leq \varepsilon_2, u_1 \leq u_2, \\ \frac{q_1^2 \varepsilon_2 + q_2^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 u_1}, & u_2 \leq \varepsilon_1, u_2 \leq \varepsilon_2, u_2 \leq u_1. \end{cases}$$

### 3 有界性在同步中的应用

**定义 3** 对于两个非线性混沌系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = g(x, y). \quad (3.2)$$

这里  $x \in R^n$ ,  $y \in R^n$ ,  $f, g: R^n \rightarrow R^n$  均为连续函数. 假设 (3.1) 与 (3.2) 的解分别为  $x(t, x_0)$  和  $y(t, y_0)$ . 若它们满足条件  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0) - y(t, y_0)\| = 0$ , 我们就说是系统 (3.1) 与 (3.2) 是同步的.

将系统 (2.1) 作为驱动系统, 定义响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -u_1 y_1 + y_2 z_1, \\ \dot{y}_2 = -u_2 y_2 + y_1 z_2 + v_2, \\ \dot{z}_1 = q_1 - \varepsilon_1 z_1 - y_1 y_2 + v_3, \\ \dot{z}_2 = q_2 - \varepsilon_2 z_2 - y_1 y_2 + v_4. \end{cases} \quad (3.3)$$

这里  $v_2, v_3, v_4$  是控制向量, 其中  $v_2 = k(y_2 - x_2)$ ,  $v_3 = y_1(y_2 - x_2)$ ,  $v_4 = y_1(y_2 - x_2)$ ,  $k$  为负参数且与  $u_1, u_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, q_1, q_2$  有关.

**定理 3** 当  $k < u_2 - \frac{4\rho l^2 \varepsilon_2 + 2\rho l^3 + u_1 l^2}{4\rho \varepsilon_2 u_1 - \rho^2 l^2}$ , 这里  $0 < \rho < \frac{4\varepsilon_2 u_1}{l^2}$  是正实数, 驱动系统 (2.1) 能和响应系统 (3.3) 达到完全同步.

证 由定理 2, 可以假设  $|x_1| \leq \sqrt{L_2} = l$ ,  $|x_2| \leq \sqrt{L_2} = l$ ,  $|w_1| \leq \sqrt{L_2} = l$ ,  $|w_2| \leq \sqrt{L_2} = l$ .

令  $e_1 = y_1 - x_1$ ,  $e_2 = y_2 - x_2$ ,  $e_3 = z_1 - w_1$ ,  $e_4 = z_2 - w_2$ , 则系统 (2.1) 和系统 (3.3) 的误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -u_1 e_1 + z_1 e_2 + x_2 e_3, \\ \dot{e}_2 = -u_2 e_2 + z_2 e_1 + x_1 e_4 + v_2, \\ \dot{e}_3 = -\varepsilon_1 e_3 - y_1 e_2 - x_2 e_1 + v_3, \\ \dot{e}_4 = -\varepsilon_2 e_4 - y_1 e_2 - x_2 e_1 + v_4. \end{cases} \quad (3.4)$$

取正定 Lyapunov 函数  $V(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \rho e_4^2$ , 这里  $\rho$  是满足  $0 < \rho < \frac{4\varepsilon_2 u_1}{l^2}$  的正实数. 沿着 (3.4) 的正半轨线对时间  $t$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= 2e_1 \dot{e}_1 + 2e_2 \dot{e}_2 + 2e_3 \dot{e}_3 + 2\rho e_4 \dot{e}_4 \\ &= 2e_1(-u_1 e_1 + z_1 e_2 + x_2 e_3) + 2e_2(-u_2 e_2 + z_2 e_1 + x_1 e_4 + v_2) \\ &\quad + 2e_3(-\varepsilon_1 e_3 - y_1 e_2 - x_2 e_1 + v_3) + 2\rho e_4(-\varepsilon_2 e_4 - y_1 e_2 - x_2 e_1 + v_4) \\ &= 2e_1(-u_1 e_1 + z_1 e_2 + x_2 e_3) + 2e_2(-u_2 e_2 + z_2 e_1 + x_1 e_4 + k e_2) \\ &\quad + 2e_3(-\varepsilon_1 e_3 - y_1 e_2 - x_2 e_1 + y_1 e_2) + 2\rho e_4(-\varepsilon_2 e_4 - y_1 e_2 - x_2 e_1 + y_1 e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2u_1e_1^2 - 2(u_2 - k)e_2^2 - 2\varepsilon_1e_3^2 - 2\rho\varepsilon_2e_4^2 + 2(z_1 + z_2)e_1e_2 - 2\rho x_2e_1e_4 + 2x_1e_2e_4 \\
&\leq -2u_1e_1^2 - 2(u_2 - k)e_2^2 - 2\varepsilon_1e_3^2 - 2\rho\varepsilon_2e_4^2 + 4l|e_1||e_2| + 2\rho l|e_1||e_4| + 2l|e_2||e_4| \\
&= -E^TPE.
\end{aligned}$$

这里,

$$E = [|e_1|, |e_2|, |e_3|, |e_4|]^T, \quad P = \begin{bmatrix} 2u_1, & -2l, & 0, & -\rho l \\ -2l, & 2(u_2 - k), & 0, & -l \\ 0, & 0, & 2\varepsilon_1, & 0 \\ -\rho l, & -l, & 0, & 2\rho\varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

为确保误差系统 (3.4) 的零解是渐近稳定的, 对称矩阵  $P$  应为正定矩阵, 也就是说矩阵  $P$  必须满足下列条件:

- (i)  $2u_1 > 0$ ,
- (ii)  $4u_1(u_2 - k) - 4l^2 > 0$ ,
- (iii)  $2\varepsilon_1[4u_1(u_2 - k) - 4l^2] > 0$ ,
- (iv)  $(16\rho\varepsilon_1\varepsilon_2u_1 - 4\varepsilon_1\rho^2l^2)(u_2 - k) > 16\rho l^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1\rho l^3 + 4l\varepsilon_1(u_1l + \rho l^2)$ ,

经过简单计算, 当

$$0 < \rho < \frac{4\varepsilon_2u_1}{l^2}, \quad k < u_2 - \frac{4\rho l^2\varepsilon_2 + 2\rho l^3 + u_1l^2}{4\rho\varepsilon_2u_1 - \rho^2l^2}, \quad k < u_2 - \frac{l^2}{u_1}$$

时, 条件 (i)–(iv) 式同时得到满足. 当

$$0 < \rho < \frac{4\varepsilon_2u_1}{l^2}, \quad k < \min \left\{ u_2 - \frac{l^2}{u_1}, u_2 - \frac{4\rho l^2\varepsilon_2 + 2\rho l^3 + u_1l^2}{4\rho\varepsilon_2u_1 - \rho^2l^2} \right\} = u_2 - \frac{4\rho l^2\varepsilon_2 + 2\rho l^3 + u_1l^2}{4\rho\varepsilon_2u_1 - \rho^2l^2}$$

时,  $\dot{V}(e) < 0$ , 此时误差系统 (3.4) 的零解渐近稳定, 即响应系统 (3.3) 和驱动系统 (2.1) 实现完全同步.

#### 4 数值模拟

为了验证理论结果, 我们用计算机进行数值模拟. 此时驱动系统 (2.1) 和响应系统 (3.3) 的初始条件分别取为  $(x_1(0), x_2(0), w_1(0), w_2(0)) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$  和  $(y_1(0), y_2(0), z_1(0), z_2(0)) = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$ , 当  $u_1 = 0.2$ ,  $u_2 = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 0.1$ ,  $q_1 = 5.9$ ,  $q_2 = 9.15$  (见 [12]) 时, 从定理 2 不难求得  $l = \sqrt{L_2} = 95.2$ , 当时间  $t \rightarrow +\infty$  时, 系统 (2.1) 的轨线包含在下列的四维球  $\Omega_1$  内,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x_1, x_2, w_1, w_2) \mid V_1(X(t)) \leq L_2\} \\
&= \{(x_1, x_2, w_1, w_2) \mid x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \leq L_2 = (95.2)^2\},
\end{aligned}$$

如下图 3 所示. 根据定理 3 可以选择控制器中的负系数  $k = -500$ , 驱动系统同步于响应系统同步效果, 如下图 4 所示. 当  $(u_1, u_2, q_1, q_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.001, 0.0002, 0.19, 0.21, 0.15,$



0.15) (见 [12]) 时, 根据定理 2, 这时  $L_2 = \frac{q_1^2 \varepsilon_2 + q_2^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 u_1} = 534.67 = R^2$ , 球  $\Omega_2$  的半径  $R = \sqrt{L_2} = 23.1$ , 当时间  $t \rightarrow +\infty$  时, 系统 (2.1) 的轨线包含在下列的四维球  $\Omega_2 = \{(x_1, x_2, w_1, w_2) | V_1(X(t)) \leq L_2\} = \{(x_1, x_2, w_1, w_2) | x_1^2 + x_2^2 + w_1^2 + w_2^2 \leq L_2 = 534.67\}$  内部, 如下图 5 所示. 其中在图 1-2, 图 3-5 中, 坐标系  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  代表坐标系  $(x_1, x_2, w_1, w_2)$ .

## 5 结论

通过构造合适的李雅普诺夫函数, 研究了磁盘发电机系统在  $u_1, u_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, q_1, q_2$  均为正参数下系统的最终有界集、全局指数吸引集、正向不变集并得到了四维椭球估计表达式. 然后根据定理 2 把  $x_1, x_2, w_1, w_2$  的界运用到混沌系统的完全同步之中去, 最后数值模拟显示了同步方案的可行性. 本文对于系统 (2.1) 的不同正参数只讨论了单个吸引域的情况, 对于 [13-14] 中多卷波的多吸引域的情况, 要用此方法构造出满足吸引域条件的所有李雅普诺夫函数是比较困难的, 因此对于求 [13-14] 中多卷波的多吸引域是比较困难的一件事情. 对于 [13-14] 中多卷波的多吸引域的研究是作者未来工作的重点. 同时, 对于 [2] 中 Chen 系统和 [3] 中 LÜ 系统解的有界性的讨论仍是一件比较困难和有意义的事情.

**致谢** 本文作者感谢审稿专家提出的宝贵建议和香港城市大学陈关荣教授给予的无私帮助, 在此表示衷心的感谢!

## 参 考 文 献

- [1] Lorenz E N. Deterministic Non-periodic Flows. *J. Atmos. Sci.*, 1963, 20: 130-141
- [2] Chen G R, Ueta T. Yet Another Chaotic Attractor. *Int. J. Bifurcat. Chaos.*, 1999, 9(7): 1465-1466
- [3] Lü J H, Chen G R. A New Chaotic Attractor Coined. *Int. J. Bifurcat. Chaos.*, 2002, 12(3): 659-661
- [4] Leonov G A, Bunin A, Kokschn N. Attractor Localization of the Lorenz System. *ZAMM.*, 1987, 67: 649-656
- [5] Qin X W, Chen G R. On the Boundedness of Solutions of the Chen System. *J. Math. Ana. Appl.*, 2007, 329: 445-451
- [6] Liao X X. On the Global Basin of Attraction and Positively Invariant Set for the Lorenz Chaotic System and its Application in Chaos Control and Synchronization. *Sci. China (Series E)*, 2004, 34(12): 1404-1419
- [7] Li D M, Lu J A, Wu X Q, Chen G R. Estimating the Bounds for the Lorenz Family of Chaotic Systems. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 23(2): 529-534
- [8] Li D M, Lu J A, Wu X Q. Estimating the Ultimate Bound and Positively Invariant Set for the Hyperchaotic Lorenz-Haken System. *Chaos Solitons Fractals*, 2009, 39: 1290-1296
- [9] Wang P, Li D M, Hu Q L. Bounds of the Hyper-chaotic Lorenz-Stenflo System. *Commun. Nonlinear*

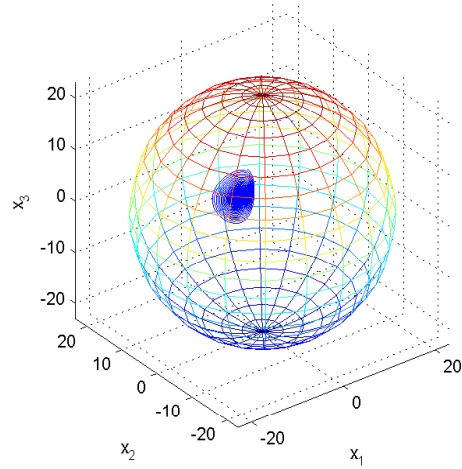


图 3 系统 (2.1) 在平面上  $(x_1, x_2, x_3)$  的轨线包含在三维球内

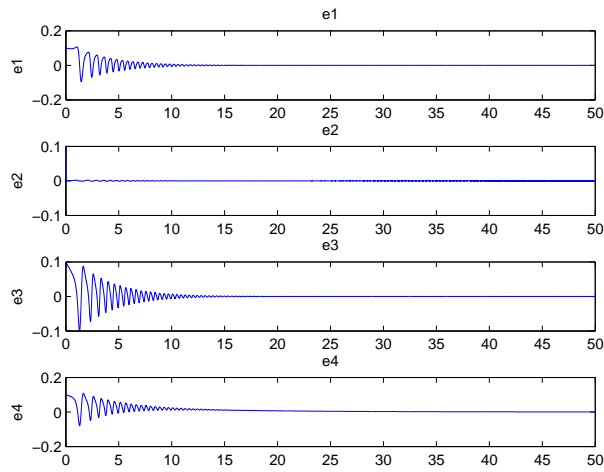


图 4 系统 (2.1) 和系统 (3.3) 上述初始条件下当  $k = -500$  时的同步效果

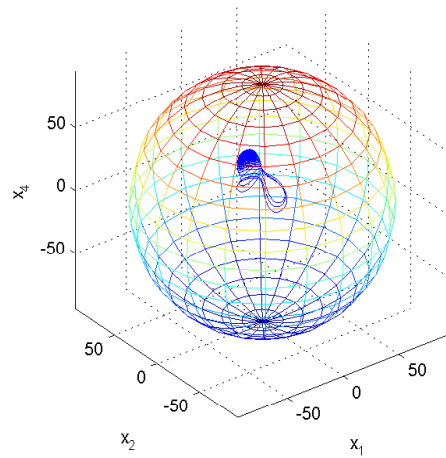


图 5 系统 (2.1) 在平面  $(x_1, x_2, x_4)$  上的轨线包含在三维球内

- Sci. Numer. Simul.*, 2010, 15: 2514–2520
- [10] Zhang F C, Mu C L, Li X W. On the Boundness of Some Solutions of the Lü System. *Int. J. Bifurcat. Chaos.*, 2012, 22(1): 1250015-1-1250015-5
- [11] Zhang F C, Shu Y L, Yang H L. Bounds for a New Chaotic System and its Application in Chaos Synchronization. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2011, 16(3): 1501–1508
- [12] Awad E G, Rizk Y. Chaos and Optimal Control of a Coupled Dynamo with Different Time Horizons. *Chaos Solitons Fractals*, 2009, 41: 698–710
- [13] Lü J H, Chen G R. Generating Multiscroll Chaotic Attractors: Theories, Methods and Applications. *Int. J. Bifurcat. Chaos.*, 2006, 16(4): 775–858
- [14] Lü J H, Chen G R, Yu X, Leung H. Design and Analysis of Multi-scroll Chaotic Attractors from Saturated Function Series. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2004, 51(12): 2476–2490

## The Dynamical Analysis of a Disk Dynamo System and Its Application in Chaos Synchronization

ZHANG FUCHEN<sup>†</sup> SHU YONGLU<sup>‡</sup> YAO XIANZHONG

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331)

(Email: <sup>†</sup>zhangfuchen1983@163.com; <sup>‡</sup>shuyonglu@163.com)

**Abstract** The ultimate bound, positively invariant set and globally exponentially attractive set of a disk dynamo system are investigated via constructing a Lyapunov function. Firstly, we derive a four-dimensional ellipsoidal bound for this system. Secondly, the boundness of the system is applied to the complete chaos synchronization. Finally, the corresponding numerical simulations are performed.

**Key words** chaotic system; globally exponentially attractive set; numerical simulations

**MR(2000) Subject Classification** 34C05; 58A05

**Chinese Library Classification** O175.12