

线载荷作用下圆柱壳环向弯曲变形的研究¹⁾

李伟建²⁾ 潘存云³⁾ 王荣吉 张 湘

(国防科学技术大学机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

摘要 通过引入单三角级数形式的位移函数, 求解了法向任意分布载荷作用下对边简支时圆柱壳的环向弯曲问题, 把线载荷近似为微元矩形区的分布载荷, 推导出了线载荷作用下圆柱壳的环向弯曲变形计算式, 并给出了线载荷为均布和线性变化时的具体解. 计算表明, 该种边界约束条件下圆柱壳的环向弯曲变形位移分布的理论计算结果与有限元分析结果基本吻合.

关键词 圆柱壳, 环向弯曲变形, 三角级数, 有限元

中图分类号: O342 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2010)04-035-05

CIRCUMFERENTIAL BENDING DEFORMATION OF CYLINDRICAL SHELL UNDER LINEAR LOAD¹⁾

LI Weijian²⁾ PAN Cunyun³⁾ WANG Rongji ZHANG Xiang

(College of Mechatronic Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract With the displacement function expressed in single trigonometric series, the circumferential bending problem of the cylindrical shell under arbitrary normal distributed load and simply supported in the opposite edges, is solved. Approximately taking the distributed load as a linear load in the infinitesimal rectangle region, the circumferential bending deformation formula of the cylindrical shell under the linear load is deduced. The special formula is obtained when the linear load is uniformly-distributed and linearly varying. The results show that, under given boundary constraints, the displacement distribution of the cylindrical shell circumferential bending deformation calculated by the theoretical method is consistent with that calculated by FEA.

Key words cylindrical shell, circumferential bending deformation, trigonometric series, finite element

引 言

壳体结构广泛应用于各种工程结构, 因而对壳体的静力学和动力学问题有大量的研究成果. 近年来, 随着工程应用的深入, 在动力学研究方面, 复合材料壳体^[1-2], 层合结构壳体^[3-4]的稳定性和动力响应问题成了研究的热点. 而在静力学研究方面, Ai-Hassani 等^[5]研究了复合材料管在不同边界条件不同外载荷作用下的屈曲问题, Liang 等^[6]研究了轴向变厚度圆柱壳在任意轴对称侧向分布载荷作用

下, 体积保持不变时的强度优化设计问题, 李东风等^[7]研究了圆柱壳在集中法向载荷、集中温度载荷作用下的奇异解问题. 从研究方法来看, 主要采用三角级数求解方法^[1-2,5]和有限元方法^[3-4]来处理高阶的微分方程, 这两种方法均用基函数来表示位移, 前者的基为三角函数, 而后者的基为形函数.

壳体的静力分析中, 不同的边界条件给壳体问题的求解带来了一定的困难, 因而, 求解时对边界条件的正确分析, 以及对基函数的设计很重要. 文献^[8-9]求解的是分布载荷作用下圆柱壳轴向(α 向)弯

2009-10-02 收到第 1 稿, 2010-01-09 收到修改稿.

1) 湖南省自然科学基金(09JJ3108), 中国博士后科学基金(20080441284).

2) 李伟建, 博士研究生, 研究方向: 新型机械传动. E-mail: lwj-wr@163.com

3) 潘存云, 博士生导师, E-mail: pancunyun@sina.com

曲问题；对于环向 (β 向) 弯曲问题的研究比较少。本文通过引入单三角级数形式的位移函数，并分析边界条件，求解圆柱壳在线载荷作用下的环向弯曲变形问题，给出线载荷为均布和线性变化时的具体解，并将实例计算结果与有限元计算结果进行比较，以验证理论分析结果。

1 分析模型

在圆柱壳上建立图 1 所示的曲线坐标系，其中 $\beta = 0$ 和 $\beta = b$ 的边界为简支边，而 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = a$ 的边界为自由边，壳体中面半径为 r ，厚度为 t ，壳体材料的弹性模量和泊松比分别为 E 和 ν 。

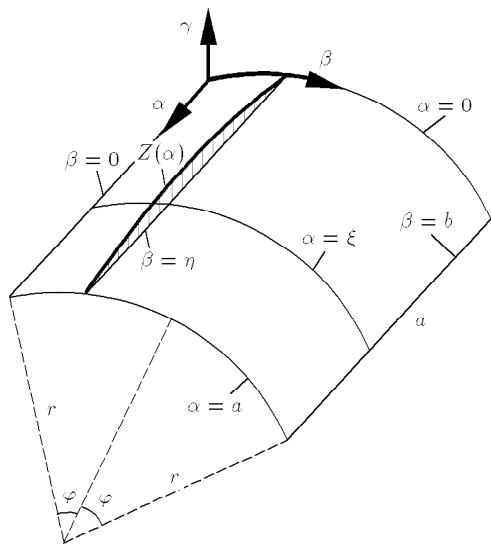


图 1 圆柱壳弯曲分析模型

2 法向分布载荷下环向弯曲变形的计算

法向载荷作用下圆柱壳的基本微分方程为^[9]

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{r^2} + \frac{t^2}{12} \nabla^4 w &= \frac{1-\nu^2}{Et} Z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若引入位移函数 $F = F(\alpha, \beta)$ ，则中面位移可表示为^[9]

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) F \\ v &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] F \\ w &= r \nabla^4 F \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在求解对边简支圆柱壳受有法向分布载荷作用的弯曲问题时，可以推广李维对矩形薄板的解法，取位移函数为单三角级数

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\alpha) \sin \frac{m\pi\beta}{b} \quad (3)$$

容易验证，由式 (3) 确定的位移和内力总能满足圆柱壳两侧边 ($\beta = 0$ 和 $\beta = b$) 简支的边界条件，即

$$(u, w, N_2, M_2)_{\beta=0} = 0, \quad (u, w, N_2, M_2)_{\beta=b} = 0$$

为了求得式 (3) 中的 $\psi_m(\alpha)$ ，将法向分布载荷 $Z(\alpha, \beta)$ 展为与式 (3) 右边相同的三角级数的形式

$$Z(\alpha, \beta) = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^b Z(\alpha, \beta) \sin \frac{m\pi\beta}{b} d\beta \right] \sin \frac{m\pi\beta}{b} \quad (4)$$

联立式 (1)~ 式 (4)，可获得求解 $\psi_m(\alpha)$ 的 8 阶常微分方程

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - \lambda_m^2 \right)^4 + \frac{Et}{r^2 D} \frac{d^4}{d\alpha^4} \right] \psi_m(\alpha) = \frac{2}{rDb} \int_0^b Z(\alpha, \beta) \sin \lambda_m \beta d\beta \quad (5)$$

式中， $\lambda_m = m\pi/b$ ， $D = Et^3/12/(1-\nu^2)$ 。这个微分方程的特征值 r_m 为 4 对复根，假定其为

$$\pm a_m \pm ib_m, \quad \pm c_m \pm id_m$$

又根据式 (5) 右边积分的结果可以选取该微分方程的一个特解 $\psi_m^*(\alpha)$ ，因而 $\psi_m(\alpha)$ 的解总可以表示为

$$\begin{aligned} \psi_m(\alpha) &= \psi_m^*(\alpha) + \\ &C_{1m} \text{cha}_m \alpha \sin b_m \alpha + C_{2m} \text{cha}_m \alpha \cos b_m \alpha + \\ &C_{3m} \text{sha}_m \alpha \cos b_m \alpha + C_{4m} \text{sha}_m \alpha \sin b_m \alpha + \\ &C_{5m} \text{chc}_m \alpha \sin d_m \alpha + C_{6m} \text{chc}_m \alpha \cos d_m \alpha + \\ &C_{7m} \text{shc}_m \alpha \cos d_m \alpha + C_{8m} \text{shc}_m \alpha \sin d_m \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) 中的任意常数 $C_{im} (i = 1, 2, \dots, 8)$ 由 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = a$ 处的自由边界条件来确定，即 $(M_1, Q_1)_{\alpha=0} = 0$ ， $(M_1, Q_1)_{\alpha=a} = 0$ 。这样，由式 (2)，式 (3) 和式 (6) 就可确定柱壳中面的位移场，还可以用相关公式求得内力场^[9]。

3 法向线载荷下环向弯曲变形的计算

若在 $\beta = \eta$ 处作用有线载荷 $Z(\alpha)$ ，可近似认为

在 $\beta = \eta$ 处微小矩形区域 $a \times d\beta$, 法向载荷的分布为 $Z(\alpha)/d\beta$, 在其他区域的分布为 0, 则由式 (5) 可得

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - \lambda_m^2 \right)^4 + \frac{Et}{r^2 D} \frac{d^4}{d\alpha^4} \right] \psi_m(\alpha) = \frac{2Z(\alpha)}{rDb} \sin \lambda_m \eta \quad (7)$$

在给出 $Z(\alpha)$ 的具体形式后, 就可以由式 (7) 求出 $\psi_m(\alpha)$; 而从式 (6) 和式 (7) 可知, 对于不同的线载荷形式, $\psi_m^*(\alpha)$ 不同. 下面给出 $Z(\alpha)$ 为均布和线性变化时, 特解的具体形式.

当 $Z(\alpha) = q$ 时

$$\psi_m^*(\alpha) = \frac{2q \sin \lambda_m \eta}{rDb \lambda_m^8} \quad (8)$$

当 $Z(\alpha) = q\alpha$ 时, 应用文献 [10] 中提到的算子解法, 可得

$$\psi_m^*(\alpha) = \frac{2q \lambda_m^8 \sin \lambda_m \eta}{rDb} \alpha \quad (9)$$

若 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = a$ 的边界为简支边, 而 $\beta = 0$ 和 $\beta = b$ 的边界为自由边时, 亦可用与上述相似的方法求解在 $\alpha = \xi$ 处作用有线载荷 $Z(\beta)$ 时, 圆柱壳的轴向弯曲变形问题.

4 算例

4.1 理论计算

在图 1 中, 半径 $r = 6\text{m}$, 厚度 $t = 0.1\text{m}$, 纵向边长 $a = 3\text{m}$, 环向边长 $b = \pi r$, $\varphi = \pi/2$, 均布线载荷作用在 $\eta = b/2$ 处, 位于柱壳的顶端, 并设 $q = 500\text{N/m}$. 材料的弹性模量 E 为 $2.06 \times 10^5\text{MPa}$,

泊松比 ν 为 0.3. 以下主要以挠度 w 为分析对象, 由式 (2) 和式 (3) 得

$$w(\alpha, \beta) = \frac{r}{b^4} \sum_{m=1}^{\infty} \left[m^4 \pi^4 \psi_m(\alpha) - 2b^2 m^2 \pi^2 \psi_m''(\alpha) + b^4 \psi_m^{(4)}(\alpha) \right] \sin \left(\frac{m\pi\beta}{b} \right) \quad (10)$$

根据上述参数和线载作用下的理论分析, $\psi_m(\alpha)$ 的特征值 r_m , 特解 $\psi_m^*(\alpha)$ 和常数 C_{im} 见表 1 中, $m = 1, 2, 3, 4$. 在求常数 C_{im} 时, 根据自由边界条件只能确定其中的 4 个方程. 进一步分析知, 在 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = a$ 的边界上没有外载荷作用, 因而可由 $(N_1, S)_{\alpha=0} = 0, (N_1, S)_{\alpha=a} = 0$ 补充另外 4 个方程. 弯矩 M_1 , 剪力 Q_1 , 拉力 N_1 和平错力 S 可由下式计算 [9]

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -rD \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 F \\ Q_1 &= -rD \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^6 F \\ N_1 &= Et \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \\ S &= -Et \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^3 \partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

通过表 1 可获得 $\psi_m(\alpha)$, 再由式 (10) 确定挠度 w 在 $\alpha\beta$ 面的分布. 若要提高计算精度, 只需多计算一些 m 值. 图 2 表示了挠度 w 的分布情况. 从该图可知, 分布曲面关于 $\beta = b/2$ 对称, 且在 $\beta = b/2$ 处位移最大, 靠近两约束边界时, 位移趋于 0, 这里求得的最大位移绝对值为 $4.209 \times 10^{-3}\text{m}$.

表 1 $\psi_m(\alpha)$ 中各量的具体值

	r_m	$\psi_m^*(\alpha)$	C_{im}
$m = 1$	$\pm 1.668 \pm i 1.651, \pm 0.008 \pm i 0.008$	-0.787	$C_{11} = -3.419 \times 10^{-8}, C_{21} = 3.616 \times 10^{-8}$
			$C_{31} = -3.560 \times 10^{-8}, C_{41} = 3.383 \times 10^{-8}$
			$C_{51} = -1.362 \times 10^{-3}, C_{61} = -0.109$
$m = 2$	$\pm 1.694 \pm i 1.627, \pm 0.034 \pm i 0.033$	0	$C_{71} = 1.382 \times 10^{-3}, C_{81} = -2.419 \times 10^{-4}$
			0
			$C_{11} = 3.120 \times 10^{-9}, C_{21} = -4.542 \times 10^{-9}$
$m = 3$	$\pm 1.738 \pm i 1.588, \pm 0.078 \pm i 0.072$	1.200×10^{-4}	$C_{31} = 4.506 \times 10^{-9}, C_{41} = -3.072 \times 10^{-9}$
			$C_{51} = 1.793 \times 10^{-6}, C_{61} = 1.705 \times 10^{-5}$
			$C_{71} = -2.037 \times 10^{-6}, C_{81} = 1.697 \times 10^{-7}$
$m = 4$	$\pm 1.802 \pm i 1.538, \pm 0.143 \pm i 0.122$	0	0

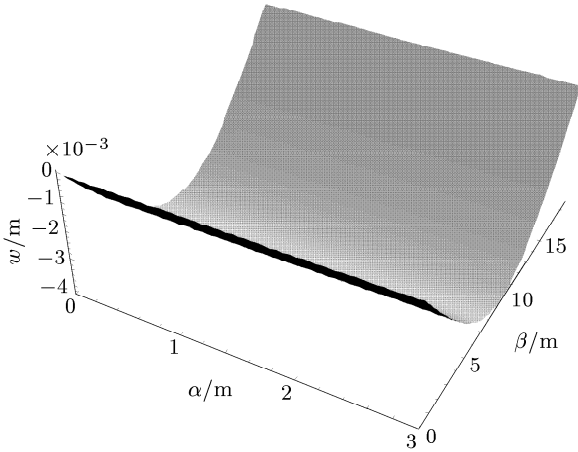


图 2 挠度 w 的分布曲面

4.2 有限元计算

根据上述参数设定, 容易建立图 1 的有限元分析模型 (图 3), 将合力 qa 换算为节点载荷, 作用于圆柱壳顶线节点上.

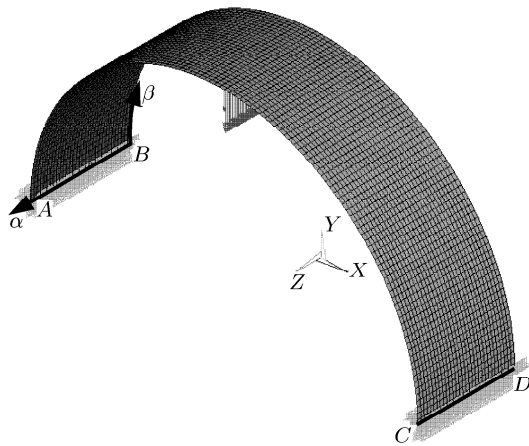


图 3 圆柱壳有限元分析模型

在有限元分析时, 要确保与理论分析的是同一种情况, 边界条件的设定相当重要. $\beta = 0$ 和 $\beta = b$ 的简支边界条件对应于有限元模型, 为约束圆柱壳左右两底边 AB 和 CD 的 UX 和 UZ 两自由度. 而为了平衡外载荷, 还需要约束两底边的位移自由度 UY . 此时的 y 方向位移也即理论计算时 v 在 $\beta = 0$ 和 $\beta = b$ 的取值, v 在这两处的取值大小相等、方向相反, 记 v 在 $\beta = 0$ 处的取值为 v_0 . 由式 (2) 和式 (3) 得

$$v = \frac{\pi}{b^3} \sum_{m=1}^{\infty} m[m^2\pi^2\psi_m(\alpha) - b^2(2 + \nu)\psi_m''(\alpha)] \cdot \cos\left(\frac{m\pi\beta}{b}\right) \quad (12)$$

其中 $\psi_m(\alpha)$ 仍由表 1 确定. v_0 随 α 的变化曲线如图 4.

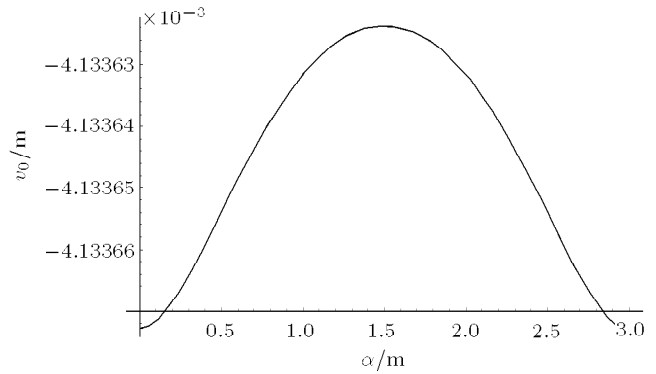


图 4 v_0 与 α 的关系曲线

从图 4 可以看出, v_0 在 α 线上变化很小, 因而 y 方向位移可以取为 $-4.134 \times 10^{-3} \text{ m}$. 将有限元分析结果变换到柱坐标系下, 图 5 为圆柱壳 w 的分布等值云图.

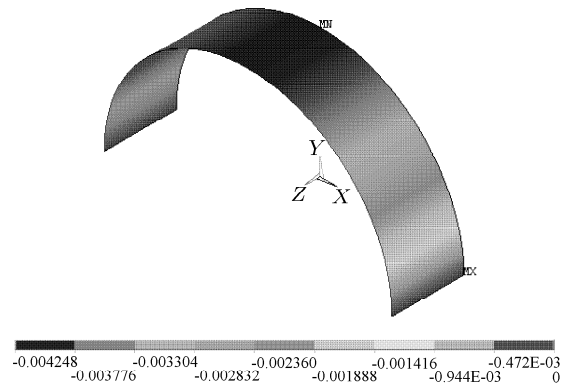


图 5 挠度 w 的有限元计算分布图

从图 5 可以看出, w 的分布关于平面 YZ 对称, 在柱壳顶 w 的绝对值最大, 最大值即图 5 中所示的 $4.248 \times 10^{-3} \text{ m}$.

4.3 计算结果的比较

从图 2 和图 5 发现, 理论计算结果和有限元计算结果总体变化趋势是一致的, 但难以比较出两者的吻合程度, 选 $\alpha = 0$ 和 $\beta = b/2$ 两处进行具体的对比分析. 由于图 2 和图 5 均具有对称性, 因而可只考虑模型的左半部分. 当 $\alpha = 0$ 时, 式 (10) 为

$$w = -4.157 \times 10^{-3} \sin \frac{\beta}{6} + 5.210 \times 10^{-5} \sin \frac{\beta}{2} \quad (13)$$

式 (13) 中第 2 项比第 1 项低了两个数量级, 可见使用级数解法收敛较快, 并且选取级数的前 3 项时已具有了一定的精度. 根据此式和相同位置节点的有限元

计算值, 可以获得图 6. 图 6 很明显地表明, 随着 β 的变化, 理论值和有限元计算值相当接近, 且在 $\beta = b/2$ 处, 也即线载荷作用处, w 的绝对值最大.

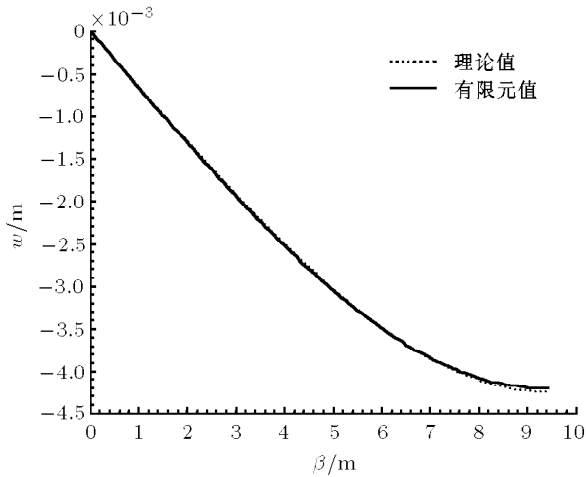


图 6 $\alpha = 0$ 时, w 值在 β 向的变化曲线

当 $\beta = b/2$, 式 (10) 的具体形式很复杂, 这里不列出其表达式. 图 7 表示了此处 w 值随 α 变化时, 理论计算值和有限元计算值的对比. 可认为两曲线关于 $\alpha = 1.5\text{m}$ 处对称, 且两曲线的变化趋势相似, 中间较平坦, 两端值最小, 在图中两曲线间隔显示较大, 实际上其最大差值为 $4.601 \times 10^{-5}\text{m}$, 最大相对误差为 -1.09% , 因而理论值和有限元计算值仍有很好的吻合性.

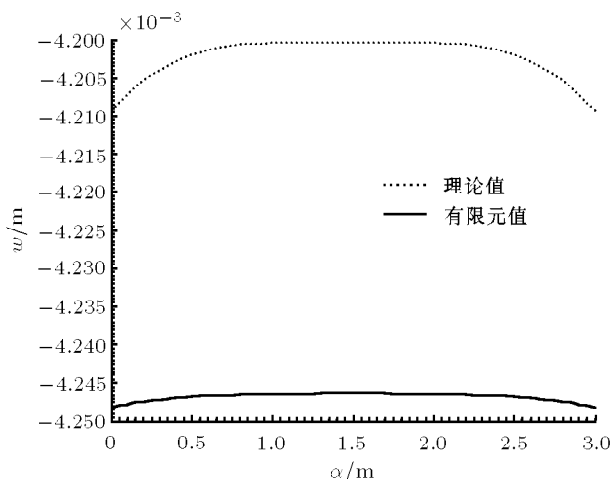


图 7 $\beta = b/2$ 时, w 值在 α 向的变化曲线

5 结 论

(1) 在对圆柱壳对边简支线载荷作用下的环向弯曲变形分析时, 由以上的计算实例可以看出, 理论计算和有限元计算有很好的吻合性, 因而文中对圆柱壳环向弯曲变形的求解方法以及对边界条件的处理是合理的.

(2) 运用文中方法, 可以类似地处理板对边简支在线载荷作用下, 板、壳四边简支在集中力作用下的弯曲变形问题.

参 考 文 献

- 唐文勇, 王天霖, 张圣坤. 径向载荷作用下复合材料圆柱壳的非线性动力屈曲. 振动与冲击, 2006, 25(2): 155-158 (Tang Wenyong, Wang Tianling, Zhang Shengkun. Nonlinear dynamic buckling of composite cylindrical shells under radial loads. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(2): 155-158 (in Chinese))
- Xiao Hanlin, Liu Tuguang, Zhang Tao, et al. Vibration analysis of composite cylindrical shells with stringer and ring stiffeners. *Journal of Ship Mechanics*, 2007, 11(3): 470-478
- Polyzois D, Raftoyiannis IG, Ibrahim S. Finite elements method for the dynamic analysis of tapered composite poles. *Composite Structures*, 1998, 43: 25-34
- Lim CW, Liew KM, Kitipornchai S. Vibration of cantilevered laminated composite shallow conical shells. *International Journal of Solids Structures*, 1998, 35(15): 1695-1707
- Al-Hassani STS, Darvizeh M, Haftchenari H. An analytical study of buckling of composite tubes with various boundary conditions. *Composite Structures*, 1997, 39(1-2): 157-164
- Liang Bin, Zhang Shufen, Noda NA, et al. Optimal design of cylindrical shells on strength under non-uniform lateral pressure. *Journal of Ship Mechanics*, 2006, 10(3): 123-129
- 李东风, 薛明德. 圆柱壳受集中载荷作用的奇异解. 清华大学学报 (自然科学版), 2005, 45(8): 1083-1087 (Li Dongfeng, Xue Mingde. Singular solutions for the stresses in cylindrical shells due to concentrated loads. *Journal of Tsinghua University (Science & Technology)*, 2005, 45(8): 1083-1087 (in Chinese))
- 铁摩辛柯 S, 沃诺斯基 S. 板壳理论. 北京: 科学出版社, 1977. 538-544
- 徐芝纶. 弹性力学 (下册). 北京: 高等教育出版社, 1990. 263-267
- 丁崇文. 常微分方程. 厦门: 厦门大学出版社, 2006. 190-193

(责任编辑: 何漫丽)