

3 静力学在流体力学课程中的地位

流体静力学的地位在经典的流体力学著作中有明显的反映。德国著名力学大师普朗特^[1]在其基础理论著作《流体力学概论》中，只在“液体和气体的特性”中介绍了流体平衡的知识。在前苏联著名力学家朗道^[2]的《连续介质力学》中也没有“流体静力学”这一章，只在“流体动力学”中化少量篇幅介绍静力学知识。英国著名流体力学家巴切勒^[3]干脆将他为本科生写的流体力学教材称为《流体动力学引论》，在流体的物理性质中把流体的平衡作为一节。

为什么在一些工程流体力学教材和教师讲课中将流体静力学置于一个重要的基础地位呢？原因之一可能是受了理论力学的影响，不假思索地将其移植到流体力学中来。殊不知理论力学是研究各种材料和物体（刚体、固体和流体）的一般运动规律，而流体力学只研究流体的特殊运动规律，两者是不能照搬的。另一个原因是对流体静力学在流体力学中的地位缺乏足够认识。有的教师因为课时压缩，大幅削减流体力学内容，却花大量时间讲解静力学内容，犯了本末倒置的错误。不适当地强调流体静力学将造成学生对基本概念的误解。例如有的学生将静力学压强公式用于计算从水箱沿管路流至下游某截面上的压力。有的工程师曾感叹毕业多年后从实际工作中才逐渐弄清楚流体在运动和静止中压强的差别。

按流体力学学科特点，在教学中欧拉平衡方程应该放在

N-S 方程后去讲解，作为 N-S 方程的特殊形式之一。在力学专业本科生或工程专业研究生的流体力学课程中就是这样安排的。在作者编著的“十五”国家级规划教材《流体力学》^[4]中，没有将流体静力学归于“基础篇”，而是作为一个专题放到后面的“专题篇”中。由于在流体动力学中需要掌握静压强概念和测量方法，因此预先要讲压强公式，但是这不是先讲流体静力学的理由。对某些流体力学要求不高的工程类专业，考虑教学内容由浅入深，在流体力学教学中先讲静力学也是可以的。但不能把它作为流体动力学的基础，也不能把 N-S 方程说成是欧拉平衡方程的引伸。必须向学生讲清楚流体在静止和运动中力的类型和性质存在根本差异，明确静力学在流体力学中处于次要地位，强调流体动力学方程才是流体力学的基础。确立这种观点有助于提高对流体力学学科特点的认识，提高流体力学教学质量。

参 考 文 献

- 1 普朗特. 流体力学概论. 郭永怀, 陆士嘉译. 北京: 科学出版社, 1981
- 2 朗道等. 连续介质力学. 彭旭麟译. 北京: 人民教育出版社, 1958
- 3 巴切勒. 流体动力学引论. 沈青, 贾复译. 北京: 科学出版社, 1997
- 4 丁祖荣. 流体力学(上册、中册). 北京: 高等教育出版社, 2003

(责任编辑: 周冬冬)

用等效弹簧-质量体系确定单自由度结构的自振频率

陈玉骥¹⁾

(佛山科学技术学院土木工程与建筑系, 广东佛山 528000)

摘要 基于虚功原理, 将不符合单自由度杆系结构自振频率计算公式的单自由度结构, 转化为一个等效弹簧-质量体系, 从而可用该公式计算其自振频率, 扩大了公式的适用范围。由于用本文方法计算自振频率, 不必建立动平衡方程, 所以较为简便。本文结果与按照建立运动微分方程得到的结果完全相同。

关键词 等效弹簧-质量体系, 单自由度结构, 自振频率, 虚功原理

中图分类号: O342-44 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2010)04-081-03

单自由度杆系结构自振频率的计算公式为

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} \quad (1)$$

式中, k_{11} 和 δ_{11} 分别为结构在质量 m 处的刚度系数和柔度系数。用式(1)计算时, 结构必须符合以下两个条件之一: (1) 只有一个集中质量; (2) 有多个(或无穷多)质量, 但所有质量的动位移均相等。若不满足上述两个条件之一, 则不能按照该公式计算自振频率。此时, 一般可以用的动静法推导运动微分方程, 从而确定自振频率。

本文提出一种基于虚功原理得到的公式, 将不符合上述两个条件的结构等效为一个弹簧-质量体系, 从而可用上述公式计算自振频率, 扩大了其适用范围。本文结果与按照建立运动微分方程得到的结果完全相同。

1 公式推导

不失一般性, 设某单自由度结构中, 包含 s 个集中质点, 其质量为 $m_i (i = 1, 2, \dots, s)$; n 个集中弹性支座, 其刚度系数为 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。另外, 在区间 $[a, b]$ 有分布质量

2009-02-05 收到第 1 稿, 2009-10-22 收到修改稿。

1) 陈玉骥, 1962 年生, 男, 教授, 博士, 主要从事土木工程结构分析和弹塑性理论及其应用研究。E-mail: chenylj1310@163.com

$m(x)$, 区间 $[c, d]$ 有刚度为 $k(x)$ 的连续分布弹性支承. 为方便起见, 先不考虑结构中的弹性杆, 即: 结构为刚体体系. 对于弹性杆的影响, 放在后面得到的结果中再予以考虑.

对该结构加上集中惯性力 $I_i(t) = -m_i \ddot{y}_{mi}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) 和分布惯性力 $I(x, t) = -m(x) \ddot{y}_m(x, t)$, 式中, $\ddot{y}_{mi}(t)$ 为质量 m_i 的加速度, $\ddot{y}_m(x, t)$ 为分布质量 $m(x)$ 的加速度. 设使结构产生虚位移, 则根据虚功原理 (虚位移原理), 作用于该单自由度结构中的力系的虚功总和为零, 即

$$\sum_{i=1}^s I_i \bar{y}_{mi} + \sum_{i=1}^n S_i \bar{y}_{ki} + \int_a^b I(x, t) \bar{y}_m(x) dx + \int_c^d S(x, t) \bar{y}_k(x) dx = 0 \quad (2)$$

式中, $S_i = -k_i y_{ki}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为集中弹性支座的集中弹性力, $S(x, t) = -k(x) y_k(x, t)$ 为连续分布弹性支承的分布弹性力, \bar{y}_{mi} ($i = 1, 2, \dots, s$) 和 \bar{y}_{ki} ($i = 1, 2, \dots, n$) 分别表示与集中惯性力 I_i ($i = 1, 2, \dots, s$) 和集中弹性力 S_i 对应的虚位移, $\bar{y}_m(x)$ 和 $\bar{y}_k(x)$ 分别表示与分布惯性力 $I(x, t)$ 和分布弹性力 $S(x, t)$ 对应的虚位移. 将惯性力和弹性力表达式代入式 (2), 可得

$$\sum_{i=1}^s m_i \ddot{y}_{mi} \bar{y}_{mi} + \sum_{i=1}^n k_i y_{ki} \bar{y}_{ki} + \int_a^b m(x) \ddot{y}_m(x, t) \bar{y}_m(x) dx + \int_c^d k(x) y_k(x, t) \bar{y}_k(x) dx = 0 \quad (3)$$

任取结构中的某一固定点作为基准点, 设其动位移、加速度和虚位移分别为 $y^*(t)$, $\ddot{y}^*(t)$ 和 \bar{y}^* . 将式 (3) 进行如下处理

$$\ddot{y}^* \sum_{i=1}^s m_i \left(\frac{\ddot{y}_{mi}}{\ddot{y}^*} \right) \left(\frac{\bar{y}_{mi}}{\bar{y}^*} \right) + y^* \sum_{i=1}^n k_i \left(\frac{y_{ki}}{y^*} \right) \left(\frac{\bar{y}_{ki}}{\bar{y}^*} \right) + \ddot{y}^* \int_a^b m(x) \left(\frac{\ddot{y}_m}{\ddot{y}^*} \right) \left(\frac{\bar{y}_m}{\bar{y}^*} \right) dx + y^* \int_c^d k(x) \left(\frac{y_k(x)}{y^*} \right) \left(\frac{\bar{y}_k(x)}{\bar{y}^*} \right) dx = 0 \quad (4)$$

由于是单自由度结构, 结构上各点的位移和加速度成比例, 即各点的位移 (包括虚位移) 比值与加速度比值相等, 故式 (4) 可表示为

$$\tilde{m} \ddot{y}^* + \tilde{k} y^* = 0 \quad (5)$$

式中

$$\tilde{m} = \sum_{i=1}^s m_i \eta_{mi}^2 + \int_a^b m(x) \eta_m^2(x) dx$$

$$\tilde{k} = \sum_{i=1}^n k_i \eta_{ki}^2 + \int_c^d k(x) \eta_k^2(x) dx$$

$$\eta_{mi} = \frac{\ddot{y}_{mi}}{\ddot{y}^*} = \frac{\bar{y}_{mi}}{\bar{y}^*} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

$$\eta_{ki} = \frac{y_{ki}}{y^*} = \frac{\bar{y}_{ki}}{\bar{y}^*} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\eta_m(x) = \frac{\ddot{y}_m}{\ddot{y}^*} = \frac{\bar{y}_m}{\bar{y}^*}$$

$$\eta_k(x) = \frac{y_k}{y^*} = \frac{\bar{y}_k}{\bar{y}^*}$$

若结构中包含不计质量的弹性杆, 则需在以上刚度系数 \tilde{k} 中加入弹性杆的贡献, 即

$$\tilde{k} = \sum_{i=1}^n k_i \eta_{ki}^2 + \int_c^d k(x) \eta_k^2(x) dx + k_e$$

式中, k_e 为弹性杆对基准点位移 y^* 的弹性刚度.

可见, 经过上述处理, 将原结构转化为如图 1 所示的等效的质量-弹簧体系. 图中, \tilde{m} 和 \tilde{k} 分别为该体系的集中质量和弹簧刚度, 其自振频率可按式 (1) 计算, 为

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} \quad (6)$$

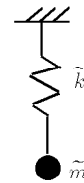


图 1 质量-弹簧系统

2 算 例

图 2 所示单自由度结构, 除 ACB, GIH 为刚性杆 ($EI = \infty$) 外, 其他杆均为弹性杆 ($EI = \text{常数}$); GH 段为质量均匀分布的质量杆 ($m(x) = m^* = \text{常数}$), 其他杆均不计质量; B, G 和 I 处为弹性支座, 其刚度系数分别为 k_1, k_2 和 k_3, CB 段为连续分布弹性支承 (其刚度 $k(x) = k^* = \text{常数}$), 试求该结构的自振频率.

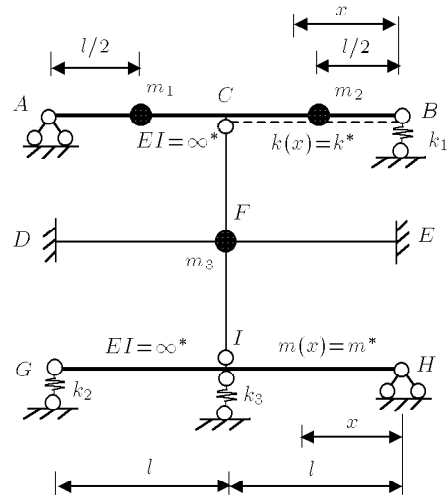


图 2 单自由度结构

解:以质量 m_3 所在的点 F 为基准点,则

$$\eta_{m1} = \frac{1}{2}, \eta_{m2} = \frac{3}{2}, \eta_{m3} = 1, \eta_m(x) = \frac{x}{l} \quad (0 \leq x \leq 2l)$$

$$\eta_{k1} = 2, \eta_{k2} = 2, \eta_{k3} = 1, \eta_k(x) = \frac{2l-x}{l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

故

$$\tilde{m} = \eta_{m1}^2 m_1 + \eta_{m2}^2 m_2 + \eta_{m3}^2 m_3 + \int_0^{2l} \eta_m^2(x) m(x) dx =$$

$$\frac{1}{4} m_1 + \frac{9}{4} m_2 + m_3 + \frac{8}{3} m^* l$$

$$\tilde{k} = \eta_{k1}^2 k_1 + \eta_{k2}^2 k_2 + \eta_{k3}^2 k_3 + \int_0^l \eta_k^2(x) k(x) dx + k_e =$$

$$4k_1 + 4k_2 + k_3 + \frac{7}{3} k^* l + \frac{24EI}{l^3}$$

该结构的自振频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{4k_1 + 4k_2 + k_3 + \frac{7}{3} k^* l + \frac{24EI}{l^3}}{\frac{1}{4} m_1 + \frac{9}{4} m_2 + m_3 + \frac{8}{3} m^* l}}$$

参 考 文 献

- 1 龙驭球. 结构力学. 北京: 高等教育出版社, 2001
- 2 李铤琨. 结构力学. 北京: 高等教育出版社, 2004
- 3 缪加玉. 结构力学的若干问题. 成都: 成都科技大学出版社, 1993

(责任编辑: 刘俊丽)

改进力法计算的研究¹⁾

任凤鸣²⁾ 汪 新 郭仁俊

(广东工业大学土木与交通工程学院, 广州 510006)

摘要 针对传统力法的缺点, 利用 VBA 进行了 Excel 电子表格的编制, 对传统力法进行了改进. 在保持传统力法的基本原理和计算过程的基础上, 解决了力法计算繁琐的问题, 提高了计算速度和学习效率, 增强了结构力学课程与实际的联系, 对工科课程的教学具有一定的指导意义.

关键词 力法, 计算改进, Excel 电子表格

中图分类号: G642, TU311.4 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2010)04-083-04

引 言

力法是求解超静定结构的基本方法, 是结构力学课程中非常重要的内容^[1]. 由于其求解结构类型广, 物理意义明确容易理解, 解题规律便于掌握, 因此在结构分析中占有十分重要的位置. 然而力法计算十分繁琐, 仅求解一个 3 次超静定结构就要花费很长时间, 使得学生在计算过程中的错误难以避免, 影响学习效率. 随着超静定次数的增加, 手算则更难实现, 因此在学习这部分内容时一般局限于 1 次或 2 次超静定结构, 而对较复杂的结构体系采用传统力法进行分析非常繁琐和困难.

长期以来, 计算问题一直是阻碍力法推广应用的一大障碍. 随着计算技术和现代数值计算方法的发展, 解决问题的手段越来越多样化, 使得力法快速计算成为可能^[2]. 如果将力法进行适当改进, 在不改变原方法计算原理、计算步骤的同时, 将大量的纯数字计算利用目前已非常普遍的 Excel 完

成, 能使学生在掌握力法基本原理的前提下, 提高求解速度和学习效率. 目前实际工程的计算分析大都采用商用有限元软件来进行, 要经历建立几何模型、赋材料属性、划分单元、边界条件的处理和求解等一系列的步骤才能得到结构体系的内力和变形等, 若没有有限元知识则无法完成该分析过程. 采用本文的改进力法, 学生可以在没有有限元基础的情况下快速地对某些实际工程进行分析, 既提高了学生的学习积极性, 同时增强了课程与实际的联系, 因此该方法对结构力学的教学是非常有意义的.

1 力法改进的理论分析

在结构力学课程中, 传统力法采用图乘法求系数和自由项, 为此需要先绘制 \bar{M}_i , M_P 图, 但是绘制弯矩图相当繁琐, 而且图乘法过程又不便于编制成表格计算, 尤其是针对高次超静定的结构体系. 因此, 采用根据单位载荷法的积分公式推导出位移计算公式^[3]来计算系数 δ_{ij} 自由项 Δ_{ip} , 位移计算公式如下:

$$\delta_{ij}(\Delta_{ip}) = \sum \delta_{s_{ij}}(\Delta_{ip}^s) = \sum \left\{ \frac{l}{6EI} \left[2M_1 \bar{M}_1 + 2M_2 \bar{M}_2 + M_1 \bar{M}_2 + M_2 \bar{M}_1 + \frac{ql^2}{4} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) + \frac{p_{sy} l^2}{60} (7\bar{M}_1 + 8\bar{M}_2) + \frac{p_{sz} l^2}{60} (8\bar{M}_1 + 7\bar{M}_2) \right] \right\} \quad (1)$$

2009-07-23 收到第 1 稿, 2009-12-30 收到修改稿.

1) 广东省名牌专业建设专项基金和高等学校特色专业建设专项基金资助项目.

2) 任凤鸣, 女, 1975 年生, 副教授, 主要从事建筑结构的性能分析和教学工作. E-mail: rfm@gdut.edu.cn