芯片化学刻蚀、清洗. 使计算机线路、元件微型化，从而出现了计算机小型化及大规模集成电路芯片. 人们发现等离子态，由于具有活性粒子，创造了独特的能量交换环境，又因可以通过电磁场，温度等调控，各方面的应用，研究为低温等离子体科学的应用发展带来了各种机遇和挑战 [3].

现在，低温等离子体物理与应用已是一个具有全球影响的重要的科学与工程. 对高科技经济的发展及传统工业的改造均有重大影响. 科学家预测， 21 世纪低温等离子体科学及技术将会产生突破. 等离子体辅助加工被用来制造特种优良性能的新材料，研制新的化学产品和工艺. 改造和精制材料及表面等等，均有广泛的工业前景.

*: 造父变星：是一类高光度周期性脉动变星. 即其亮度随时间呈周期性变化. 因典型星仙王座 \delta(中文古代名造父而得名. 根据造父变星的周光关系，可以确定星团，星系的距离. 因此造父变星被誉为 “量天尺”, 北极星也是一颗 “造父变星”. 如果两颗造父变星的光变周期相同则认为它们的光度亦相同 / 这样只要用其他方法测量了较近造父变星的距离，就可以知道周光关系的参数，进而就可推出遥远星系的距离.

参 考 文 献

1 等离子体和流体. 美国等离子体和流体物理学专门小组. 中译本 1996 年霍裕平等译. 1986 (Plasmas and Fluids ISBN 7-03.004686-2 National Academy Press, 1986)

2 今日天体物理. 中国科学技术大学天体物理研究室. 上海：上海出版社， 1980 年 11 月

3 等离子体物理学科发展战略研究课题组. 核聚变与低温等离子体 —— 面向 21 世纪的挑战和对策. 北京：科学出版社

把物理思想注入于数学之中

—— 以黏性流体力学的 Navier-Stokes 方程的求解为例，谈剑桥大学 G.K.Batchelor 教授的一个学术思想

温景嵩 1)

(南开大学，天津 300071)

摘要 本文指出有 3 条途径可以把物理思想注入于数学之中，来化解数学难点从而求解： (1) 引入适当的物理模型； (2) 引入各种近似； (3) 引入各种变换. 本文还以黏性流体力学为例，说明近 200 年来历代流体力学家是如何运用上述 3 种办法来求解著名的描述黏性流体运动的 Navier-Stokes 方程，使破解此难题的工作逐步推向前进并取得各自的成功.

关键词 黏性流体力学， Navier-Stokes 方程的求解，物理思想

To inject physics into mathematics(把物理思想注入于数学之中)—— 这是 George Keith Batchelor 教授的思想.

Batchelor 教授是剑桥大学 1959 年创办的应用数学与理论物理系的创办人和系主任，闻名世界的国际理论物理大师霍金教授就是 Batchelor 的这个系于 1966 年培养出来的. 虽然 Batchelor 是当代国际流体力学大师，但是在他所发表的流体力学划时代名著《流体力学导论》上，他所使用的学衔却是 Professor of Applied Mathematics, 而不是 Professor of Fluid Mechanics.

应用数学教授 Batchelor 对应用数学所下的定义如下:

(1) 初看起来应用数学的含意可以表述为：你所遇到的物理问题中的未知变量可以用一个微分方程来描述，然后你就要采用某一种数学技巧来求解，这就是应用数学的意义.

(2) 然而上面的表述包含有一个很大的缺点，那就是在上述的表述中它没有提到物理思想，而这正是问题的根本. 于是， Batchelor 就给出了他自己的应用数学的定义：要把物理思想注入于数学之中，才能解决问题. 这构成了应用数学的灵魂.

以下讲一讲作者自己学习 Batchelor 这个思想的体会：由于一般物理问题所遇到的微分方程求解难度非常大，其难度远远超过了现有的数学技巧所能解决的范围，所以应用数学家就只能根据他所面对的某一个特定问题自身的物理特点来化解数学难点，简化方程从而得到这个特定问题的解. 这就是把物理思想注入于数学之中来解决问题的真实含义.

有 3 种办法把物理思想注入于数学之中来化解数学难点:

(1) 引进特定的物理模型来化解数学难点;

(2) 引进各种近似来化解数学难点;

(3) 引进各种变换来化解数学难点.

下面从黏性流体力学的例子讲起. 把牛顿力学第二定律应用于不可压缩黏性流体这样的连续介质就会得到著名

本文于 2010–04–22 收到.

1) 温景嵩，教授，博士生导师和学术带头人，主要研究方向为微大气物理、气溶胶力学和气候动力学. E-mail: cswen@nankai.edu.cn

的 Navier-Stokes 方程 (法国学者 Navier(1822), 剑桥学者 Stokes (1845)) 为

$$\rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} \tag{1}$$

式 (1) 是一个非线性的时空四维的二阶的偏微分方程. 到现在还没有一种数学方法能够求到这一方程的普遍的严格解. 流体力学家就只能按照某一个特定的物理问题自身的特点来开辟求各种特定问题近似解的道路. 首先是把此方程无量纲化，从而得到一个无量纲的 Navier-Stokes 方程和一个无量纲的动力相似参数 —— 雷诺数 Re.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i'}{\partial t'}+u_j'\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j'}=-\dfrac{\partial p'}{\partial x_i'}+\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j' x_j'}\\ Re=\dfrac{\rho LU}{\mu}\end{cases}$$

低雷诺数流， $Re<1$, Stokes 近似，黏性流 - 线性化的 Stokes 方程为

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

Stokes 小球解的物理模型 —— 化时空四维问题为轴对称的两维问题

无界空间

静止背景

球形物体

定常的运动速度

球极坐标系，原点放在球心，极轴与定常速度重合，边界条件的确定. 得到严格的运动小球引起的 Stokes 扰动流场的解析解

$$u_i=U_i\Big(\frac{3}{4}\frac{a}{r}+\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\Big)+x_i\frac{x_jU_j}{r^2}\Big(\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{3}{4}\frac{a^3}{r^3}\Big)$$

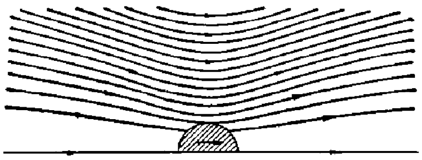

图 1　低 Reynolds 数条件下，刚性球平移运动中产生的流场

从而得到介质对小球的精确的 Stokes 阻力公式

$$D=6\pi a\mu U$$

进而得到了小球的 Stokes 沉降公式，两千年来自亚里士多德之后第一次定量地解决了物体在重力作用下的做低雷诺数沉降问题.

$$V_S=\frac{2}{9}\frac{a^2g}{\mu}(\rho_p-\rho)$$

高雷诺数下的无黏性近似， $Re>1$, Euler 方程为

$$\rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

达朗贝尔之谜， Prandtl 的边界层近似

边界是半无界的平板 —— 化空间三维为空间两维，背景流场是与平板平形的定常均匀流 —— 化解掉时间一维，背景压力场也是定常均匀的 —— 化解掉压力梯度项，Prandtl 的边界层近似 —— 在平板边界上有一个很薄的黏性边界层，在其中有一个很强的垂直速度梯度，因而使垂直方向的黏应力不可忽略，不管雷诺数是如何之大 —— 由此则应在边界层中建立一个新的边界层方程，在其中黏性应力项被部分地 (铅垂方向) 恢复，结果得到边界层方程如下：

Prandtl 的边界层方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

这里取直角坐标系，原点放在平板前缘， $y=0$ 的平面与平板重合.

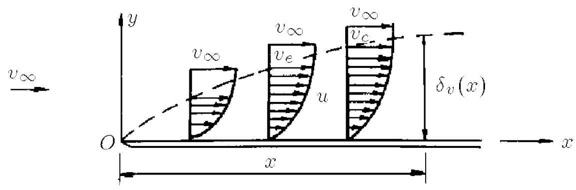

图 2　沿半无穷平板的速度边界层

Blausius 关于两维自变量的相似变换 —— 化偏微分方程为常微分方程

$$\eta=\Big(\frac{U}{\nu x}\Big)^{1/2}y$$

流函数与两维速度场 —— 因不可压缩与两维条件，两个未知速度分量 u 与 v 可由一个流函数来表示

$$\begin{cases}\psi=(\nu Ux)^{1/2}f(\eta)\\ u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases}$$

流函数中关于未知函数 f 的 Blausius 的非线性三阶常微分方程为

$$\frac{1}{2}ff''+f'''=0$$

数值求解 f 的非线性三阶常微分方程后所得到的边界层中速度 u 的分布图如图 3 所示.

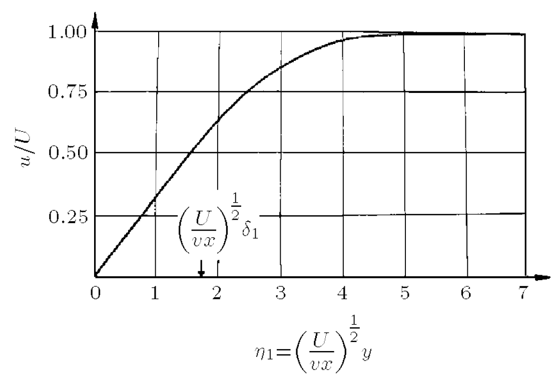

图 3　边界层中速度分布

湍流 —— 流体力学中的世纪难题

(1) 是超临界的高雷诺数流动，非比一般的高度非线性问题；

(2) 虽是高雷诺数流动但弱黏性却处处不可忽略 —— 非微扰问题；

(3) 三维流动 —— 不可降维的难点；

(4) 流场的不规则性，随机性 —— 额外增加的新难点.

为克服此新难点，引入概率论的方法求统计矩，先求一阶矩平均流场，雷诺对湍流速度场的分解

$$u_i = \bar{u}_i + u_i', \quad p = \bar{p} + p'$$

湍流平均速度场的雷诺方程，新难点的产生：方程不闭合

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho \partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i' u_j'}\right)$$

不闭合的未知变量为雷诺应力 $\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'}$

Prandtl 的混合长理论 —— 类比物理学中的分子运动论以闭合雷诺方程中的未知变量雷诺应力

平面均匀 (沿流向均匀) 的平面流的物理模型以化解仍然存在于雷诺方程中的非线性难点 —— 混合长随高度而线性增加的物理假定 —— 平均风场的对数分布律

Keller 和 Friedmann 的湍流速度场空间两点二阶相关矩 —— 三维难点大暴露 ——G.I.Taylor 的均匀各向同性理论的提出以化解三维难点 ——Karman-Howarth 方程的建立 —— 湍能耗散律

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu D_5\right)B_{ll} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right)B_{lll}$$

均匀各向同性理论的局限性 ——Kolmogorov 的局地均匀各向同性理论 —— 结构函数

$$D_{ll} = \langle (u_l' - u_l)^2 \rangle$$

均匀各向同性理论的另一局限性，方程仍不闭合 —— Kolmogorov 的湍流的物理模型 —— 相似参数湍能耗散率 —— 量纲分析法，结构函数的 2/3 定律为 $D_{ll}(r) = C\varepsilon^{2/3}r^{2/3}$. 一维湍谱的 −5/3 定律为 $E_1(\kappa) = C_1\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}$.

Kolmogorov 的湍流理论的伟大成就和问题 —— 湍流的间歇性对 Kolmogorov 的湍流的物理模型提出的挑战 —— 新的探索

G.I.Taylor 对无黏性的三维涡量场实奇点的猜想 (1937)——Frisch 的推广到湍流间歇性问题 (具黏性的三维涡量场复奇点的猜想)(1980)

涡度定义 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$

$$\text{Kelvin 定理}\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \\ C = \oint \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \displaystyle\int_S \boldsymbol{\omega}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{cases}$$

湍流场中涡度的自维持

G.I.Taylor 对无黏性的三维涡量场实奇点的猜想

涡度拟能的计算公式

$$\Omega_p(t) = \sum \kappa^{2P}|\hat{u}(\kappa,t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(P)} t^{2\alpha}$$

速度场的富氏变换的计算公式

$$\frac{\partial \hat{u}_\alpha(\kappa,t)}{\partial t} = -i\sum_{\beta,\gamma=1}^{\infty}\kappa_\beta\left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{\kappa_\alpha\kappa_\gamma}{\kappa^2}\right)\cdot \sum_p \hat{u}_\beta(p,t)\hat{u}_\gamma(\kappa - p,t)$$

G.I.Taylor 手算 —— 算至时间 t 的 4 次方 (1937)

van Dyke 计算机计算 —— 算至时间 t 的 8 次方 (1975)

Frisch 等人引入物理学中相变理论里的奇点分析技术 + 计算机 —— 算至时间 t 的 44 次方 (1980)

Frisch 等人的初步成功 —— 进一步论证失败于计算机的功能不够，虽然他们是美国最大计算机的最大用户

关于湍流间歇性的探索至今仍在继续之中 —— 未来成功的关键仍然在于一个适当的物理思想 + 一个强大的计算机

应该承认到目前为止 Navier-Stokes 方程的普遍的严格解仍没有找到，覆盖在这一方程下面的全部自然现象，就仍然是个谜. 而 Navier-Stokes 方程所能解释的自然现象又仅仅是自然界大海洋中小小的一个水滴. 这是一个伟大的谜. 对它而言，我们人类是太渺小了.

还应该承认，照我们人类目前所确定的从一个一个特定的物理对象去破解这个谜，这条路子也仍然具有相对普遍的重大意义. 从小球的 Stokes 沉降公式到 Batchelor 的胶体多粒子体系的沉降；从 Kolmogorov 的局地均匀各向同性理论到现代激光大气工程的发展；从 Prandtl 的边界层近似到现代航空航天器的研制，人类向宇宙开始了伟大的进军. 所有这些给了我们一个信心：自然界这个伟大的谜是可以化整为零，逐步破解逐步逼近的.