关于 Birkhoff 方程和 Lagrange 方程
—— 分析力学札记之十六

梅凤翔 1)
(北京理工大学力学系，北京 100081)

摘要 讨论 Birkhoff 方程和 Lagrange 方程的关系，由 Birkhoff 方程可构造 Lagrange 方程，反之，由 Lagrange 方程可构造 Birkhoff 方程.

关键词 分析力学， Lagrange 方程， Birkhoff 方程

中图分类号： O31 **文献标识码：** A
文章编号： 1000-0879(2010)05-076-02

1 Birkhoff 方程与 Lagrange 方程

文献 [1] 给出 Birkhoff 函数和 Lagrange 函数的关系为

$$L = -R_\nu \dot{a}^\nu + B \tag{1}$$

其中， $B = B(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数， $R_\nu = R_\nu(t, \boldsymbol{a})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, 2n)$ 为 Birkhoff 函数组， $L = L(t, \boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{a}})$ 为 Lagrange 函数，式 (1) 中相同指标表示求和，下同. 由式 (1) 得到 [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial a^\mu} = \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{2}$$

注意到，这里的 Lagrange 函数所代表的方程是一阶的，相应的方程属于相空间，而通常的 Lagrange 函数所代表的方程是二阶的，相应的方程属于位形空间.

2 由 Birkhoff 方程构造 Lagrange 方程

当已知 Birkhoff 函数 $B = B(t, \boldsymbol{a})$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\nu = R_\nu(t, \boldsymbol{a})$ 时，可按式 (1) 构造 Lagrange 函数并列写一阶方程组. 将 $2n$ 个一阶方程化成 n 个二阶方程，再用 Lagrange 力学逆问题方法 [2-3] 可构造出通常的 Lagrange 函数.

3 由 Lagrange 方程构造 Birkhoff 方程

通常的 Lagrange 函数代表的方程是二阶的. 为由 Lagrange 方程构造 Birkhoff 方程，可用 Legendre 变换构造 Hamilton 函数，然后再构造 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_ν.

一般地， Lagrange 函数为

$$L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{3}$$

取广义动量

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

构造 Hamilton 函数

$$H = p_s \dot{q}_s - L \tag{5}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &a^\mu = \begin{cases} q_\mu & (\mu = 1, 2, \cdots, n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1, n+2, \cdots, 2n) \end{cases} \\ &R_\nu = \begin{cases} p_\nu & (\nu = 1, 2, \cdots, n) \\ 0 & (\nu = n+1, n+2, \cdots, 2n) \end{cases} \\ &B = H \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

这样就构造出 Birkhoff 方程.

4 算例

例 1 已知 4 阶 Birkhoff 系统

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = a^3, \quad R_2 = a^4, \quad R_3 = R_4 = 0 \\ &B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

试构造 Lagrange 方程.

由式 (7) 组成 Birkhoff 方程，有

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{8}$$

即

$$\left.\begin{aligned} &-\dot{a}^3 - a^1 = 0, \quad -\dot{a}^4 - a^2 = 0 \\ &\dot{a}^1 - a^3 = 0, \quad \dot{a}^2 - a^4 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由式 (7) 按式 (1) 构造 Lagrange 函数，得

$$L = -a^3\dot{a}^1 - a^4\dot{a}^2 + \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2] \tag{10}$$

由式 (9) 得

$$\ddot{a}^1 + a^1 = 0, \quad \ddot{a}^2 + a^2 = 0 \tag{11}$$

令

$$a^1 = q_1, \quad a^2 = q_2 \tag{12}$$

本文于 2010–05–26 收到.

1) 梅凤翔，男， 1938 年生，教授，博士生导师，主要从事一般力学和应用数学的教学和科研工作. E-mail: meifx@bit.edu.cn

则式 (11) 写成

$$\ddot{q}_1 + q_1 = 0\,,\quad \ddot{q}_2 + q_2 = 0 \tag{13}$$

由此容易求得 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \tag{14}$$

例 2　已知 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1 q_2 \tag{15}$$

试构造 Birkhoff 方程.

由式 (15) 得广义动量

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1\,,\quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \tag{16}$$

于是 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_1 q_2 \tag{17}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &a^1 = q_1\,,\quad a^2 = q_2\,,\quad a^3 = p_1\,,\quad a^4 = p_2 \\ &R_1 = a^3\,,\quad R_2 = a^4\,,\quad R_3 = R_4 = 0 \\ &B = H = \frac{1}{2}[(a^3)^2 + (a^4)^2] + a^1 a^2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

则 Birkhoff 方程为

$$\left.\begin{aligned} &-\dot{a}^3 - a^2 = 0\,,\quad -\dot{a}^4 - a^1 = 0 \\ &\dot{a}^1 - a^3 = 0\,,\quad \dot{a}^2 - a^4 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

5 结　论

Lagrange 方程是 Lagrange 力学的基础，而 Birkhoff 方程是 Birkhoff 系统动力学的基础. 由 Lagrange 函数经 Legendre 变换可求得 Hamilton 函数，而 Hamilton 系统是 Birkhoff 系统的特殊情形. 因此，由 Lagrange 方程容易过渡到 Birkhoff 方程. 由 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_ν 按式 (1) 可构造出 Lagrange 函数 $L = L(t, \boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{a}})$, 但它所对应的方程组是一阶的. 需将这个一阶方程组化成二阶方程组，而后用 Lagrange 力学逆问题的方法才可构造出通常的 Lagrange 函数. 因此，由 Birkhoff 方程过渡到 Lagrange 方程是不太容易的.

参　考　文　献

1 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1983
2 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics I. New York: Springer-Verlag, 1978
3 梅凤翔. 分析力学专题. 北京：北京工业学院出版社， 1988

(责任编辑：周冬冬)

关于浮体的平衡与稳定性 1)

谢建华 2)
(西南交通大学牵引动力国家重点实验室，成都 610031)

摘要　本文讨论了浮体的平衡与稳定问题，介绍了定倾中心的定义，并结合一个具体的例子，给出了浮体稳定性 3 种不同的判别方法，最后，根据能量方法说明了用定倾高度判定浮体稳定性的理论依据.

关键词　浮体，平衡，定倾中心，稳定性

中图分类号： O313.1　**文献标识码**： A
文章编号： 1000-0879(2010)05-077-04

浮体的平衡与稳定问题是人类一直十分关注的研究课题. 早在二千多年前，古希腊的阿基米德 (Archimedes, 约公元前 287～ 前 212) 就在其著作 “论浮体” 中研究了旋转抛物体在液体中平衡的稳定性条件；斯蒂文 (S. Stevin, 1548～1620) 指出浮体平衡条件是浮体的重心和其排开液体的重心 (浮心) 在同一铅垂线上，但误认为当浮体的重心在浮心之上时，浮体就要翻转，使浮体的重心移到浮心之下；惠更斯 (C. Huygens, 1629～1695) 用几何方法研究了浮体的稳定性问题，比较了不同的平衡位置，认为当浮体倾斜而转换到另一个平衡位置时，其重心相对浮心的高度将减小；伯努利 (D. Bernoulli, 1700～1782) 和欧拉 (L. Euler, 1707～1783) 都研究过浮体的稳定性问题，提出了恢复力矩和小扰动稳定性的概念；布格 (P. Bouguer, 1698～1758) 则首次提出了定倾中心 (metacentre) 的概念 [1]. 如今，定倾中心已成为浮体平衡和稳定性研究中的一个重要概念，在船舶与海洋平台以及其他一些工程设计中有广泛的应用.

2009–11–05 收到第 1 稿， 2009–12–30 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金资助项目 (10772151).
2) 谢建华，教授，博士生导师，主要研究方向为非线性动力学． E-mail: jhxie2000@126.com