【基础理论与应用研究】

多维背包约束下单调非减下模函数最大值的贪婪算法

宫兴荣，何尚录，杨留猛

（兰州交通大学 数理与软件工程学院，兰州　730070）

摘要： 给出了求解多维背包约束下单调非减下模集函数最大值的近似算法，证明了该算法的性能保证是 $1-e^{-1}$。该算法结合了部分穷举法与贪婪算法，是对贪婪算法的一种改进，该算法的时间复杂性为 $O(n^4)$。

关键词： 组合最优化；背包约束；下模集函数；贪婪算法

中图分类号： TP221　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1006－0707(2012)12－0126－03

设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，$\Omega=\{X\mid X\subseteq I\}$ 是由 I 的所有子集构成的集合，若函数 $f:\Omega\to R$，$\forall X,Y\in\Omega$，满足：

$$f(X)+f(Y)\geqslant f(X\cup Y)+f(X\cap Y)$$

则称 f 是定义在 Ω 上的下模集函数. 又若对 $\forall X,Y\in\Omega$ 且 $X\subseteq Y$，$f(X)\leqslant f(Y)$，则称 f 是单调非减的。

考虑如下组合最优化问题：

$$\begin{aligned}&\max f(X)\\&\text{s.t.}\ \sum_{i\in X}c_i\leqslant B\\&\qquad\sum_{i\in X}d_i\leqslant C\\&X\subseteq I\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $B,C,c_i,d_i(i\in I)$ 是非负整数，$f(X)$ 是非负非减的下模集函数。

上述问题属于 NP－难问题，没有十分有效的求解方法，特别是多项式时间算法，于是人们主要研究求解此类问题的比较有效的近似算法。在求解组合最优化问题的各种近似算法中，贪婪算法是最简单且最为有效的算法. Nemhauseretal 考虑了单背包约束下 $c_i=1(i\in I)$ 的特殊情形，给出了一种简单贪婪算法并证明了性能保证为 $1-e^{-1}$。M. Suiridenko结合部分穷举法与贪婪算法，给出了一般情形下单背包约束问题的一种改进的贪婪算法，并证明了其性能保证为 $1-e^{-1}$。在此将这种情况中的思想推广到多维背包约束的情形，给出求解问题(1)的贪婪算法，并证明了所给算法的性能保证为 $1-e^{-1}$。所谓性能保证是指若由近似算法所求近似解至少是精确解的 ∂ 倍，则称此近似算法的性能保证为 ∂。文中给出若干引理及其证明、问题(1)的近似算法，并证明了其性能保证。

1　若干引理及证明

引理 1　设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，f 是定义在 I 的子集构成的集合 Ω 上的下模函数，对 $\forall X\in\Omega,i\in I\setminus X$，定义 $\Delta_i(X)=f(X\cup\{i\})-f(X)$，若 $\forall X,Y\in\Omega$，满足 $X\subseteq Y$ 且 $i\in I\setminus Y$，则有：$\Delta_i(X)\geqslant\Delta_i(Y)$

引理 2　单调非减的集函数 $f(X)$ 是 Ω 上的下模集函数当且仅当

$$\forall X,Y\in I,f(X)\leqslant f(Y)+\sum_{i\in Y\setminus X}(f(X\cup\{i\})-f(X))\tag{2}$$

证明：（必要性）$\forall X,Y\in I$，令 $Y\setminus X=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，则有 $X\cup Y=X\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$。

由 f 是单调非减的下模集函数及引理 1，得

$$\begin{aligned}&f(Y)\leqslant f(X\cup Y)=f(X)+f(X\cup\{i_1\})-\\&f(X)+f(X\cup\{i_1,i_2\})-f(X\cup\{i_1\})+\cdots+\\&f(X\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_k\})-f(X\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}\})=\\&f(X)+\Delta_{i_1}(X)+\Delta_{i_2}(X\cup\{i_1\})+\cdots+\\&\Delta_k(X\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}\})\leqslant f(X)+\Delta_{i_1}(X)+\\&\Delta_{i_2}(X)+\cdots+\Delta_{i_k}(X)=f(X)+\sum_{i\in Y\setminus X}\Delta_i(X)=\\&f(X)+\sum_{i\in Y\setminus X}(f(X\cup\{i\})-f(X))\end{aligned}$$

（充分性）设函数 f 满足不等式

$$\forall X,Y\in I,f(Y)\leqslant f(X)+\sum_{i\in Y\setminus X}(f(X\cup\{i\})-f(X))$$

$$\forall A\subseteq B\subseteq I,i\in I\setminus B$$

设令 $B\setminus A=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，由于 $A\setminus B=\Omega$，令 $Y=A,X=B,f$

收稿日期： 2012－08－25

作者简介： 宫兴荣(1985—)，男，硕士研究生，主要从事最优化理论及其算法研究。

是非减的,所以有$f(A)\leqslant f(B)$。

又令 $Y=A\cup\{i_1, i\}$,$X=A$,则有

$$f(A\cup\{i_1,i\})\leqslant f(A)+f(A\cup\{i\})-$$
$$f(A))+f(A\cup\{i_1\})-f(A)=$$
$$f(A\cup\{i_1\})+f(A\cup\{i\})-f(A)$$
$$f(A\cup\{i_1,i\})-f(A\cup\{i_1\})\leqslant$$
$$f(A\cup\{i\})-f(A)$$

同理有:$\Delta_i(A\cup\{i_1,i_2\})\leqslant\Delta_i(A\cup\{i_1\})$

$$\Delta_i(A\cup\{i_1,i_2,i_3\})\leqslant\Delta_i(A\cup\{i_1,i_2\}),\cdots,$$
$$\Delta_i(A\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_k\})\leqslant\Delta_i(A\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}\})$$

得到:

$$\Delta_i(B)\leqslant\Delta_i(A\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}\})\leqslant\cdots\leqslant$$
$$\Delta_i(A\cup\{i_1,i_2\})\leqslant\Delta_i(A\cup\{i_1\})\leqslant\Delta_i(A)$$

即对$\forall A\subseteq B\subseteq I, i\in I\backslash B$,有

$$f(B\cup\{i_1\})-f(B)\leqslant f(A\cup\{i\})-f(A)$$

所以f是Ω上的非减的下模集函数。

引理 3 设 P,D 是任意正整数,$\rho_i(1,2,\cdots,p)$是任意非负实数,则有以下不等式

$$\sum_{i=1}^{p}\rho_i\frac{\sum_{i=1}^{p}\rho_i}{\min\limits_{i=1,2,\cdots,p}\sum_{i=1}^{t-1}\rho_i+D\rho_t}\geqslant$$
$$1-\left(1-\frac{1}{D}\right)^p>1-e^{-\frac{P}{D}} \qquad (3)$$

证明:设$f(\rho)=\sum_{i=1}^{p}\rho_i=\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_p$

$$f(\rho^*)=\min_{i=1,2,\cdots,p}\sum_{i=1}^{t-1}\rho_i+D\rho_t\leqslant$$
$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_{t+1}+D\rho_t,(t=1,2,\cdots,p)$$

$$\frac{f(\rho)}{f(\rho^*)}=\frac{\sum_{i=1}^{p}\rho_i}{\min\limits_{i=1,2,\cdots,p}\sum_{i=1}^{t-1}\rho_i+D\rho_{t_p}}=$$

$$\frac{\rho_1}{f(\rho^*)}+\frac{\rho_2}{f(\rho^*)}+\cdots+\frac{\rho_p}{f(\rho^*)}=x_1+x_2+\cdots+x$$

又由式(2)得

$$x_1+x_2+\cdots+x_{t-1}+Dx_t\geqslant 1,(t=1,2,\cdots,p)$$

考虑如下线性规划

$$\begin{aligned}&\min\quad x_1+x_2+\cdots+x_p\\&\text{s.t.}\quad Dx_1\geqslant 1\\&x_1+Dx_2\geqslant 1\\&\vdots\\&x_1+x_2+\cdots+x_{t-1}+Dx_t\geqslant 1\\&x_i\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,p)\end{aligned}$$

求得该线性规划的可行解:

$$x_i=\frac{1}{D}\left(1-\frac{1}{D}\right)^{i-1}(i=1,2,\cdots,p)$$

上述线性规划的对偶规划:

$$\begin{aligned}&\max\quad y_1+y_2+\cdots+y_p\\&\text{s.t.}\quad Dy_1+y_2+\cdots+y_p\leqslant 1\\&Dy_2+y_3+\cdots+y_p\leqslant 1\\&\vdots\\&Dy_{p-1}+y_p\leqslant 1\\&Dy_p\leqslant 1\\&y_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,p\end{aligned}$$

求得该对偶规划的可行解:

$$y_i=\frac{1}{D}\left(1-\frac{1}{D}\right)^{p-i},i=1,2,\cdots,p$$

不难看出这两个线性规划的最优解相等,即有

$$\sum_{i=1}^{p}x_i=\sum_{i=1}^{p}y_i=\frac{1}{D}+\frac{1}{D}\left(1-\frac{1}{D}\right)+$$
$$\frac{1}{D}\left(1-\frac{1}{D}\right)^2+\cdots+\frac{1}{D}\left(1-\frac{1}{D}\right)^{p-1}=$$
$$\frac{1}{D}\left[\frac{\frac{1}{D}\left(1-\frac{1}{D}\right)^p}{\frac{1}{D}\left(1-\frac{1}{D}\right)}\right]=1-\left(1-\frac{1}{D}\right)^p\geqslant 1-e^{-\frac{P}{D}}$$

2 算法及其分析

2.1 基本思想

列举出基数为 1 或 2 的所有可行解,找出使目标函数值取最大值的可行解(最优解集),用 X_1 表示;考虑基数为 3 的所有可行解,在保证当前可行解集在多背包约束下可行的情况下,找出使目标函数取最大值的集合,用 X_2 表示;若 $f(X_1)\geqslant f(X_2)$,则输出 X_1,否则输出 X_2。

2.2 具体算法

记:$\max\{c_{1i},c_{2i},\cdots,c_{mi}\}=c_i$,$\min\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}=B$。$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

(1) $\forall U\subseteq I$,$|U|<3$ 且 $\sum_{i\in X}c_{ti}\leqslant B_t,(t=1,2,\cdots,m)$ 时,求出$f(U)$,令 $X_1=\arg\max\{f(U)\}$;

(2) $\forall U\subseteq I$,$|U|=3$,$\sum_{i\in X}c_{ti}\leqslant B_t,(t=1,2,\cdots,m)$ 时,令 $X^0=U,t=1,I^0=I$;

(3)找出

$$\theta_t=\max_{i\in I^{t-1}/X^{t-1}}\frac{f(X^{t-1}\cup\{i\})-f(X^{t-1})}{[c_i]+1}=$$
$$\frac{f(X^{t-1}\cup\{i_t\})-f(X^{t-1})}{[c_{i_t}]+1},$$

若 $\sum_{i\in X^{t-1}\cup\{i_t\}}c_i\leqslant B$,则取 $X^t=X^{t-1}$,$I^t=I^{t-1}\backslash\{i_t\}$;

(4)若 $I^t\backslash X^t=\varnothing$,终止,否则令 $t=t+1$,转(3);

(5)求出所有的由 U 开始的 X^t,

并计算 $f(X^t)$,

令 $X_2 = \arg\max\{f(X^t)\}$;

(6)若 $f(X_1) \geqslant f(X_2)$,则输出 X_1,否则输出 X_2。

2.3 算法的时间复杂性

由于基数不超过 3 的子集个数最多有 $3n^3$,故算法最多循环 $3n^3$ 次,而每次循环需调用一次贪婪算法求解,其复杂度为 $O(n)$,故其算法的时间复杂度为 $O(n^4)$。

2.4 算法的性能保证

定理 1:求解问题(1)的上述贪婪算法的性能保证是 $1-e^{-1}$。

证明:定义函数 $g(X)=f(X)-f(Y)$,因 $f(X)$ 是非减下模函数,故对 $\forall X$ 满足 $Y \subseteq X \subseteq I$,$g(X)$ 都是非减下模函数。因此 $g(X)$ 满足引理 2 中的不等式(2)。

设 t^*+1 是算法中的不能将 $i_{t^*+1} \in X^*$ 增加到 X^{t^*} 中的第一步,则:$X^{t^*+1}=X^{t^*}$,$I^{t^*+1}=I^{t^*} \setminus \{i_{t^*+1}\}$,设 t^*+1 是从第 t 步开始不能增加到 X^t 中的第一步,则:$X^t=X^{t-1}$,$I^t=I^{t-1}\setminus\{i_t\}$。若 $i_{t^*+1} \notin X^{t^*}$,则:$c_{i_{t^*+1}}+\sum\limits_{i \in X^{t^*}} c_i > B$

令 $X^t, t=1,2,\cdots t^*$,是算法在第 t 次迭代后所得的近似解。

根据不等式(2)及 $g(X)$ 的定义有:

$$g(X^*) \leqslant g(X^t) + \sum_{i \in X^*/X^t}(g(X^t \cup \{i\}) - g(X^t)) =$$
$$g(X^t) + \sum_{i \in X^*/X^t}(f(X^t \cup \{i\}) - f(X^t)) \leqslant$$
$$g(X^t) + \sum_{i \in X^*/X^t}(\lceil c_i \rceil + 1)\theta_{t+1} \leqslant$$
$$g(X^t) + ([B - \sum_{i \in Y} c_i] + t + 1)\theta_{t+1}$$

对 $t=1,2,\cdots t^*$ 均成立。

令 $c_t = \sum\limits_{\tau=1}^{t} \lceil c_{i_\tau} \rceil + t, (t=1,2,\cdots,t^*), c_0 = 0$,则:$c_t = \sum\limits_{\tau=1}^{t} \lceil c_{i_\tau} \rceil + t$, $(t=1,2,\cdots,t^*)$, $c_0=0$, $c'=c_{t^*+1} > [B - \sum\limits_{i \in Y} c_i] + t + 1 = c''$,对 $j=1,2,\cdots,c'$,当 $j=c_{t-1}+1, c_{t-1}+2,\cdots,c_t$ 时,定义 $\rho_j=\theta_t$,则:

$$g(X^{t^*} \cup \{i_{t^*+1}\}) = \sum_{\tau=1}^{t^*+1}(\lceil c_{i_\tau} \rceil + 1)\theta_\tau =$$
$$\sum_{j=1}^{c'}\rho_j g(X^t) = \sum_{\tau=1}^{t}(\lceil c_{i_\tau} \rceil + 1)\theta_\tau =$$
$$\sum_{j=1}^{c_t}\rho_j, t = 1,2,\cdots,t^*$$

根据等式:

$$\min_{X=1,2,\cdots,c'}\{\sum_{j=1}^{X-1}\rho_j + c''\rho_X\} =$$
$$\min_{t=1,2,\cdots,t^*}\{\sum_{j=1}^{c_j}\rho_j + c''\rho_{c_j+1}\} =$$
$$\min_{t=1,2,\cdots,t^*}\{g(X^t) + c''\lambda_{t+1}\}$$

和不等(3),(5)得:

$$\frac{g(X^{t^*} \cup \{i_{t^*+1}\})}{g(X^{t^*})} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{c'}\rho_j}{g(X^*)} \geqslant$$
$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{c'}\rho_j}{\min\limits_{X=1,2,\cdots,c'}\{\sum\limits_{j=1}^{X-1}\rho_j + c''\rho_X\}} \geqslant 1 - e^{\frac{c'}{c''}} > 1 - e^{-1}$$

故即证得上述算法的性能保证为 $1-e^{-1}$。

参考文献:

[1] ILEV V R. An approximation guarantee of the greedy descent algorithm for minimizing a submodular set function[J]. Discrete Applied M athematics, 2001, 114: 131-146.

[2] SVIRIDENKO M. A note on maximi zing a submodular set function subject to a knapsack constraint[J]. OperationsResearch Letters, 2004, 32(2): 41-43.

[3] 罗亮,贾欣鑫,何尚录. 求解组合拍卖问题最大值的贪婪算法[J]. 黑龙江科技学院学报, 2008, 18(5); 382-384.

[4] 雷习军,赵杏利,李小平,等. 求解背包约束下下模函数最大值问题的近似算法及其性能保证[J]. 淮阴工学院学报, 2010, 19(3): 15-18.

[5] 李小平,赵杏利,雷习军,等. 求解下模福利问题的一种随机算法及其性能保证[J]. 兰州交通大学学报, 2011, 30(1): 139-141.

(责任编辑 周江川)