第 36 卷 第 3 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 36 No. 3
2013 年 5 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　May, 2013

度量凸空间中 Lipschitz 型非自映射族的唯一公共不动点 *

朴勇杰

(延边大学理学院数学系，延吉 133002)

(E-mail: pyj6216@hotmail.com)

摘　要　考察了完备的度量凸空间框架下满足具有变系数的 Lipschitz 条件的非自映射族并根据给定的边界条件和映射族构造了一个收敛序列 $\{x_n\}$, 然后证明了该序列的唯一极限正是映射族的唯一的公共不动点. 最后给出了更广泛的结果. 所得结果推广和改进了许多压缩型映射族的公共不动点定理.

关键词　度量凸空间； Lipschitz 型条件；公共不动点；完备

MR(2000) 主题分类　47H10; 54H25; 54E40

中图分类　O177.91

1　引言与基本知识

有很多 Banach 空间的闭子集上的单值的自映射的不动点存在定理. 然而，有时需要考虑的映射是闭子集上的非自映射. 1976 年， Assad[1] 首先通过证明 Kannan 型映射的不动点定理并对所考虑的映射上附加某种边界条件的方法讨论了单值的非自映射具有不动点的问题. 而 Assad[2] 和 Assad, Kirk[3] 分别对集值映射讨论了类似的问题并得到一些结果. 后来, 很多学者在完备的度量凸空间上推广和改进了类似的问题并讨论了有限个或可数个映射族的公共不动点的唯一性问题 [4−8], 大大改进了之前的工作, 但是上述得到的所有结果都是在收缩系数是常数的条件下得到的. 在本文, 我们将在完备的度量凸空间框架下讨论满足具有变系数的 Lipschitz 条件的可数个非自映射族的唯一公共不动点的存在性问题, 并得到若干重要结果. 所得结果推广和改进了许多压缩型映射族的公共不动点定理.

定义 [4−6]　称度量空间 (X,d) 是度量凸的，如果对任何满足 $x \neq y$ 的 $x, y \in X$, 存在

本文 2011 年 8 月 22 日收到. 2011 年 11 月 8 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11261062), 吉林省教育厅科研项目 (吉教科合字 [2011] 第 434 号) 资助项目.

$z \in X$ 满足 $z \neq x$, $z \neq y$ 且 $d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)$.

引理 [3,4] 如果 K 是完备的度量凸空间 (X,d) 的非空闭子集，则对任何 $x \in K$ 和 $y \notin K$, 存在 $z \in \partial K$ 满足 $d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)$.

2 主要结果

首先给出如下公共不动点定理.

定理 1 设 K 是完备的度量凸空间 (X,d) 的非空闭子集， $\{T_i : K \to X\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是非自映射族使得对任何 $x,y \in K$ 及 $i,j \in \mathbb{N}$ 且 $i<j$, 成立

$$\begin{aligned} d(T_ix,T_jy) \leq & A_{i,j}(x,y)d(x,y)+B_{i,j}(x,y)d(x,T_ix)+C_{i,j}(x,y)d(y,T_jy) \\ & + D_{i,j}(x,y)d(x,T_jy)+E_{i,j}(x,y)d(y,T_ix), \end{aligned}$$

其中， $A_{i,j},B_{i,j},C_{i,j},D_{i,j},E_{i,j}$ 是 $X\times X$ 上的五个非负实值函数，满足对任何 $i,j \in \mathbb{N}$, $i<j$ 以及任何 $x,y\in K$, 成立

$$\begin{aligned} & A_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)<1; \\ & C_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)<1; \\ & B_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)<1; \\ & L_1=\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}\frac{A_{i,j}(x,y)+B_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)}{1-C_{i,j}(x,y)-D_{i,j}(x,y)}; \\ & L_2=\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}\frac{1+A_{i,j}(x,y)+B_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)}{1-C_{i,j}(x,y)-D_{i,j}(x,y)}; \\ & L_3=\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}\frac{A_{i,j}(x,y)+C_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)}{1-B_{i,j}(x,y)-E_{i,j}(x,y)}<\infty; \\ & L_4=\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}\frac{1+C_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)}{1-B_{i,j}(x,y)-E_{i,j}(x,y)}<\infty; \\ & L_1L_2<1. \end{aligned}$$

进一步，如果对任何 $i\in\mathbb{N}$ 及 $x\in\partial K$ 满足 $T_i(x)\in K$, 则 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有唯一公共个不动点.

证　任取 $x_0 \in K$. 我们将以下列方式构造两个序列 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$. 定义 $x'_1 = T_1x_0$. 如果 $x'_1 \in K$, 则令 $x_1 = x'_1$; 如果 $x'_1 \notin K$, 则根据引理存在 $x_1 \in \partial K$ 使得 $d(x_0,x_1)+d(x_1,x'_1)=d(x_0,x'_1)$. 定义 $x'_2=T_2x_1$. 如果 $x'_2\in K$, 则令 $x_2=x'_2$; 如果 $x'_2\notin K$, 则根据引理存在 $x_2\in\partial K$ 使得 $d(x_1,x_2)+d(x_2,x'_2)=d(x_1,x'_2)$. 重复此过程，将得到 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$ 如下： (i) $x'_n=T_nx_{n-1}$; (ii) 如果 $x'_n\in K$, 则令 $x_n=x'_n$; (iii) 如果 $x'_n\notin K$, 则根据引理存在 $x_n\in\partial K$ 使得 $d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x'_n)=d(x_{n-1},x'_n)$.

令 $P=\{x_i\in\{x_n\}: x_i=x'_i\}$ 和 $Q=\{x_i\in\{x_n\}: x_i\neq x'_i\}$. 如果存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n\in Q$, 则必有 $x_{n-1},x_{n+1}\in P$. 事实上，如果 $x_{n-1}\in Q$, 则 $x_{n-1}\neq x'_{n-1}$, 因此 $x_{n-1}\in\partial K$

且 $x'_{n-1} \notin K$, 于是根据给定的边界条件可推出 $x'_n = T_n x_{n-1} \in K$. 但是因为 $x_n \in Q$, 因此 $x_n \in \partial K$ 且 $x'_n \notin K$. 这是一个矛盾. 类似地可证 $x_{n+1} \in P$.

根据上述得到的事实，我们可以分三种情况估计 $d(x_n, x_{n+1})$:

情况 1 $x_n, x_{n+1} \in P$. 此时 $x_n = x'_n = T_n x_{n-1}$, $x_{n+1} = x'_{n+1} = T_{n+1} x_n$, 因此

$$\begin{aligned}
&d(x_n, x_{n+1}) = d(x'_n, x'_{n+1}) = d(T_n x_{n-1}, T_{n+1} x_n)\\
\le& A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, T_n x_{n-1})\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_n, T_{n+1} x_n) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, T_{n+1} x_n)\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_n, T_n x_{n-1})\\
=& A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n)\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1}) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_{n+1})\\
\le& A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n)\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1}) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) \big[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\big].
\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) \le& \frac{A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)}{1 - C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) - D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)} d(x_{n-1}, x_n)\\
\le& L_1\, d(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

情况 2 $x_n \in P$ 且 $x_{n+1} \in Q$. 此时 $x_n = x'_n = T_n x_{n-1}$, $x_{n+1} \ne x'_{n+1} = T_{n+1} x_n$, 因此

$$\begin{aligned}
&d(x_n, x_{n+1}) \le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x'_{n+1})\\
=& d(x_n, x'_{n+1}) = d(x'_n, x'_{n+1}) = d(T_n x_{n-1}, T_{n+1} x_n)\\
\le& A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, T_n x_{n-1})\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_n, T_{n+1} x_n) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, T_{n+1} x_n)\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_n, T_n x_{n-1})\\
=& A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_n)\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x'_{n+1}) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) \big[d(x_{n-1}, x'_{n+1})\big].
\end{aligned}$$

但是 $d(x_{n-1}, x'_{n+1}) \le d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x'_{n+1})$, 于是得到

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) \le& d(x_n, x'_{n+1})\\
\le& \frac{A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)}{1 - C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) - D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)} d(x_{n-1}, x_n)\\
\le& L_1\, d(x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

情况 3 $x_n \in Q$ 且 $x_{n+1} \in P$, 则此时必有 $x_{n-1} \in P$, 且根据 $d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x'_n) = d(x_{n-1}, x'_n)$ 可得到 $d(x_{n-1}, x_n) \le d(x_{n-1}, x'_n)$. 同时 $x_n \ne x'_n = T_n x_{n-1}$, $x_{n+1} = x'_{n+1} =$

$T_{n+1}x_n$, 于是得到

$$\begin{aligned}
&d(x_n', x_{n+1})\\
=&d(x_n', x_{n+1}') = d(T_n x_{n-1}, T_{n+1}x_n)\\
\le&A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, T_n x_{n-1})\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, T_{n+1}x_n) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, T_{n+1}x_n)\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, T_n x_{n-1})\\
=&A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n')\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_{n+1})\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_n')\\
\le&A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n')\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)[d(x_{n-1}, x_n') + d(x_n', x_{n+1})]\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_n')]\\
\le&A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n') + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n')\\
&+ C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)[d(x_{n-1}, x_n') + d(x_n', x_{n+1})]\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n').
\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}
&\big[1 - D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)\big]d((x_n', x_{n+1})\\
\le&\big[A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)\big]\, d(x_{n-1}, x_n') + C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}),
\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) \le& d(x_n, x_n') + d(x_n', x_{n+1}) \le d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_n') + d(x_n', x_{n+1})\\
=& d(x_{n-1}, x_n') + d(x_n', x_{n+1}),
\end{aligned}$$

因此 $d(x_n, x_{n+1}) - d(x_{n-1}, x_n') \le d(x_n', x_{n+1})$, 于是结合上述式子可得到

$$\begin{aligned}
&\big[1 - D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)\big][d(x_n, x_{n+1}) - d(x_{n-1}, x_n')\big]\\
\le&\big[A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)\\
&+ E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)\big]\, d(x_{n-1}, x_n') + C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}),
\end{aligned}$$

整理并利用情况 2 的结果得到

$$\begin{aligned}
&d(x_n, x_{n+1})\\
\le&\frac{1 + A_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + B_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) + E_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)}{1 - C_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n) - D_{n,n+1}(x_{n-1}, x_n)}\, d(x_{n-1}, x_n')
\end{aligned}$$

$$\leq L_1L_2d(x_{n-2},x_{n-1}).$$

令 $h=L_1L_2$, 则综合情况 1, 情况 2 及情况 3 并根据 $L_2>1$ 得到对任何 $n\in\mathbb{N}$, 总成立下列关系：

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+1})\leq& h\max\left\{d(x_{n-1},x_n),d(x_{n-2},x_{n-1})\right\}\\ \leq& h^{\frac{n}{2}-1}\max\{d(x_0,x_1),d(x_1,x_2)\},\qquad\forall\, n\in\mathbb{N},\quad n\geq 2.\end{aligned}$$

如果令 $\delta=h^{-1}\max\{d(x_0,x_1),d(x_1,x_2)\}$, 则 $d(x_n,x_{n+1})\leq h^{\frac{n}{2}}\delta,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$. 因此对任何 $m>n\geq N\geq 2$,

$$d(x_n,x_m)\leq\sum_{i=N}^{\infty}d(x_i,x_{i+1})\leq\sum_{i=N}^{\infty}h^{\frac{i}{2}}\delta\longrightarrow 0\qquad(\text{当}\ \ N\longrightarrow\infty\ \text{时}),$$

于是序列 $\{x_n\}$ 是柯西序列．根据 X 的完备性可设 p 是 $\{x_n\}$ 的极限，同时由 $x_n\in K$ 及 K 的闭性得知 $p\in K$. 另外，根据 P 和 Q 的性质，我们容易知道存在 $\{x_n\}$ 的无穷子序列 $\{x_{n_k+1}\}$ 使得 $x_{n_k+1}\in P$, 因此 $T_{n_k+1}x_{n_k}=x'_{n_k+1}=x_{n_k+1}$. 对任何固定的 $n\in\mathbb{N}$, 可选取充分大的正整数 k 使得使得 $n<n_k$ 且 $x_{n_k+1}\in P$, 因此

$$\begin{aligned}d(T_np,p)\leq& d(T_np,T_{n_k+1}x_{n_k})+d(T_{n_k+1}x_{n_k},p)\\ =& d(T_np,T_{n_k+1}x_{n_k})+d(x_{n_k+1},p)\\ \leq& A_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,x_{n_k})+B_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,T_np)\\ &+C_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(x_{n_k},T_{n_k+1}x_{n_k})+D_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,T_{n_k+1}x_{n_k})\\ &+E_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(x_{n_k},T_np)+d(x_{n_k+1},p)\\ =& A_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,x_{n_k})+B_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,T_np)\\ &+C_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(x_{n_k},x_{n_k+1})+D_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,x_{n_k+1})\\ &+E_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(x_{n_k},T_np)+d(x_{n_k+1},p)\\ \leq& A_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,x_{n_k})+B_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,T_np)\\ &+C_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})\big[d(x_{n_k},p)+d(p,x_{n_k+1})\big]+D_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})d(p,x_{n_k+1})\\ &+E_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})\big[d(x_{n_k},p)+d(p,T_np)\big]+d(x_{n_k+1},p),\end{aligned}$$

整理得到

$$\begin{aligned}d(T_np,p)\leq&\frac{A_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})+C_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})+E_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})}{1-B_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})-E_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})}\,d(p,x_{n_k})\\ &+\frac{1+C_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})+D_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})}{1-B_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})-E_{n,n_k+1}(p,x_{n_k})}\,d(p,x_{n_k+1})\\ \leq& L_3d(p,x_{n_k})+L_4d(p,x_{n_k+1}).\end{aligned}$$

因为当 $k\to\infty$ 时 $x_{n_k}\to p$ 且 $x_{n_k+1}\to p$, 因此由 L_3 和 L_4 的有界性可知 $d(T_np,p)=0$, 于是 $T_np=p$. 由 n 的任意性可知 p 是 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点.

如果 u 和 v 都是 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点，则

$$\begin{aligned}d(u,v)=&d(T_1u,T_2v)\\ \le& A_{1,2}(u,v)d(u,v)+B_{1,2}(u,v)d(u,T_1u)+C_{1,2}(u,v)d(v,T_2v)\\ &+D_{1,2}(u,v)d(u,T_2v)+E_{1,2}(u,v)d(v,T_1u)\\ =&[A_{1,2}(u,v)+D_{1,2}(u,v)+E_{1,2}(u,v)]d(u,v).\end{aligned}$$

由于 $A_{1,2}(u,v)+D_{1,2}(u,v)+E_{1,2}(u,v)<1$, 因此必有 $d(u,v)=0$, 于是 $u=v$, 这说明 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点是唯一的.

注记 1　在定理 1 中并不要求对任何 $x,y\in K$ 和 $i,j\in\mathbb{N}$ 且 $i\le j$, $A_{i,j}(x,y)+B_{i,j}(x,y)+C_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)<1$. 而是只要求它的若干个部分项之和小于 1. 事实上，甚至可以要求 $A_{i,j}(x,y)+B_{i,j}(x,y)+C_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)>1$. 比如，取 $A_{i,j}(x,y)=\frac{1}{10}$, $B_{i,j}(x,y)=\frac{2}{45}$, $C_{i,j}(x,y)=\frac{22}{45}$, $D_{i,j}(x,y)=\frac{1}{9}$, $E_{i,j}(x,y)=\frac{12}{45}$, 则得到 $A_{i,j}(x,y)+B_{i,j}(x,y)+C_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)=\frac{91}{90}>1$, 而 $A_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)=\frac{43}{90}<1$, $C_{i,j}(x,y)+D_{i,j}(x,y)=\frac{27}{90}<1$, $B_{i,j}(x,y)+E_{i,j}(x,y)=\frac{14}{45}<1$, $L_1=\frac{23}{56}$, $L_2=\frac{127}{56}$, $L_1L_2=\frac{2921}{3136}<1$, 而 L_3 和 L_4 显然都是有界的，因此可知 $A_{i,j}(x,y),B_{i,j}(x,y)$, $C_{i,j}(x,y),D_{i,j}(x,y),E_{i,j}(x,y)$, L_1,L_2,L_3,L_4 满足定理 1 中的所有条件，因此当映射族 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足给定的 Lifschitz 条件时存在唯一的公共不动点.

下列定理是定理 1 的另一种形式.

定理 2　设 K 是完备的度量凸空间 (X,d) 的非空闭子集，$\{T_i:K\to X\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是非自映射族使得对任何 $x,y\in K$ 及 $i,j\in\mathbb{N}$ 且 $i<j$, 成立

$$\begin{aligned}d(T_ix,T_jy)\le&\alpha_{i,j}(x,y)d(x,y)+\frac{\beta_{i,j}(x,y)}{2}\big[d(x,T_ix)+d(y,T_jy)\big]\\ &+\frac{\gamma_{i,j}(x,y)}{2}\big[d(x,T_jy)+d(y,T_ix)\big],\end{aligned}$$

其中，$\alpha_{i,j},\beta_{i,j},\gamma_{i,j}$ 是 $X\times X$ 上的三个非负实值函数，满足对任何 $i,j\in\mathbb{N}$, $i<j$ 以及任何 $x,y\in K$, 成立

$$\begin{aligned}&\alpha_{i,j}(x,y)+\gamma_{i,j}(x,y)<1,\qquad \beta_{i,j}(x,y)+\gamma_{i,j}(x,y)<2;\\ &L_1=\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}\frac{2\alpha_{i,j}(x,y)+\beta_{i,j}(x,y)+\gamma_{i,j}(x,y)}{2-\beta_{i,j}(x,y)-\gamma_{i,j}(x,y)};\\ &L_2=\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}\frac{2+2\alpha_{i,j}(x,y)+\beta_{i,j}(x,y)+\gamma_{i,j}(x,y)}{2-\beta_{i,j}(x,y)-\gamma_{i,j}(x,y)};\\ &L_1L_2<1.\end{aligned}$$

进一步，如果对任何 $i\in\mathbb{N}$ 及 $x\in\partial K$ 满足 $T_i(x)\in K$, 则 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有唯一公共个不动点.

证　取 $A_{i,j}(x,y)=\alpha_{i,j}(x,y)$, $B_{i,j}(x,y)=C_{i,j}(x,y)=\frac{\beta_{i,j}(x,y)}{2}$ 以及 $D_{i,j}(x,y)=E_{i,j}(x,y)=\frac{\gamma_{i,j}(x,y)}{2}$, 则容易看出 $L_1=L_3$, $L_4<L_2$, 于是定理 1 的所有条件被满足，所以 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有唯一公共个不动点.

下列结果是定理 1 和定理 2 的最简单形式的 Lifschitz 型非自映射族的公共不动点定理：

推论 1 设 K 是完备的度量凸空间 (X,d) 的非空闭子集，$\{T_i : K \to X\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是非自映射族使得对任何 $x,y\in K$ 及 $i,j\in\mathbb{N}$ 且 $i<j$, 成立 $d(T_ix,T_jy)\le \alpha_{i,j}(x,y)d(x,y)$, 其中 $\alpha_{i,j}$ 是 $X\times X$ 上的非负实值函数，满足对任何 $i,j\in\mathbb{N}$, $i<j$ 以及任何 $x,y\in K$, 成立

$$\Big[\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}\alpha_{i,j}(x,y)\Big]\Big[\sup_{i,j\in\mathbb{N},i<j}\ \sup_{x,y\in X}(1+\alpha_{i,j}(x,y))\Big]<1.$$

进一步，如果对任何 $i\in\mathbb{N}$ 及 $x\in\partial K$ 满足 $T_i(x)\in K$, 则 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有唯一公共个不动点.

根据定理 1, 我们将给出更一般形式的公共不动点定理，该定理只要求位于同一列的任何两个映射满足 Lifschitz 条件，位于不同列的任何两个映射满足交换性，但并不要求所有不同映射之间都满足 Lifschitz 条件.

定理 3 设 K 是完备的度量凸空间 (X,d) 的非空闭子集，$\{T_{i,j} : X\to X\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 是自映射族，$\{m_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 是正整数组使得对任何 $x,y\in X$ 及 $i_1,i_2,j\in\mathbb{N}$ 且 $i_1<i_2$, 成立

$$\begin{aligned}d(T_{i_1,j}^{m_{i_1,j}}x,T_{i_2,j}^{m_{i_2,j}}y)\le&A_{i_1,i_2,j}(x,y)d(x,y)+B_{i_1,i_2,j}(x,y)d(x,T_{i_1,j}^{m_{i_1,j}}x)\\&+C_{i_1,i_2,j}(x,y)d(y,T_{i_2,j}^{m_{i_2,j}}y)+D_{i_1,i_2,j}(x,y)d(x,T_{i_2,j}^{m_{i_2,j}}y)\\&+E_{i_1,i_2,j}(x,y)d(y,T_{i_1,j}^{m_{i_1,j}}x),\end{aligned}$$

其中，$A_{i,k,j},B_{i,k,j},C_{i,k,j},D_{i,k,j},E_{i,k,j}$ 是 $X\times X$ 上的五个非负实值函数，满足对任何 $i,k,j\in\mathbb{N}$, $i<k$ 以及任何 $x,y\in X$, 成立 $A_{i,k,j}(x,y)+D_{i,k,j}(x,y)+E_{i,k,j}(x,y)<1$, $C_{i,k,j}(x,y)+D_{i,k,j}(x,y)<1$, $B_{i,k,j}(x,y)+E_{i,k,j}(x,y)<1$ 且

$$\begin{aligned}&L_1=\sup_{i,k,j\in\mathbb{N},i<k}\ \sup_{x,y\in X}\frac{A_{i,k,j}(x,y)+B_{i,k,j}(x,y)+D_{i,k,j}(x,y)}{1-C_{i,k,j}(x,y)-D_{i,k,j}(x,y)};\\&L_2=\sup_{i,k,j\in\mathbb{N},i<k}\ \sup_{x,y\in X}\frac{1+A_{i,k,j}(x,y)+B_{i,k,j}(x,y)+D_{i,k,j}(x,y)+E_{i,k,j}(x,y)}{1-C_{i,k,j}(x,y)-D_{i,k,j}(x,y)};\\&L_3=\sup_{i,k,j\in\mathbb{N},i<k}\ \sup_{x,y\in X}\frac{A_{i,k,j}(x,y)+C_{i,k,j}(x,y)+E_{i,k,j}(x,y)}{1-B_{i,k,j}(x,y)-E_{i,k,j}(x,y)}<\infty;\\&L_4=\sup_{i,k,j\in\mathbb{N},i<k}\ \sup_{x,y\in X}\frac{1+C_{i,k,j}(x,y)+D_{i,k,j}(x,y)}{1-B_{i,k,j}(x,y)-E_{i,k,j}(x,y)}<\infty;\\&L_1L_2<1.\end{aligned}$$

进一步，如果 (a) 对任何 $i,j\in\mathbb{N}$, $T_{i,j}^{m_{i,j}}(\partial K)\subset K$; (b) 对任何 $i_1,i_2,\mu,\nu\in\mathbb{N}$ 且 $\mu\ne\nu$ 时 $T_{i_1,\mu}T_{i_2,\nu}=T_{i_2,\nu}T_{i_1,\mu}$, 则 $\{T_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有唯一公共不动点.

证 固定 $j\in\mathbb{N}$, 并令 $S_{i,j}=T_{i,j}^{m_{i,j}}$, 则 $\{S_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足定理 1 的所有条件，于是 $\{S_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 K 中有一个唯一的公共不动点 p_j. 下面证明 p_j 也是 $\{T_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的唯一公共不动点. 事实上，对任何选定的 $i\in\mathbb{N}$, $S_{i,j}(T_{i,j}(p_j))=T_{i,j}^{m_{i,j}}(T_{i,j}(p_j))=T_{i,j}(T_{i,j}^{m_{i,j}}(p_j))=$

$T_{i,j}(S_{i,j}(p_j)) = T_{i,j}(p_j)$, 这说明对任何 i, $T_{i,j}(p_j)$ 是 $S_{i,j}$ 的不动点. 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 且 $k > i$,

$$\begin{aligned}
&d\big(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))\big) = d\big(S_{i,j}(T_{i,j}(p_j)), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))\big)\\
\le& A_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) d(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j))\\
&+ B_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) d(T_{i,j}(p_j), S_{i,j}(T_{i,j}(p_j)))\\
&+ C_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) d(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j)))\\
&+ D_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) d(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j)))\\
&+ E_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) d(T_{i,j}(p_j), S_{i,j}(T_{i,j}(p_j)))\\
=&\big[C_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) + D_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j))\big]\, d\big(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))\big).
\end{aligned}$$

因为 $C_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) + D_{i,k,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) < 1$, 于是 $d(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))) = 1$, 所以得到 $T_{i,j}(p_j) = S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))$, 这说明 $T_{i,j}(p_j)$ 也是 $S_{k,j}(k > i)$ 的不动点. 类似地，当 $k < i$, 我们可推出

$$\begin{aligned}
&d(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))) = d(S_{k,j}(T_{i,j}(p_j)), S_{i,j}(T_{i,j}(p_j)))\\
\le&\big[B_{k,i,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) + E_{k,i,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j))\big]\, d\big(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))\big).
\end{aligned}$$

因为 $B_{k,i,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) + E_{k,i,j}(T_{i,j}(p_j), T_{i,j}(p_j)) < 1$, 于是 $d(T_{i,j}(p_j), S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))) = 1$, 所以得到 $T_{i,j}(p_j) = S_{k,j}(T_{i,j}(p_j))$, 这说明 $T_{i,j}(p_j)$ 也是 $S_{k,j}\ \ (k < i)$ 的不动点. 总之，$T_{i,j}(p_j)$ 是 $\{S_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点. 由 $\{S_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点的唯一性得到对任何 i, 都有 $T_{i,j}(p_j) = p_j$, 这说明 p_j 是 $\{T_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点.

如果 u_j 和 v_j 是 $\{T_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点, 则它们也应该是 $\{S_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点，于是由 $\{S_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点的唯一性得到 $u_i = p_j = v_j$. 这就证明了对每个 $j \in \mathbb{N}$, $\{T_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点是唯一的，即 p_j.

最后证明 $\{T_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 有唯一公共不动点. 下面证明对任何 $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $p_\mu = p_\nu$. 事实上对任何 $i_1, i_2, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ 且 $\mu \ne \nu$, 因为 $T_{i_1,\mu}(p_\mu) = p_\mu$ 且 $T_{i_2,\nu}(p_\nu) = p_\nu$, 因此 $T_{i_1,\mu}(T_{i_2,\nu}(p_\nu)) = T_{i_1,\mu}(p_\nu)$, 于是根据 (b) 得到 $T_{i_2,\nu}(T_{i_1,\mu}(p_\nu)) = T_{i_1,\mu}(T_{i_2,\nu}(p_\nu)) = T_{i_1,\mu}(p_\nu)$, 这说明 $T_{i_1,\mu}(p_\nu)$ 是 $T_{i_2,\nu}$ 的不动点. 由 i_2 的任意性知 $T_{i_1,\mu}(p_\nu)$ 是 $\{T_{i_2,\nu}\}_{i_2\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点，但是 $\{T_{i_2,\nu}\}_{i_2\in\mathbb{N}}$ 只有唯一公共不动点 p_ν, 于是 $T_{i_1,\mu}(p_\nu) = p_\nu$, 再由 i_1 的任意性知 p_ν 是 $\{T_{i_1,\mu}\}_{i_1\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点，于是由 $\{T_{i_1,\mu}\}_{i_1\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点只有 p_μ 可得到 $p_\mu = p_\nu$. 令 $p^* = p_j$, 则 p^* 就是 $\{T_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点. 而 $\{T_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 的公共不动点的唯一性是显然的.

注记 2 在定理 3 中映射族的定义域必须是 X 而不应是 K, 其原因是虽然 $p_j \in K$ 但是不能保证 $T_{i,j}(p_j) \in K$, 否则无法运用压缩条件.

参 考 文 献

[1] Assad N A. On Fixed Point Theorem of Kannan in Banach Spaces. *TamKang J. Math.*, 1976, 7: 91–94

[2] Assad N A. Fixed Point Theorems for Set-valued Transformations on Compact Sets. *Boll. Un. Math. Ital,* 1973, 7(4): 1–7

[3] Assad N A, Kirk W A. Fixed Point Theorems for Set-valued Mappings of Contractive Type. *Pacific J. Math.,* 1972, 43: 553–562

[4] Khan M S, Pathak H K, Khan M D. Some Fixed Point Theorems in Metrically Convex Spaces. *Georgain J. Math.,* 2000, 7(3): 523–530

[5] Chatterjea S K. Fixed Point Theorems. *C. R. Acad. Bulagarc Sci,* 1972, 25: 727–730

[6] 朴勇杰. 度量凸空间上一个非自映射的不动点定理. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2003, 24(3): 15–18
(Piao Y J. A Fixed Point Theorem for a Non-self-mapping in Metrically Convex Spaces. *Acta Jilin Normal University (Natural Science)*, 2003, 24(3): 15–18)

[7] Hadzic O. Common Fixed Point Theorem for a Family of Mappings in Convex Metric Spaces. *Univ. U. Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat.,* 1990, 20(1): 89–95

[8] 朴勇杰, 朴东哲. 度量凸空间上非自映射族的唯一公共不动点定理. 应用数学, 2009, 22(4): 852–857
(Piao Y J, Piao D Z. Unique Common Fixed Point Theorems for a Family of Non-self Maps in Metrically Convex Spaces. *Mathematica Applicata*, 2009, 22(4): 852–857)

Unique Common Fixed Points for a Family of Lipschitz Type Non-self Mappings on Metrically Convex Spaces

PIAO YONGJIE

(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002)

(*E-mail: pyj6216@hotmail.com*)

Abstract A family of non-self maps satisfying a Lipschitz type condition with variable coefficients in a complete metrically convex space was considered and a convergent sequence $\{x_n\}$ was constructed by using the given boundary condition and the given mappings, and then the fact that the unique limit of $\{x_n\}$ is the unique common fixed point of the given mappings was proved. Finally, more general results were given. Our main theorems generalize and improve many common fixed point theorems of contractive type mappings.

Key words metrically convex space; Lipschitz type condition; common fixed point; complete

MR(2000) Subject Classification 47H10; 54H25; 54E40

Chinese Library Classification O177.91