第 36 卷 第 3 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 36 No. 3
2013 年 5 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　May, 2013

具有中间亏指数的线性哈密顿算子的点谱 *

郑召文

(曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165)

(E-mail: zhwzheng@126.com)

胡玉峰

(曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165)

摘　要　本文讨论具有任意亏指数 d 的自伴线性哈密顿算子点谱与对应的线性哈密顿系统的平方可积解之间的关系. 若对于某个实开区间中的任意点 λ, 系统总有 d 个线性无关解, 则它的任何自伴算子的点谱在这个开区间上是不稠密的.

关键词　线性哈密顿系统; 点谱; 中间亏指数; 自伴算子

MR(2000) 主题分类　34B05; 34B20; 47E05

中图分类　O175.1

1　引言

在本文中，我们考虑下面的线性哈密顿系统

$$Jy'(t) - H(t)y(t) = \lambda W(t)y(t), \qquad t \in I = [a, b), \tag{1.1_λ}$$

其中 a 是正则端点， b 是奇异端点 (即 $b = +\infty$; 或者 $W(t)$, $H(t)$ 至少有一个函数在 b 点附近不可积). $W(t)$, $H(t)$ 是在 I 上局部可积的 $2n \times 2n$ 阶实对称矩阵， J 是辛矩阵，即 $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$， I_n 是 $n \times n$ 单位阵， $W(t) \geq 0$ 是半正定的权函数.

定义对应于系统 (1.1_λ) 的形式哈密顿算子 L 为 $Ly(t) := Jy'(t) - H(t)y(t)$. 首先定义函数空间

$$L_W^2[a, b) := \Big\{ y \in C^{2n} \Big| \int_a^b y^*(t) W(t) y(t) \, \mathrm{d}t < +\infty \Big\},$$

本文 2011 年 2 月 21 日收到. 2011 年 10 月 24 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11171178,11271225) 及山东省自然科学基金 (ZR2009AQ010) 资助项目.

对任意的 $y, z \in L_W^2[a,b)$, 定义内积

$$\langle y, z\rangle_W := \int_a^b z^*(t)W(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

及相应的半范数 $\|y\|_W := (\langle y, y\rangle_W)^{\frac{1}{2}}$. 如果 $y \in L_W^2[a,b)$, 我们则称 y 是平方可积的. 由于 W 是半正定的，所以定义等价关系 $y \sim z \Leftrightarrow \|y-z\|_W = 0$, 则 $L_W^2[a,b)$ 在这个等价关系之下的商空间是一个 Hilbert 空间，为了方便仍记此空间为 $L_W^2[a,b)$.

整篇文章我们总是假设下面的确定性条件成立： $\exists\, t_0 \in [a,b)$, $\forall\, t_0 \le b' \le b$, 如果 y 满足 $Jy' - Hy = Wf$, $Wy = 0$, $a \le t < b'$, $f \in L_W^2[a,b')$, 则 $y(t) \equiv 0$, $a \le t < b'$.

自从 1835 年哈密顿提出哈密顿原理以来，哈密顿原理逐渐成为现代物理的基石. 哈密顿原理描述的是一切真实的，耗散效应可以忽略不计的物理过程. 从物理的角度来讲，孤立点谱对应着粒子的能量级，它解释了粒子由一个能量级向另一个能量级跃迁的现象，连续谱与粒子的分布有密切相关，这种现象是经典力学无法解释的. 线性哈密顿系统谱理论便是这项研究工作的核心内容，由此可见，线性哈密顿算子的谱理论不仅具有理论意义，而且是解决实际问题的有效工具. 正是由于哈密顿算子的广泛应用，人们对哈密顿系统的研究长盛不衰.

微分算子及其谱的研究在反散射理论、小波分析、正交多项式等领域应用广泛 [1−4]. 谱是算子的精髓，也是研究的重点和难点. 对微分算子的谱理论的研究可分为两类：定义在有限闭区间上且系数具有很好性质的谱问题称为正则谱问题；否则，称之为奇异谱问题. 有关正则谱问题的研究成果已基本成熟，但奇异谱问题的定性分析还有待深入研究，特别是高阶算子的亏指数为中间情形时，谱的分布及性质、特征函数系的完备性、按照特征函数系的展开等问题. 对高阶微分算子谱问题的研究， [5] 研究了平方可积解的个数与连续谱之间的关系.

本文在 [5] 的基础上，讨论具有任意亏指数的自伴线性哈密顿算子点谱与对应的线性哈密顿系统的平方可积解之间的关系. 若对于某个实开区间中的任意点 λ, 所考虑的系统总有 d 个线性无关解，则它的任何自伴算子的点谱在这个开区间上是不稠密的. 本文的结构安排如下：在第 1 节综述之后，第 2 节给出 Hilbert 空间中线性哈密顿算子的一些基本概念，如最大 (小) 算子，点谱，自伴算子及亏指数等，然后给出线性哈密顿算子的一些基本性质和定理. 第 3 节给出本文的主要结果，即若对于某个实开区间中的任意点 λ, 所考虑的系统总有 d (d 为最小哈密顿算子的亏指数) 个线性无关的解，则它的任何自伴算子的点谱在这个开区间上是不稠密的.

2 预备知识

在这一部分我们给出 Hilbert 空间中线性哈密顿算子的一些基本概念及常用引理. 用 $AC_{\mathrm{loc}}[a,b)$ 表示在区间 $[a,b)$ 上局部绝对连续函数的全体；用 $D_M(T)$ 表示由 L 生成的最大哈密顿算子 T 的定义域，即

$$D_M(T) := \big\{y \in L_W^2[a,b) \cap AC_{\mathrm{loc}}[a,b) \mid 存在\ f \in L_W^2[a,b),$$

$$\text{使得 } Jy'(t) - H(t)y(t) = W(t)f(t)\};$$

定义最大算子 $T_M : D_M(T) \to L^2_W[a,b)$ 为 $T_M y := f$; 用 $D_0(T_0)$ 表示由 L 生成的预最小哈密顿算子 T_0 的定义域,

$$D_0(T_0) := \{y \in D_M(T) \mid y \text{ 在 } [a,b) \text{ 上具有紧支集}\},$$

定义预最小算子 $T_0 : D_0(T_0) \to L^2_W[a,b)$ 为 $T_0 y := T_M y$. 显然我们可得 $D_0(T_0) \subset D_M(T)$ 且 T_0 是可闭的. $\overline{T_0}$ 称为最小哈密顿算子，它的定义域记作 D_0.

定义 2.1 令 T 为 Hilbert 空间 H 上的线性算子,若 $(T-\lambda I)^{-1}$ 不存在,即 $(T-\lambda I)y=0$ 有非平凡解，则称 λ 为 T 的特征值， T 的所有特征值组成的集称为 T 的点谱，记为 $\sigma_p(T)$.

定义 2.2 令 T 为 Hilbert 空间 H 上的线性算子，若对于 $\forall\, y,z \in D_M(T) \subseteq H$, 有 $\langle Ty, z\rangle = \langle y, Tz\rangle$, 则称线性算子 T 为厄米特. 若 T 为厄米特且定义域在 H 中稠密，则称线性算子 T 是对称的. 若线性算子 T 是对称的且 $T{=}T^*$, 则称线性算子 T 是自伴的.

定义 2.3 对于 $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $(\overline{T_0} - \lambda I)y = 0$ 所有非平凡解组成的空间称为 $\overline{T_0}$ 对应 λ 的亏空间，记为 $N(\lambda - \overline{T_0})$. 若亏空间 $N(\lambda - \overline{T_0})$ 对应维数 d_+, 亏空间 $N(\overline{\lambda} - \overline{T_0})$ 对应维数 d_-, 则 d_+, d_- 分别称为 $\overline{T_0}$ 对应 λ 的正，负亏指数，记为 $(d_+,\, d_-)$.

定义 2.4 令 $[f:g](t) = g^*(t)Jf(t)$.

易知 $[f:g](t)$ 具有如下性质：

$$\forall\, f,g \in D_M(T), [f:g](b) = \lim_{x\to b^-}[f:g](t) \text{ 总存在.}$$

引理 2.1[6] 对任意的 $y, z \in AC_{\mathrm{loc}}[a,b)$,

$$\int_a^{b'} [z^*(t)L(y)(t) - L^*(z)(t)y(t)]\,\mathrm{d}t = [y:z]_a^{b'}, \qquad \forall\, b' \in [a,b).$$

引理 2.2[7] 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 令 $y(\cdot,\lambda), z(\cdot,\overline{\lambda})$ 分别是 $(1.1_\lambda), (1.1_{\overline{\lambda}})$ 对应的任意解，则

$$[y(\cdot,\lambda) : z(\cdot,\overline{\lambda})](t) = [y(\cdot,\lambda) : z(\cdot,\overline{\lambda})](a), \qquad t \in [a,b).$$

特别地当 $\lambda \in \mathbb{R}$ 时，有

$$[y(\cdot,\lambda) : z(\cdot,\lambda)](t) = [y(\cdot,\lambda) : z(\cdot,\lambda)](a), \qquad t \in [a,b).$$

对任意的 $f,g \in D_M(T)$, 存在 $y,z \in L^2_W[a,b)$, 使得 $Tf = y$, $Tg = z$. 由引理 2.1, 引理 2.2 可知，对于任意的 $b' \in [a,b)$,

$$\begin{aligned}
&\langle Tf, g\rangle_W - \langle f, Tg\rangle_W \\
=&\int_a^b \left\{g^*(t)W(t)(Tf)(t) - (Tg)^*(t)W(t)f(t)\right\}\mathrm{d}t \\
=&\int_a^b \left\{g^*(t)L(f)(t) - L^*(g)(t)f(t)\right\}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$=(g^*(t)Jf(t))|_a^b=[f:g](b)-[f:g](a).$$

由定义 2.4 我们可以得到下面的结论:

引理 2.3 对任意的 $f,g\in D_M(T)$,

$$\langle Tf,g\rangle_W-\langle f,Tg\rangle_W=[f:g]_a^b=[f:g](b)-[f:g](a).$$

由 [6, 引理 2.3], 我们知道 $n\le d_+,d_-\le 2n$. 由 [2, 第 4 章] 知, T_0 存在自伴扩张的充要条件是 $d_+=d_-$. 由于系统 (1.1_λ) 中的系数矩阵是实的, 故亏指数总相等, 以下部分皆假设 $d_+=d_-=d$ 成立.

引理 2.4[7] 对任意的 $\widetilde{b}\in[a,b)$, 任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^{2n}$, 存在 $f\in AC_{\rm loc}([a,b))$, 使得

$$\begin{aligned}&Ly(t)=W(t)f(t),\qquad t\in[a,\widetilde{b}),\\&y(a)=\alpha,\qquad y(\widetilde{b})=\beta\end{aligned}$$

有一个解 φ. 并且任意的 $y_1\in D_M(T)$, $y_1(\tilde{b})=\beta$, 令

$$\tilde{y}(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[a,\tilde{b}),\\ y_1(t), & t\in[\tilde{b},b),\end{cases}$$

则 $\tilde{y}(t)\in D_M(T)$.

定理 2.1[1] $D_0=\big\{y\in D_M(T)\mid y(a)=0,\ [y:g](b)=0,\ \forall\, g\in D_M(T)\big\}$.

定理 2.2[8] $D_M(T)$ 的子流形 $D(T)$ 是最小算子 $\overline{T_0}$ 的自伴扩张域的充要条件为 $D_M(T)$ 存在 $f_1,\cdots,f_d$ 满足下列条件:

(1) $f_1,\cdots,f_d$ 模 D_0 线性无关 ($f_1,\cdots,f_d$ 的任何非平凡线性组合不属于 D_0);

(2) $[f_i:f_j]_a^b=0,\ i,j=1,\cdots,d$;

使得 $D(T)=\big\{f\in D_M(T)\mid [f:f_j]_a^b=0,\ 1\le j\le d\big\}$, 其中 d 是最小算子 $\overline{T_0}$ 的亏指数.

3 主要结果

引理 3.1 若 λ 是实的且 (1.1_λ) 在 $D_M(T)$ 中有 d 个线性无关解, 则 (1.1_λ) 在 $D_M(T)$ 中有 d 个线性无关实解.

证 设对应于哈密顿系统 (1.1_λ) 的 d 个线性无关解为 $\varphi_j=\xi_j+i\eta_j$, 其中 ξ_j,η_j 为 $2n$ 维向量值函数, $j=1,\cdots,d$. 由于 $L\varphi_j=\lambda W\varphi_j$, 即 $L(\xi_j+i\eta_j)=\lambda W(\xi_j+i\eta_j)$, 注意到 L 是实的, 所以 $L(\xi_j)=\lambda W\xi_j$, $L(\eta_j)=\lambda W\eta_j$, 即 ξ_j,η_j, $j=1,\cdots,d$ 为 (1.1_λ) 的 $2d$ 个解. 若 $\xi_1\ne 0$, 令 $\theta_1=\xi_1$, 若 $\xi_1=0$, 则令 $\theta_1=\eta_1$; 同法可定义 θ_2, 此时必有 θ_1,θ_2 线性无关; 设线性无关的 k 个解 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ $(k\le d-1)$ 已定义, 若 ξ_{k+1} 与 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 线性无关, 则令 $\theta_{k+1}=\xi_{k+1}$, 反之令 $\theta_{k+1}=\eta_{k+1}$, 由于 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{k+1}$ 线性无关, 故必有 $\theta_1,\cdots,\theta_{k+1}$ 线性无关. 由此可得 θ_j $(1\le j\le d)$ 就是所求的 d 个线性无关的实解.

引理 3.2 设 T 是由 L 生成的自伴微分算子, 其定义域

$$D(T)=D_0\dot{+}{\rm span}\,\{f_1,\cdots,f_d\},$$

其中 $f_1,\cdots,f_d$ 如定理 2.2 所定义，又设 $g_1,\cdots,g_d$ 是系统 (1.1_λ) 对应于 $\lambda=\mu\in\mathbb{R}$ 的 d 个线性无关的实解．令 T_μ 也是由 L 生成的自伴微分算子，其定义域

$$D(T_\mu)=D_0\dot{+}\mathrm{span}\{g_1,\cdots,g_d\}.$$

若 μ 不是 T 的特征值，则

(1) $f_1,\cdots,f_d,g_1,\cdots,g_d$ 是模 D_0 线性无关的；

(2) $D(T)\cap D(T_\mu)=D_0$.

证　(1) (反证法) 若否，则存在不全为零的常数 $p_1,\cdots,p_d,q_1,\cdots,q_d$, 使得

$$p_1f_1+\cdots+p_df_d+q_1g_1+\cdots+q_dg_d=y\in D_0.$$

由最小算子定义域的定义可知，对于任意的 $z\in D_M$, 有 $[y:z](a)=[y:z](b)=0$. 于是

$$q_1[g_1:g_i]_a^b+\cdots+q_d[g_d:g_i]_a^b+p_1[f_1:g_i]_a^b+\cdots+p_d[f_d:g_i]_a^b=0,\qquad i=1,\cdots,d,$$
$$q_1[g_1:f_i]_a^b+\cdots+q_d[g_d:f_i]_a^b+p_1[f_1:f_i]_a^b+\cdots+p_d[f_d:f_i]_a^b=0,\qquad i=1,\cdots,d,$$

即

$$\begin{pmatrix} [g_1:g_1]_a^b & \cdots & [g_d:g_1]_a^b & [f_1:g_1]_a^b & \cdots & [f_d:g_1]_a^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [g_1:g_d]_a^b & \cdots & [g_d:g_d]_a^b & [f_1:g_d]_a^b & \cdots & [f_d:g_d]_a^b \\ [g_1:f_1]_a^b & \cdots & [f_d:f_1]_a^b & [f_1:f_1]_a^b & \cdots & [f_d:f_1]_a^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [g_1:f_d]_a^b & \cdots & [f_d:f_d]_a^b & [f_1:f_d]_a^b & \cdots & [f_d:f_d]_a^b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_d \\ q_1 \\ \vdots \\ q_d \end{pmatrix}=0.$$

令

$$F=\begin{pmatrix} [g_1:f_1]_a^b & \cdots & [g_d:f_1]_a^b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [g_1:f_d]_a^b & \cdots & [g_d:f_d]_a^b \end{pmatrix},$$

则上式的系数矩阵可化为 $\widetilde{F}=\begin{pmatrix} 0 & F^* \\ F & 0 \end{pmatrix}$, 其中 F^* 为 F 共轭转置矩阵.

下面证明矩阵 F 的秩为 d. 若否，则有 $\mathrm{rank}\,(F)<d$. 令

$$\beta_i=([g_1:f_i]_a^b,\cdots,[g_d:f_i]_a^b),\qquad i=1,\cdots,d.$$

表示矩阵 F 的 d 个行向量，则 $\beta_1,\cdots,\beta_d$ 是线性相关的，即集合 $\{\beta_i\}_{i=1}^d$ 中至少有一个元素可以用其它的线性表示．我们不妨设 $\beta_1=k_2\beta_2+\cdots+k_d\beta_d$, $k_i\in\mathcal{C}$. 于是

$$[g_1,f_i]_a^b=k_2[g_2,f_i]_a^b+\cdots+k_d[g_d,f_i]_a^b,\qquad i=1,\cdots,d.$$

从而

$$[g_1-k_2g_2-\cdots-k_dg_d:f_i]_a^b=0,\qquad i=1,\cdots,d.$$

故由定理 2.2 知，$g_1-k_2g_2-\cdots-k_dg_d\in D(T)$.

因为是 $g_1,\cdots,g_d$ 线性无关的，所以 $g_1-k_2g_2-\cdots-k_dg_d$ 是 $Ly=\mu Wy$ 的非平凡解．这与 μ 不是 T 的特征值矛盾．于是 $\mathrm{rank}\,(F)=d$.

由以上的讨论可知，$|\widetilde{F}|\neq 0$, 从而 $p_i=q_i=0\ (i=1,\cdots,d)$, 这与 $p_1,\cdots,p_d,q_1,\cdots,q_d$ 不全为零矛盾．故 $f_1,\cdots,f_d,g_1,\cdots,g_d$ 是模 D_0 线性无关的．

(2) 若 $y\in D(T)\cap D(T_\mu)$, 则存在常数 $\widetilde{p_i},\widetilde{q_i}(i=1,\cdots,d)$ 和 $g_0,f_0\in D_0$, 使得

$$y=\widetilde{p_1}g_1+\cdots+\widetilde{p_d}g_d+g_0,\qquad y=\widetilde{q_1}f_1+\cdots+\widetilde{q_d}f_d+f_0.$$

从而

$$\widetilde{p_1}g_1+\cdots+\widetilde{p_d}g_d-\widetilde{q_1}f_1-\cdots-\widetilde{q_d}f_d+g_0-f_0=0.$$

由 (1) 知， $f_1,\cdots,f_d,g_1,\cdots,g_d$ 是模 D_0 线性无关的．于是 $\widetilde{p_i}=\widetilde{q_i}=0\ (i=1,\cdots,d)$ 和 $g_0=f_0$. 从而 $y=g_0\in D_0$, 于是 $D(T)\cap D(T_\mu)\subset D_0$. 又 $D_0\subset D(T)\cap D(T_\mu)$, 故 $D(T)\cap D(T_\mu)=D_0$.

定理 3.3 设 T 为满足 (1.1_λ) 的自伴微分算子， T 的亏指数为 d, 其中 $n<d<2n$, 假设存在开区间 $\widetilde{I}=(\mu_1,\mu_2)$, 其中 $-\infty\leq\mu_1<\mu_2\leq\infty$, 使得 $\forall\,\lambda\in\widetilde{I}$, (1.1_λ) 都有 d 个线性无关解，则对于 $\overline{T_0}$ 的每个自伴扩张 T 来说，点谱 $\sigma_p(T)$ 在开区间 $\widetilde{I}$ 的任何子区间上不稠密．

证 令 $\widetilde{I}$ 是实轴上的一开区间， T 是由 L 生成的自伴微分算子，其定义域

$$D(T)=D_0\dot{+}\mathrm{span}\,\{f_1,\cdots,f_d\}.$$

假设 $\lambda\in\widetilde{I}$ 不是 T 的特征值，对应于 λ 的系统 (1.1_λ) 在 $L^2_W[a,b)$ 中有 d 个线性无关解，设为 $g_1,\cdots,g_d$. 由引理 3.1 我们不妨设 $g_1,\cdots,g_d$ 是实值函数，令 $g=(g_1,\cdots,g_d)$.

考虑自伴微分算子 T_g, 其定义域为

$$D(T_g)=\big\{y\in D_M(T)\mid [g_j:y]_a^b=0,\ j=1,\cdots,d\big\}.$$

由引理 3.2 我们可以知道 $f_1,\cdots,f_d,g_1,\cdots,g_d$ 是模 D_0 线性无关的, 且 $D(T)\cap D(T_\mu)=D_0$. 令 λ_i 是 T 在 $\widetilde{I}$ 上的特征值， y_i 是对应的属于 $L^2_W[a,b)$ 的标准正交特征向量，则

$$\begin{aligned}\langle g_j,f_i\rangle_w=&\int_a^b f_i^*Wg_j\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{(\lambda-\lambda_i)f_i^*Wg_j}{\lambda-\lambda_i}\,\mathrm{d}t\\=&(\lambda-\lambda_i)^{-1}\int_a^b\lambda f_i^*Wg_j-\lambda_if_i^*Wg_j\,\mathrm{d}t\\=&(\lambda-\lambda_i)^{-1}\int_a^b f_i^*(\lambda Wg_j)-(\lambda_iW^*f_i^*)g_j\,\mathrm{d}t\\=&(\lambda-\lambda_i)^{-1}\int_a^b f_i^*L(g_j)-L^*(f_i)g_j\,\mathrm{d}t=(\lambda-\lambda_i)^{-1}[g_j:f_i]_a^b.\end{aligned}$$

对任意给定的 i, $[g_1:y_i]_a^b,\cdots,[g_d:y_i]_a^b$ 至少有一个不是零．否则，对所有的 $j=1,\cdots,d$, $[g_j:y_i]_a^b=0$, 则 $y_i\in D(T_g)$. 又 y_i 是 T 的特征值, 故 $y_i\in D_M(T)$. 由引理 3.2 可得 $y_i\in D_M(T)\cap D(T_g)=D_0$. 因为 a 是正则端点, 所以 $y_i(a)=0\ \ (1\leq i\leq d)$, 这与 y_i 是特

征值 λ_i 对应的特征向量相矛盾，于是，对任意给定的 i $(1 \leq i \leq d)$，$[g_j : y_i]_a^b$ $(1 \leq j \leq d)$ 至少有一个不为零.

令 $c_i = \sum\limits_{j=1}^{d} |[g_j : y_i]_a^b|^2 > 0$, 则

$$\sum_{j=1}^{d} \big|\langle g_j, y_i\rangle_W\big|^2 = (\lambda - \lambda_i)^{-2} \sum_{j=1}^{d} \big|[g_j : y_i]_a^b\big|^2 = (\lambda - \lambda_i)^{-2} c_i,$$

所以

$$\sum_{j=1}^{d} \|u_i\|^2 \geq \sum_{j=1}^{d} \sum_{i} |\langle g_j, y_i\rangle_W|^2 = \sum_{i} (\lambda - \lambda_i)^{-2} c_i,$$

于是

$$0 < \sum_{i} (\lambda - \lambda_i)^{-2} c_i < \infty, \qquad \lambda \in \widetilde{I} \setminus \{\lambda_i\}.$$

下证 $\{\lambda_i\}$ 在区间 $\widetilde{I}$ 上无处稠密 (反证法). 假设 $\{\lambda_i\}$ 在区间 $\widetilde{I}$ 的子区间 $[u, v]$ 上稠密．令

$$K_N = \Big\{\lambda \Big| \sum_{i} (\lambda - \lambda_i)^{-2} c_i \leq N\Big\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Big\{\lambda \Big| \sum_{i}^{j} (\lambda - \lambda_i)^{-2} c_i \leq N\Big\},$$

则 K_N 是闭集，且

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} K_N = \Big\{\lambda \Big| \sum_{i} (\lambda - \lambda_i)^{-2} c_i < \infty\Big\} = [u, v] \setminus \{\lambda_i\}.$$

由 $\{\lambda_i\}$ 在区间 $\widetilde{I}$ 的子区间 $[u, v]$ 上稠密知，子区间 $[u, v]$ 包含某个特征值 λ_i 且它的充分小领域不包含于 K_N, 故 K_N 在子区间 $[u, v]$ 上无处稠密．从而

$$[u, v] \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} K_N = \Big\{\lambda \Big| \sum_{i} (\lambda - \lambda_i)^{-2} c_i = \infty\Big\} = \{\lambda_i\}$$

是第二纲集，这与特征值 $\{\lambda_i\}$ 是可数集矛盾，从而可知，点谱 $\sigma_p(T)$ 在开区间 $\widetilde{I}$ 的任何子区间上不稠密.

致谢．感谢审稿人提出的宝贵意见.

参　考　文　献

[1] Krall A M. Hilbert Spaces, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser-Verlag, 2002

[2] Naimark M A. Linear Differential Operators. Ungar, New York: Springer-Verlag, 1968

[3] Weidmann J. Linear Operators in Hilbert spaces. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1980

[4] 曹之江．常微分算子．上海：上海科技出版社， 1986

(Cao Z J. Ordinary Differential Operators. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1986)

[5] Sun J, Wang A P, Zettl A. Continuous Spectrum and Square-integrable Solutions of Differential Operators with Intermediate Deficiency Index. *J. Funct. Anal.*, 2008, 255: 3229–3248

[6] Shi Y M. On the Rank of the Matrix Radius of the Limiting Set for a Singular Linear Hamiltonian System. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, 376: 109–123

[7] Sun H Q, Shi Y M. Self-adjoint Extensions for Singular Linear Hamiltonian Systems. *Math. Nachr.*, 2011, 284(5-6): 797–814

[8] Zheng Z W, Chen S Z. GKN Theory for Linear Hamiltonian Systems. *Appl. Math. Comput.*, 2006, 182: 1514–1527

Point Spectrum of Linear Hamiltonian Operators with Intermediate Deficiency Indices

ZHENG Zhaowen

(*School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu, Shandong* 273165)

(*E-mail: zhwzheng@126.com*)

HU Yufeng

(*School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu, Shandong* 273165)

Abstract In this paper, the relationship between the number of square-integrable solutions of the linear Hamiltonian systems with real-values spectral parameter λ and point spectrum of linear Hamiltonian operators with arbitrary deficiency index d is discussed. If for all λ in an open interval I, there always exist d linearly independent square-integrable solutions, then the point spectrum of each self-adjoint extension of the minimal operator is nowhere dense in I.

Key words linear Hamiltonian system; point spectrum; intermediate deficiency index self-adjoint operator

MR(2000) Subject Classification 34B05; 34B20; 47E05

Chinese Library Classification O175.1