第 36 卷 第 3 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 36 No. 3
2013 年 5 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA May, 2013

一维 p-Laplace 二阶脉冲微分方程的奇异边值问题 *

魏 君

(吉林大学农学部公共教学中心，长春 130062)

(E-mail: weij@jlu.edu.cn)

蒋达清

(东北师范大学数学与统计学院，长春 130024)

祖 力

(长春大学理学院，长春 130022)

摘 要 脉冲现象作为一种瞬时突变现象，在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的．本文研究具有奇异边值的一维 p-Laplace 二阶微分方程在脉冲影响下的正解的存在性，介绍了解的一般性存在定理，并用 A-A 定理和不动点定理证明了一维 p-Laplace 二阶脉冲微分方程的奇异边值问题的正解存在性定理.

关键词 边值问题；脉冲微分方程；解的存在性定理；不动点定理

MR(2000) 主题分类 62G05; 62N01

中图分类 O212.7

1 引言

本文研究了具有奇异边值的一维 p-Laplace 二阶微分方程在脉冲影响下的正解的存在性

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, \qquad t \in (0,1)\backslash\{\tau\}, \quad \tau \in (0,1), \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau} = I(u(\tau)), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $\phi(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$, 给定 $\tau \in (0,1)$, 非线性项 f 可能在 $u = 0$ 具有奇性； q

本文 2009 年 11 月 17 日收到．2013 年 3 月 24 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10571021) 资助项目.

可能在 $t=0$ 和 / 或 $t=1$ 具有奇性；$I:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续非减；$\triangle\phi(u')|_{t=\tau}=\phi(u')(\tau+0)-\phi(u')(\tau-0)$, 其中 $\phi(u')(\tau+0),\phi(u')(\tau-0))$ 分别是 $\phi(u')(t)$ 在 $t=\tau$ 点的右极限和左极限.

二阶脉冲边值问题的研究很多 (见 [1–7]), 很多文章研究了奇异与非奇异正解的问题. 在没有脉冲的情况下，主要有两种建立存在性的技巧：(1) 单调迭代的上下解方法 (见 [2–5,8]); (2) 运用锥中的 Krasnoselskii's 不动点定理 (见 [1,6,7]). 但是，研究带有脉冲的 p-Laplacian 二阶微分方程的奇异边值问题的文章还不多见. [1] 利用格林函数和不动点定理考虑了含脉冲的二阶微分方程的 Dirichlet 边值问题，也就是二阶 p-Laplacian 脉冲微分方程当 $p=2$ 时的特殊情形. [9] 中同样是用不动点定理证明了不带脉冲的一维 p-Laplacian 二阶微分方程的奇异边值问题

$$\begin{cases} (\phi(u'))'+q(t)f(t,u)=0, & t\in(0,1), \\ u(0)=0, \qquad u(1)+B(u'(1))=0. \end{cases} \tag{1.2}$$

的正解的存在性. [2] 中，作者应用上下解方法研究了含脉冲的非线性 ϕ-Laplacian 二阶边值问题.

基于以上的工作，本文将 [1,2,9] 的方法推广到二阶 p-Laplacian 脉冲微分方程 (1.1) 中.

2　存在性原则

我们先给出一般性的存在性原则，它将在我们后面的证明中被用到. 我们将利用 Schauder 不动点定理和一个 Leray-Schauder 非线性变换去获得一个普遍适用的存在性原则. 首先，考虑下面形式的一维 p-laplacian 脉冲微分方程

$$\begin{cases} (\phi(u'))'+q(t)F(t,u)=0, & t\in(0,1)\backslash\{\tau\},\quad \tau\in(0,1), \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau}=I(u(\tau)), & \\ u(0)=a, \qquad u(1)=b, & \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，$\phi(s)=|s|^{p-2}s,\ p>1$, 非线性项 $F(t,u)\in C([0,1]\times R,\ R)$; $q(t):[0,1]\to(0,\infty)$, 并且 $\int_0^1 q(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$; $I:R\to R$ 连续.

为方便起见，令 $J=[0,1]$, $PC[J,R]=\{u:J\to R|u(t)$ 连续，$u'(\tau+0)$ 和 $u'(\tau-0)$ 存在，且 $u'(\tau)=u'(\tau-0)\}$, 则 $PC[J,R]$ 构成一个 Banach 空间，其中 $|u|_0=\sup\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$. 设 $J'=(0,1)$, $J^0=(0,1)\backslash\{\tau\}$, $J_0=[0,\tau]$, $J_1=(\tau,1]$.

若 $u\in PC[J,R]\cap C^2[J^0,R]$ 满足方程 (2.1), 我们称 u 是方程 (2.1) 的解.

引理 2.1[10]　$S\subset PC[J,R]$ 是相对紧的集合当且仅当 S 上的每个函数在 J 一致有界且在每个 J_k $(k=0,1,2,\cdots,m)$ 等度连续.

定理 2.1 若下列两个条件成立：

$$F:[0,1]\times R\to R \text{ 有界},$$
$$I:R\to R \text{ 有界},$$

则 (2.1) 至少有一个解.

证 首先，定义映射 $T:C[0,1]\to C[0,1]$,

$$(Tu)(t)=\begin{cases} a+\displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(c-\int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & 0\le t\le\tau,\\ b-\displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(c-\int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r, & \tau\le t\le 1,\end{cases}$$

其中 $\phi^{-1}(u)=|u|^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{sgnu}$ 是 ϕ 的反函数， $c=c(u)=\phi(u'(0))$ 由下列方程唯一确定

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \phi^{-1}\Big(c-\int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\ &+\int_\tau^1 \phi^{-1}\Big(c-\int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r\\ =&:w(c)=b-a.\end{aligned}\tag{2.2}$$

关于映射 T, 我们指出

(i) 对固定的 $u\in C[0,1]$, 方程 (2.2) 有唯一解 $c\in R$,

(ii) $C[0,1]$ 在映射 T 下的像在 [0,1] 上一致有界且等度连续，并且

(iii) 映射 T 在 $C[0,1]$ 连续.

令 $u\in C[0,1]$ 固定，则由 $w(c)$ 的定义可知

$$\begin{aligned}&\tau\phi^{-1}\Big(c-M\cdot\int_0^1 q(s)\,\mathrm{d}s\Big)+(1-\tau)\phi^{-1}\Big(c-M\cdot\int_0^1 q(s)\,\mathrm{d}s-M\Big)\le\omega(c)\\ \le&\tau\phi^{-1}\Big(c+M\cdot\int_0^1 q(s)\,\mathrm{d}s\Big)+(1-\tau)\phi^{-1}\Big(c+M\cdot\int_0^1 q(s)\,\mathrm{d}s+M\Big),\end{aligned}\tag{2.3}$$

这里 M 是一个正数并且有

$$|F(t,u)|\le M \quad \text{在} \quad [0,1]\times R,$$
$$|I(u(\tau))|\le M \quad \text{在} \quad (0,1).$$

由于 ϕ^{-1} 是 R 上严格增的连续函数，且 $\phi^{-1}(-\infty)=-\infty$, $\phi^{-1}(+\infty)=+\infty$, 由 w 的定义及 (2.3) 知 w 也如此. 因此，存在唯一的 $c\in R$ 满足方程 (2.2), 由此知 (i) 成立.

不失一般性，我们可设 $a=0$, $b=0$. 根据积分中值定理及 (2.2), 可知对固定的 $u\in C[0,1]$, 存在 $\xi_1\in(0,\tau)$ 和 $\xi_2\in(\tau,1)$, 使得

$$\begin{aligned}&\tau\phi^{-1}\Big(c-\int_0^{\xi_1} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\\ &+(1-\tau)\phi^{-1}\Big(c-\int_0^{\xi_2} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big)=0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\phi^{-1}\Big[\tau^{p-1}\Big(c-\int_0^{\xi_1} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\Big]\\=&\phi^{-1}\Big[-(1-\tau)^{p-1}\Big(c-\int_0^{\xi_2} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big)\Big],\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\tau^{p-1}\Big(c-\int_0^{\xi_1} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\\=&-(1-\tau)^{p-1}\Big(c-\int_0^{\xi_2} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big),\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}c=&\frac{1}{\tau^{p-1}+(1-\tau)^{p-1}}\Big[\tau^{p-1}\int_0^{\xi_1} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\\&+(1-\tau)^{p-1}\Big(\int_0^{\xi_2} q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s+I(u(\tau))\Big)\Big],\end{aligned}$$

其中 c 是对应函数 $u\in C[0,1]$ 的 (2.2) 的唯一解.

因此

$$\begin{aligned}|c|\le&\frac{1}{\tau^{p-1}+(1-\tau)^{p-1}}\Big[\tau^{p-1}M\int_0^1 q(s)\,\mathrm{d}s+(1-\tau)^{p-1}\Big(M\int_0^1 q(s)\,\mathrm{d}s+M\Big)\Big]\\=:&\,N,\end{aligned}$$

并且有

$$\Big|c-\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big|\le N,\qquad t\in[0,1]\backslash\{\tau\}. \tag{2.4}$$

由 ϕ 的定义及 (2.4) 可得 $(Tu)(t)$ 在 $[0,1]\backslash\{\tau\}$ 上是一致连续的.

又由

$$\begin{aligned}(Tu)'(t)=&\begin{cases}\phi^{-1}\Big(c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big), & 0\le t<\tau,\\ -\phi^{-1}\Big(c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big), & \tau<t\le 1,\end{cases}\\ \le&\begin{cases}\phi^{-1}(N), & 0\le t<\tau,\\ -\phi^{-1}(N+M), & \tau<t\le 1,\end{cases}\end{aligned}$$

知 $(Tu)'(t)$ 在 $[0,\tau)$ 和 $(\tau,1]$ 有界. 设在 $[0,\tau)$ 上,

$$(Tu)'(t)\le L,$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$, 则对 $t,s\in[0,\tau)$, $|t-s|<\delta$, 有

$$|(Tu)(t)-(Tu)(s)|\le L|t-s|<\varepsilon.$$

从而 $(Tu)(t)$ 在 $[0,\tau)$ 上等度连续. 类似可证 $(Tu)(t)$ 在 $(\tau,1]$ 等度连续. 于是 $(Tu)(t)$ 在整个 $[0,1]\backslash\{\tau\}$ 是等度连续的. 因此 (ii) 成立.

设 $u_0,u_j\in C[0,1]$ 且当 $j\to\infty$ 时, 有 $\|u_j-u_0\|\to 0$. 于是

$$(Tu_j)(t)=\begin{cases} a+\displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(c_j-\int_0^r q(s)F(s,u_j(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & 0\le t\le\tau,\\ b-\displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(c_j-\int_0^r q(s)F(s,u_j(s))\,\mathrm{d}s-I(u_j(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r, & \tau\le t\le 1,\end{cases}$$

其中 c_j, $j=0,1,\cdots$ 满足下列方程:

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \phi^{-1}\Big(c_j-\int_0^r q(s)F(s,u_j(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\ &+\int_\tau^1 \phi^{-1}\Big(c_j-\int_0^r q(s)F(s,u_j(s))\,\mathrm{d}s-I(u_j(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r\\ =&b-a.\end{aligned}\tag{2.2^j}$$

由于 $\{c_j\}$ 有界, 从而必有聚点. 设 c^* 为 $\{c_j\}$ 的聚点, 由聚点定义, 存在 $\{c_j\}$ 的子集收敛到 c^*, 设此子集为 $\{c_{j(k)}\}$. 把 $j(k)$ 和 $\{c_{j(k)}\}$ 代入 $(2.2)^{j(k)}$ 并令 $k\to\infty$, 得

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \phi^{-1}\Big(c^*-\int_0^r q(s)F(s,u_0(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\\ &+\int_\tau^1 \phi^{-1}\Big(c^*-\int_0^r q(s)F(s,u_0(s))\,\mathrm{d}s-I(u_0(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r\\ =&b-a.\end{aligned}$$

这说明 $c^*=c_0$, 因此 $c_j\to c_0$. 于是, 利用控制收敛定理可知

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty}(Tu_j)(t)\\ =&\lim_{j\to\infty}\begin{cases} a+\displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(c_j-\int_0^r q(s)F(s,u_j(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & 0\le t\le\tau,\\ b-\displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(c_j-\int_0^r q(s)F(s,u_j(s))\,\mathrm{d}s-I(u_j(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r, & \tau\le t\le 1,\end{cases}\\ =&(Tu_0)(t),\qquad t\in[0,1].\end{aligned}$$

这表明 $(Tu)(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 因此 (iii) 成立.

由 (i), (ii), (iii), 根据 Arzela-Ascoli 定理可知, $(Tu)(t)$ 有界并且全连续. 由 Schouder 不动点定理可得 T 至少有一个不动点.

设 T 的不动点为 $u(t)$, 则有

$$u(t)=\begin{cases} a+\displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(c-\int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & 0\le t\le\tau,\\ b-\displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(c-\int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r, & \tau\le t\le 1,\end{cases}$$

其中 c 满足限制条件 (2.2). 于是 $u(0)=a$, $u(1)=b$. 因此

$$u'(t)=\begin{cases}\phi^{-1}\Big(c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big), & 0\le t<\tau,\\ \phi^{-1}\Big(c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))\Big), & \tau<t\le 1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\phi^{-1}\Big(c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big), & 0\le t<\tau,\\ \phi^{-1}\Big(c-\displaystyle\int_0^\tau q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))-\int_\tau^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big), & \tau<t\le 1,\end{cases}$$

于是

$$\phi(u'(t))=\begin{cases}c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s, & 0\le t<\tau,\\ c-\displaystyle\int_0^\tau q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s-I(u(\tau))-\int_\tau^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s, & \tau<t\le 1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s, & 0\le t<\tau,\\ \phi(u'(\tau-0))-I(u(\tau))-\displaystyle\int_\tau^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s, & \tau<t\le 1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}c-\displaystyle\int_0^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s, & 0\le t<\tau,\\ \phi(u'(\tau+0))-\displaystyle\int_\tau^t q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s, & \tau<t\le 1,\end{cases}$$

则

$$-(\phi(u'))'=q(t)F(t,u(t)),\qquad t\in(0,1)\backslash\{\tau\},$$

因此，函数 $u(t)$ 是 (2.1) 的解. 我们证明了 (2.1) 至少有一个解.

定理 2.2 设下列两个条件成立:

$$F:J\times R\longrightarrow R\ \text{连续}\tag{2.5}$$

且

$$I:R\longrightarrow R\quad\text{连续、有界.}\tag{2.6}$$

(I) 设

$$\begin{cases}\text{对任意}\ \ r>0,\quad \text{存在}\ \ h_r\in L^1_{\mathrm{loc}}(J)\ \ \text{且}\ \ \displaystyle\int_0^1 h_r(t)\,\mathrm{d}t<\infty,\\ \text{使得对}\ \ t\in J,\ \ \text{当}\ \ |u|\le r\ \text{时，必有}\ \ |F(t,u)|\le h_r(t)\end{cases}\tag{2.7}$$

成立. 并假设存在与 λ 无关的常数 $M>0$, 使

$$|u|_0=\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|\ne M\tag{2.8}$$

成立，其中 $u \in PC[J,R] \cap C^2[J^0,R]$ 是方程

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + \lambda^{p-1} q(t) F(t,u) = 0, & t \in (0,1), \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau} = \lambda^{p-1} I(u(\tau)), & \tau \in (0,1), \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases} \tag{2.9$_\lambda$}$$

对所有的 $\lambda \in (0,1)$ 的任意解，则 (2.1) 有解 u 且 $|u|_0 \le M$.

(II) 设

$$\begin{cases} \text{存在 } h \in L^1_{loc}(J) \text{ 且 } \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t < \infty, \\ \text{使得对于 } t \in J, u \in R, \text{ 有 } |F(t,u)| \le h(t) \end{cases} \tag{2.10}$$

成立，则 (2.1) 必有解.

对这个定理我们不做证明，因为它的证明过程和我们刚刚证明的定理是非常类似的，其中有一些微小但是非常重要的不同. 我们可以设 $U = \big\{u \in C[0,1] : |u|_0 < M\big\}$, 并且定义映射 $T_\lambda : \overline{U} \to C[0,1]$,

$$(T_\lambda u)(t) = \begin{cases} a + \lambda \displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(c - \int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & 0 \le t \le \tau, \\ b - \lambda \displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(c - \int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s - I(u(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r, & \tau \le t \le 1, \end{cases}$$

其中 $c = c(u) = \phi(u'(0))$ 由下列方程唯一确定

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^\tau \phi^{-1}\Big(c - \int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ &\quad + \lambda \int_\tau^1 \phi^{-1}\Big(c - \int_0^r q(s)F(s,u(s))\,\mathrm{d}s - I(u(\tau))\Big)\,\mathrm{d}r \\ &= b - a. \end{aligned} \tag{2.2$^\lambda$}$$

我们只需证明 T_λ 在 $[0,1]$ 上一致有界，等度连续并且全连续. 它的证明可参照定理 2.1 中相关部分的证明.

3 主要结论

我们将给出下面方程的存在性定理

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + q(t) f(t,u) = 0, & t \in J^0, \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau} = I(u(\tau)), & \tau \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $I : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 连续非减，非线性项 f 可能在 $u = 0$ 具有奇性， q 可能在 $t = 0$ 和 / 或 $t = 1$ 具有奇性. 我们将首先证明 (3.1) 具有 $PC\,[J,R] \cap C^2[J^0,R]$ 的解. 为此，由定理 2.2, 对任意充分大的 n, 我们将先建立下列 “修正” 问题的 $PC[J,R] \cap C^2[J^0,R]$ 解

的存在性

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, & t \in J^0, \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau} = I(u(\tau)), \\ u(0) = \dfrac{1}{n}, \quad u(1) = \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{3.2^n}$$

要证明 (3.1) 有解只需令 $n \to \infty$, 这一步的关键思想就是 Arzela-Ascoli 定理.

定理 3.1 设下列条件成立:

$$q \in C(0,1), \text{ 在 } J' \text{上 } q > 0 \text{ 且 } \int_0^1 q(t)\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{3.3}$$

$$f : J \times (0,\infty) \to (0,\infty) \text{ 连续,} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \text{在 } J \times (0,\infty) \text{ 上，} 0 \le f(t,u) \le g(u) + h(u), \text{ 且} \\ \text{在 } (0,\infty) \text{ 上，} g > 0 \text{ 连续非增,} \\ \text{在 } [0,\infty) \text{ 上，} h \ge 0 \text{ 连续，且在 } (0,\infty) \text{上，} \dfrac{h}{g} \text{ 非减,} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \text{对任意常数 } H > 0, \text{ 存在函数 } \psi_H \text{ 在 } J \text{ 连续，且在 } J' \text{ 为正,} \\ \text{使得在 } J' \times (0,H] \text{ 上，} f(t,u) \ge \psi_H(t), \end{cases} \tag{3.6}$$

并且

$$\exists\, r > 0 \quad \text{使} \quad \int_0^r \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} > \frac{1}{2}\phi^{-1}\Big(\frac{I(r)}{g(r)} + b_0\Big\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\Big\}\Big), \tag{3.7}$$

其中

$$b_0 = \max\Big\{\int_0^{\frac{1}{2}} q(t)\,\mathrm{d}t, \int_{\frac{1}{2}}^1 q(t)\,\mathrm{d}t\Big\}, \tag{3.8}$$

则 (3.1) 有解 $u \in PC[J,R] \cap C^2[J^0,R]$, 且在 J' 上 $u > 0$, $|u|_0 < r$.

证　选择适当的 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < r$, 使

$$\int_\varepsilon^r \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} > \frac{1}{2}\phi^{-1}\Big(\frac{I(r)}{g(r)} + b_0\Big\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\Big\}\Big). \tag{3.9}$$

选取适当的 $n_0 \in \{1,2,\cdots\}$, 使得 $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, 令 $N_0 = \{n_0, n_0+1, \cdots\}$. 为证 (3.2)^n, $n \in N_0$ 有解，我们先考虑

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + q(t)F_n(t,u) = 0, & t \in J^0, \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau} = \widetilde{I}(u(\tau)), \\ u(0) = \dfrac{1}{n}, \quad u(1) = \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{3.10^n}$$

其中

$$F_n(t,u) = \begin{cases} f(t,u), & u \ge \dfrac{1}{n}, \\ f\Big(t, \dfrac{1}{n}\Big), & u < \dfrac{1}{n}, \end{cases} \qquad \widetilde{I}(u) = \begin{cases} I(u), & u \ge 0, \\ I(0), & u < 0. \end{cases}$$

我们将利用定理 2.2 证明对于任意的 $n\in N_0$，$(3.10)^n$ 都存在解．为此，先考虑问题族

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + \lambda^{p-1}q(t)F_n(t,u) = 0, \qquad t\in J^0, \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau} = \lambda^{p-1}\widetilde{I}(u(\tau)), \\ u(0) = \dfrac{1}{n}, \qquad u(1) = \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{$3.11)^n_\lambda$}$$

其中 $0<\lambda<1$. 首先，易知存在 $\tau_n\in(0,1)$, 使得在 $(0,\tau_n)$ 上有 $u'(t)\geq 0$, 在 $(\tau_n,1)$ 上有 $u'(t)\leq 0$, 且 $u(\tau_n)=\|u\|=r$. 令 u 是 $(3.11)^n_\lambda$ 的解，若 $0<\tau_n\leq\tau$, 则有

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} + \lambda\displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_r^{\tau_n} q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & 0\leq t\leq\tau_n, \\ \dfrac{1}{n} + \lambda\Big[\displaystyle\int_\tau^1 \phi^{-1}\Big(I(u(\tau)) + \int_{\tau_n}^r q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\Big] & \\ +\lambda\Big[\displaystyle\int_t^\tau \phi^{-1}\Big(\int_{\tau_n}^r q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\Big], & \tau_n\leq t\leq\tau, \\ \dfrac{1}{n} + \lambda\displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(I(u(\tau)) + \int_{\tau_n}^r q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & \tau\leq t\leq 1, \end{cases}$$

其中 τ_n 由下列方程唯一确定

$$\begin{aligned} &\int_0^{\tau_n} \phi^{-1}\Big(\int_r^{\tau_n} q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ =&\int_\tau^1 \phi^{-1}\Big(I(u(\tau)) + \int_{\tau_n}^r q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ &+\int_{\tau_n}^\tau \phi^{-1}\Big(\int_{\tau_n}^r q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

若 $\tau\leq\tau_n<1$, 则有

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} + \lambda\int_0^t \phi^{-1}\Big(I(u(\tau)) + \displaystyle\int_r^{\tau_n} q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & 0\leq t\leq\tau, \\ \dfrac{1}{n} + \lambda\Big[\displaystyle\int_0^\tau \phi^{-1}\Big(I(u(\tau)) + \int_r^{\tau_n} q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\Big] & \\ +\lambda\Big[\displaystyle\int_\tau^t \phi^{-1}\Big(\int_r^{\tau_n} q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r\Big], & \tau\leq t\leq\tau_n, \\ \dfrac{1}{n} + \lambda\displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(\int_{\tau_n}^r q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, & \tau_n\leq t\leq 1, \end{cases}$$

其中 τ_n 由下列方程唯一确定

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_n}^1 \phi^{-1}\Big(\int_{\tau_n}^r q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ =&\int_0^\tau \phi^{-1}\Big(I(u(\tau)) + \int_r^{\tau_n} q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r \\ &+\int_\tau^{\tau_n} \phi^{-1}\Big(\int_r^{\tau_n} q(s)F_n(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

因此

$$u(t) \geq \frac{1}{n}, \quad t \in [0,1], \quad \widetilde{I}(u(\tau)) = I(u(\tau)), \quad F_n(t,u(t)) = f(t,u(t)).$$

对于 $x \in J^0$, 显然有

$$-\big(\phi(u'(x))\big)' \leq g(u(x))\Big\{1 + \frac{h(u(x))}{g(u(x))}\Big\} q(x). \tag{3.12}$$

情形 1 若 $0 < \tau < \tau_n$，$u'(\tau_n) = 0$, 将 (3.12) 从 $t\,(\tau < t < \tau_n)$ 到 τ_n 积分，得

$$\phi(u'(t)) \leq \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_t^{\tau_n} q(x) g(u(x))\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\phi(u'(\tau+0)) \leq \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_\tau^{\tau_n} q(x) g(u(x))\,\mathrm{d}x,$$

而由 $\phi(u'(\tau+0)) - \phi(u'(\tau-0)) = -I(u(\tau))$, 可知

$$\begin{aligned}\phi(u'(\tau-0)) =& \phi(u'(\tau+0)) + I(u(\tau)) \\ \leq& I(u(\tau)) + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_\tau^{\tau_n} q(x) g(u(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

再将 (3.12) 从 $t\ (0 < t < \tau)$ 到 τ 积分，得

$$\begin{aligned}\phi(u'(t)) \leq& \phi(u'(\tau-0)) + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_t^{\tau} q(x) g(u(x))\,\mathrm{d}x \\ \leq& I(u(\tau)) + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_t^{\tau_n} q(x) g(u(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此

$$\phi(u'(t)) \leq I(u(\tau_n)) + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_t^{\tau_n} q(x) g(u(x))\,\mathrm{d}x, \qquad 0 < t \leq \tau_n,$$

则

$$u'(t) \leq \phi^{-1}\Big[I(u(\tau_n)) + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_t^{\tau_n} q(x) g(u(x))\,\mathrm{d}x\Big],$$

将上式从 0 到 τ_n 积分，得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} \leq& \int_0^{\tau_n} \phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_t^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big] \\ \leq& \tau_n \phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_0^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big],\end{aligned}$$

从而

$$\int_\varepsilon^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} \leq \tau_n \phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\} \int_0^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big]. \tag{3.13}$$

类似地，我们可将 (3.12) 从 τ_n 到 t $(t \geq \tau_n)$ 积分，再从 τ_n 到 1 积分，得

$$\int_{\varepsilon}^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} \leq (1-\tau_n)\phi^{-1}\Big(\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{1} q(x)\,\mathrm{d}x\Big). \tag{3.14}$$

情形 2 若 $\tau_n < \tau < 1$, $u'(\tau_n) = 0$, 将 (3.12) 从 τ_n 到 $t\,(\tau_n < t < \tau)$ 积分，得

$$-\phi(u'(t)) \leq \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$-\phi(u'(\tau-0)) \leq \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{\tau} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,$$

而由 $\phi(u'(\tau+0)) - \phi(u'(\tau-0)) = -I(u(\tau))$, 可知

$$\begin{aligned}-\phi(u'(\tau+0)) =& -\phi(u'(\tau-0)) + I(u(\tau))\\ \leq& I(u(\tau)) + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{\tau} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

再将 (3.12) 从 τ 到 $t\,(\tau < t < 1)$ 积分，得

$$\begin{aligned}-\phi(u'(t)) \leq& -\phi(u'(\tau+0)) + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x\\ \leq& I(u(\tau)) + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此

$$-\phi(u'(t)) \leq I(u(\tau_n)) + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x, \qquad \tau_n \leq t < 1,$$

则

$$-u'(t) \leq \phi^{-1}\Big[I(u(\tau_n)) + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x\Big],$$

将上式从 τ_n 到 1 积分，得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{u(\tau_n)} \frac{du}{\phi^{-1}(g(u))} \leq& \int_{\tau_n}^{1}\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\ \leq& (1-\tau_n)\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{1} q(x)\,\mathrm{d}x\Big],\end{aligned}$$

从而

$$\int_{\epsilon}^{u(\tau_n)} \frac{du}{\phi^{-1}(g(u))} \leq (1-\tau_n)\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + \Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{1} q(x)\,\mathrm{d}x\Big]. \tag{3.13$'$}$$

类似地，我们可将 (3.12) 从 $t\,(t \le \tau_n)$ 到 τ_n 积分，再从 0 到 τ_n 积分，得

$$\int_{\varepsilon}^{u(\tau_n)} \frac{du}{\phi^{-1}(g(u))} \ \le\ \tau_n\phi^{-1}\Big(\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_0^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big). \tag{3.14$'$}$$

情形 3 若 $\tau=\tau_n$，$u'(\tau_n-0)\ge 0$，$u'(\tau_n+0)\le 0$，将 (3.12) 从 $t\,(t<\tau_n)$ 到 τ_n 积分，得

$$\begin{aligned}\phi(u'(t)) \le&\phi(u'(\tau_n-0))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_t^{\tau_n} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x\\ &\le\phi(u'(\tau_n+0))+I(u(\tau))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_t^{\tau_n} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x\\ &\le I(u(\tau))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_t^{\tau_n} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是

$$u'(t)\le\phi^{-1}\Big[I(u(\tau_n))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_t^{\tau_n} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x\Big],$$

将上式从 0 到 τ_n 积分，得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))}\le&\int_0^{\tau_n}\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_t^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\ &\le\tau_n\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_0^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big],\end{aligned}$$

从而

$$\int_{\varepsilon}^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))}\le\tau_n\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_0^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big]. \tag{3.13$''$}$$

类似地，我们可将 (3.12) 从 τ_n 到 $t\ (t>\tau_n)$ 积分，得

$$\begin{aligned}-\phi(u'(t))\le&-\phi(u'(\tau+0))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,\\ &\le-\phi(u'(\tau-0))+I(u(\tau))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,\\ &\le I(u(\tau))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是

$$-u'(t)\le\phi^{-1}\Big[I(u(\tau_n))+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)g(u(x))\,\mathrm{d}x\Big],$$

将上式从 τ_n 到 1 积分，得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))}\le&\int_{\tau_n}^{1}\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{t} q(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\ &\le(1-\tau_n)\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}+\Big\{1+\frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{1} q(x)\,\mathrm{d}x\Big],\end{aligned}$$

从而

$$\int_{\epsilon}^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} \le (1-\tau_n)\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + \Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\int_{\tau_n}^{1} q(x)\,\mathrm{d}x\Big]. \qquad (3.14)''$$

由式子 (2.13), (2.14), (2.13)′, (2.14)′ 和 (2.13)″, (2.14)″ 可知

$$\int_{\varepsilon}^{u(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} \le \frac{1}{2}\phi^{-1}\Big[\frac{I(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))} + b_0\Big\{1 + \frac{h(u(\tau_n))}{g(u(\tau_n))}\Big\}\Big].$$

由此及 (3.9) 知 $|u|_0 \ne r$. 则根据定理 2.2, $(3.10)^n$ 有解 u_n, 且 $|u_n|_0 \le r$. 事实上 (如前类似可证),

$$\frac{1}{n} \le u_n(t) < r \qquad \text{对于 } t \in J.$$

下面我们将给出关于 u_n 的更为确切的下界，即

$$u_n(t) \ge kt(1-t) \qquad \text{对 } t \in J. \qquad (3.15)$$

为证 (3.15) 式，首先注意到 (3.6) 保证了函数 $\psi_r(t)$ 的存在性，并有 $\psi_r(t)$ 在 J 连续而在 J' 为正，且当 $(t,u_n) \in J' \times (0,r]$ 时，有 $f(t,u_n) \ge \psi_r(t)$. 现在我们考虑方程

$$\begin{cases} \big(\phi(w'(t))\big)' + q(t)\psi_r(t) = 0, \qquad t \in J^0, \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases} \qquad (3.16)$$

设 $w(t)$ 是 (3.16) 的解，显然有 $w(t) > 0,\ t \in (0,1)$. 我们将证明 $u_n(t) \ge w(t)$. 事实上，令 $z(t) = u_n(t) - w(t)$, 则 $z(0) = u_n(0) - w(0) = \frac{1}{n}$, $z(1) = u_n(1) - w(1) = \frac{1}{n}$. 若 $z(t) \ge 0$ 不成立，则必有区间 $[a,b] \subset (0,1)$ 使得

$$z(a) = z(b) = 0, \quad \text{且 } z(t) < 0, \quad t \in (a,b).$$

易知存在点 $t_0 \in (a,b)$ 使得 $z(t_0) = \min\limits_{t \in (a,b)} z(t) < 0$. 若 $\tau \ne t_0$, 有 $z'(t_0) = 0$. 不失一般性，不妨设 $\tau > t_0$. 由于

$$-\big(\phi(u_n'(t))\big)' \ge -\big(\phi(w'(t))\big)', \qquad t \in (a,b). \qquad (3.17)$$

将上式两端从 $t,\ a < t \le t_0$ 到 t_0 积分，得

$$-\phi(u_n'(t_0)) + \phi(u_n'(t)) \ge -\phi(w'(t_0)) + \phi(w'(t)),$$

即

$$\phi(u_n'(t)) \ge \phi(w'(t)).$$

因此，$z'(t) \ge 0, t \in (a,t_0]$, 从而 $z(t_0) \ge z(a) = 0$ 与已知矛盾. 若 $\tau = t_0$, 有 $z'(\tau - 0) \le 0$, $z'(\tau + 0) \ge 0$. 将 (3.17) 从 $t,\ a < t < t_0$ 到 t_0 积分，得

$$-\phi(u_n'(\tau - 0)) + \phi(u_n'(t)) \ge -\phi(w'(\tau)) + \phi(w'(t)),$$

即

$$\phi(u_n'(t)) - \phi(w'(t)) \geq I(u_n(\tau)) + \left[\phi(u_n'(\tau+0)) - \phi(w'(\tau))\right] \geq 0.$$

因此， $z'(t) \geq 0,\ t \in (a, \tau)$, 从而 $z(\tau) \geq z(a) = 0$ 与已知矛盾.

因此 $u_n(t) \geq w(t) \geq t(1-t)|w|_0$, 取 $k = |w|_0$, 则 (3.15) 成立.

下面我们将证明

$$\{u_n\}_{n\in N_0} \quad \text{是}\ J\ \text{上有界等度连续族.} \tag{3.18}$$

返回式子 (3.12) (将 u 用 u_n 代替), 有

$$-(\phi(u_n'(t)))' \leq g(u_n(t)) \left\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\right\} q(t) \quad \text{对于}\ \ t \in J^0. \tag{3.19}$$

由于在 J^0 上 $(\phi(u_n'(t)))' \leq 0$, 并在 J 上 $u_n \geq \frac{1}{n}$, 类似于 $(3.11)_\lambda^n - (3.12)$ 的讨论可知, 存在 $\tau_n \in J'$ 使得在 $(0, \tau_n)$ 上 $u_n' \geq 0$ 而在 $(\tau_n, 1)$ 上 $u_n' \leq 0$, 将 (3.19) 从 $t\ (t < \tau_n)$ 到 τ_n 积分，得

$$\frac{\phi(u_n'(t+0))}{g(u_n(t))} \leq \frac{I(r)}{g(r)} + \left\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\right\} \int_t^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

另一方面，将 (3.19) 从 τ_n 到 $t\ (t > \tau_n)$ 积分，得

$$\frac{-\phi(u_n'(t-0))}{g(u_n(t))} \leq \frac{I(r)}{g(r)} + \left\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\right\} \int_{\tau_n}^{t} q(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

现在我们可以断言存在 a_0 和 a_1, $a_0 > 0$, $a_1 < 1$ 且 $a_0 < a_1$, 使

$$a_0 < \inf\{\tau_n : n \in N_0\} \leq \sup\left\{\tau_n : n \in N_0\right\} < a_1. \tag{3.22}$$

说明 3.1 这里 τ_n (如前) 是 $(0,1)$ 内唯一一点，使得 $u_n(\tau_n) = \max\limits_{t\in[0,1]}\{u_n(t)\}$.

现在我们来证明 $\inf\{\tau_n : n \in N_0\} > 0$. 若此不真，则存在 N_0 的子集 S, 使得在 S 中，当 $n \to \infty$ 时有 $\tau_n \to 0$. 将 (3.20) 从 0 到 τ_n 积分，得

$$\int_0^{u_n(\tau_n)} \frac{\mathrm{d}y}{\phi^{-1}(g(y))} \leq \tau_n \phi^{-1}\Big[\frac{I(r)}{g(r)} + \left\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\right\} \int_0^{\tau_n} q(x)\,\mathrm{d}x\Big] + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}y}{\phi^{-1}(g(y))}. \tag{3.23}$$

这里 $n \in S$. 由于在 S 中，当 $n \to \infty$ 时有 $\tau_n \to 0$, 则由 (3.23) 可知在 S 中，当 $n \to \infty$ 时有 $u_n(\tau_n) \to 0$. 而由 u_n 在 τ_n 处取得最大值，可知当 $n \to \infty$ 时， $u_n \to 0$. 这与 (3.15) 矛盾. 因此 $\inf\{\tau_n : n \in N_0\} > 0$. 类似讨论可得 $\sup\{\tau_n : n \in N_0\} < 1$.

选定 (3.22) 中的 a_0 和 a_1, 则 (3.20), (3.21) 和 (3.22) 保证了

$$\frac{|\phi(u_n'(t))|}{g(u_n(t))} \leq \frac{I(r)}{g(r)} + \left\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\right\} v(t) \quad \text{对于}\ \ t \in J', \tag{3.24}$$

其中

$$v(t) = \int_{\min\{t, a_0\}}^{\max\{t, a_1\}} q(x)\,\mathrm{d}x.$$

易知 $v\in L^1[J]$. 令 $B:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 定义为

$$B(z)=\int_0^z \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))}.$$

注意到 B 是 $[0,\infty)$ 到 $[0,\infty)$ 的增映射 (这是由于 $g>0$ 在 $(0,\infty)$ 非增, $B(\infty)=\infty$), 且 B 在 $[0,a]$ 上对任意 $a>0$ 连续. 于是

$$\{B(u_n)\}_{n\in N_0} \quad \text{是 } J \text{ 上有界等度连续族.} \tag{3.25}$$

等度连续性的证明如下 (这里 $t,s\in J$)

$$\begin{aligned}|B(u_n(t))-B(u_n(s))| =&\Big|\int_s^t \frac{d(u_n(x))}{\phi^{-1}(g(u_n(x)))}\Big|\\ &\le\frac{1}{2}|t-s|\phi^{-1}\Big[\frac{I(r)}{g(r)}+\Big\{1+\frac{h(r)}{g(r)}\Big\}\Big|\int_s^t v(x)\,\mathrm{d}x\Big|\Big].\end{aligned}$$

此不等式说明, 在 $[0,B(r)]$ 上 B^{-1} 一致连续且

$$|u_n(t)-u_n(s)|=|B^{-1}(B(u_n(t)))-B^{-1}(B(u_n(s)))|$$

于是得到了 (3.18).

Arzela-Ascoli 定理保证了存在 N_0 中的子序列 N 和函数 $u\in PC[J,R]\cap C^2[J^0,R]$, 使得在 J 上当 $n\to\infty$ 时, u_n 一致收敛于 u, 且 $u(0)=u(1)=0$, $|u|_0\le r$, $u(t)\ge 0$ 对 $t\in J$ 成立. 取定 $t\in(0,\tau)$, 则 u_n $(n\in N)$ 满足积分方程

$$u_n(t)=u_n\Big(\frac{\tau}{2}\Big)+\int_{\frac{\tau}{2}}^t\phi^{-1}\Big[\phi\Big(u_n'\Big(\frac{\tau}{2}\Big)\Big)-\int_{\frac{\tau}{2}}^r q(s)\,f(s,u_n(s))\,\mathrm{d}s\Big]\,\mathrm{d}r,\qquad t\in(0,\tau),$$

对于 $t\in(0,\tau)$. 因为对 $s\in J'$ 有 $0\le u_n(s)\le r$, 所以 $\{u_n'(\frac{\tau}{2})\}$, $n\in N$, 是有界序列. 于是 $\{u_n'(\frac{\tau}{2})\}_{n\in N}$ 有一个收敛子列, 因此 $\{u_n(t)\}_{n\in N}$ 在 $(0,\tau)$ 是相对紧的. 为方便起见设 $\{u_n'(\frac{\tau}{2})\}_{n\in N}$ 为此收敛子列并且令 $r_0\in R$ 是它的极限. 在 N 上令 $n\to\infty$ (这里 f 在紧集 $\big[\min(\frac{\tau}{2},t),\max(\frac{\tau}{2},t)\big]\times(0,r]$ 上一致连续), 于是得到

$$u(t)=u\Big(\frac{\tau}{2}\Big)+\int_{\frac{\tau}{2}}^t\phi^{-1}\Big(\phi(r_0)-\int_{\frac{\tau}{2}}^r q(s)\,f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}r,\qquad t\in(0,\tau).$$

我们可以对每个 $t\in(0,\tau)$ 做这种讨论, 得到 $(\phi(u'))'+q(t)\,f(t,u)=0$ 对 $t\in(0,\tau)$ 成立.

同理, 在 $(\tau,1)$ 上我们可以得到相同的结论.

最后, 显而易见 $|u|_0<r$ (否则, 如果 $|u|_0=r$, 则由 (3.12)–(3.14) 类似讨论可以得到矛盾).

例 3.1 考虑边值问题：

$$\begin{cases} (\phi(u'))' + \sigma\,(u^{-\alpha} + u^{\beta} + 1) = 0, \qquad t \in J^0, \\ -\Delta\phi(u')|_{t=\tau} = \sigma u^{\beta}(\tau), \\ u(0) = u(1) = 0, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > p-1. \end{cases} \tag{3.26}$$

设 $0 < \sigma < \frac{2}{5}\big(\frac{2(p-1)}{p-1+\alpha}\big)^{p-1}$, 则 (3.26) 有解 $u \in PC[J,R] \cap C^2[J^0,R]$, 且在 J' 上 $u > 0$, $|u|_0 < 1$.

为证此，我们可以应用定理 3.1. 令 $q(s) = \sigma$, $g(u) = u^{-\alpha}$, $h(u) = u^{\beta} + 1$. 显然 (3.3)–(3.6) 成立. 并且有

$$b_0 = \max\Big\{\int_0^{\frac{1}{2}} q(t)\,\mathrm{d}t\,, \int_{\frac{1}{2}}^1 q(t)\,\mathrm{d}t\Big\} = \frac{1}{2}\sigma.$$

取 $r = 1$, 由于

$$\int_0^r \frac{\mathrm{d}u}{\phi^{-1}(g(u))} = \int_0^1 u^{\frac{\alpha}{(p-1)}}\,\mathrm{d}u = \frac{p-1}{p-1+\alpha},$$
$$\frac{1}{2}\phi^{-1}\Big(\frac{I(r)}{g(r)} + b_0\Big\{1 + \frac{h(r)}{g(r)}\Big\}\Big) = \frac{1}{2}\phi^{-1}(\sigma + 3b_0) = \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{2}\sigma\Big)^{\frac{1}{p-1}},$$

则有

$$\frac{p-1}{p-1+\alpha} > \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{2}\sigma\Big)^{\frac{1}{p-1}}.$$

因此可知 (3.7) 成立，根据定理 3.1. 可知结论成立.

参　考　文　献

[1] Zu Li, Lin Xiaoning, Jiang Daqing. Existence Theory for Single and Multiple Solutions to Singular Boundary Value Problems for Second Order Impulsive Differential Equations. *J. Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 2007, 30: 171–191

[2] Alberto Cabada, Jan Tomecek. Extremal Solution for Nonlinear Functional ϕ-Laplacian Impulsive Equations. *J. Nonlinear Analysis*, 2007, 62: 827–841

[3] Hristova S G, Bainov D D. Monotone-iterative Techniques of V. Lakshmikantham for a Boundary value Problem for Systems of Impulsive Differential-difference Equations. *J. J. Math. Anal. Appl.*, 1996, 1997: 1–13

[4] Wei Z. Periodic Boundary Value Problems for Second Order Impulsive Integrodifferential Equations of Mixed Type in Banach Spaces. *J. J. Math. Anal. Appl.*, 1995, 195: 214–229

[5] Lakshmik ntham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: J. World Scientific, 1989

[6] Agarwal R P, O'Regan D. Multiple Nonnegative Solutions for Second Order Impulsive Differential Equations. *J. Appl. Math. Comput.*, 2000, 114: 51–59

[7] Lee E K, Lee Y H. Multiple Positive Solutions of Singular Two Point Boundary Value Problems for Second Order Impulsive Differential Equation. *J. Appl. Math. Comput.*, 2004, 158: 745–759

[8] Wang Junyu, Gao Wenjie, Lin Zhenghua. Boundary Value Problems for General Second Order Equation and Similarity Solutions to the Rayleigh Promblem. *J. Tohoku Math. J.*, 1995, 47: 327–344

[9] Jiang Daqing, Xu Xiaojie. Multiple Positive Solutions to a Class of Singular Boundary Value Problems for the One-dimensional p-laplacian. *J. Computers and Mathematics with Applications*, 2004, 47: 667–681

[10] 郭大钧等．非线性常微分方程泛函方法．济南：山东科学技术出版社， 2005
(Guo D J, et al. The Order Methods in Nonlinear Analysis. Jinan: Shandong Technical and Science Press, 2005)

Singular Boundary Value Problems for the Impulsive One-dimensional p-Laplacian

WEI Jun

(*Teaching Center of Basic Courses, Jilin University, Changchun* 130062)

(*E-mail: weij@jlu.edu.cn*)

JIANG Daqing

(*School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun* 130024)

ZU Li

(*3College of Science, Changchun University, Changchun* 130022)

Abstract In this paper we present some new existence results for singular boundary value problems for the impulsive one-dimensional p-Laplacian. Our nonlinearity may be singular in its dependent variable.

Key words Singular boundary value problem; impulsive differential equation; nonlinear alternative of Leray-Schauder; existence

MR(2000) Subject Classification 62G05; 62N015

Chinese Library Classification O212.7