

裂纹扩展的无网格数值模拟方法

姜路亮¹, 曾攀¹, 聂蕾²

(1. 清华大学 机械工程系, 北京 100084; 2. 西北工业大学 材料科学与工程学院 西安 710072)

摘要: 疲劳断裂是航空材料的重要失效形式, 由于裂纹尖端应力存在奇异性, 传统有限元方法模拟裂纹沿任意路径扩展存在很多不足。作为一种新兴的数值模拟方法, 无网格计算只需将求解问题离散为独立的节点, 计算过程中可以实时跟踪裂纹尖端区域进行局布细化。将连续的裂纹扩展过程看作多个线性增量, 每一个增量内裂纹扩展角根据应力强度因子确定, 通过在裂纹尖端细化节点和引入外部基函数提高了计算精度。本文给出了应用无网格方法模拟裂纹扩展过程的关键技术和计算流程, 通过对带有中心斜裂纹的 Ti-6Al-4V 合金平板进行分析, 预测得到的裂纹扩展路径与实验值吻合的较好。

关键词: 裂纹扩展; 无网格计算; Ti-6Al-4V 合金

中图分类号: TG111.8, TB115 文献标识码: A

文章编号: 1005-5053(2001)03-0051-06

疲劳断裂是航空材料的重要失效形式, 应用线弹性断裂力学理论时, 由于裂纹尖端存在应力集中, 精确计算裂纹尖端的应力强度因子、能量释放率或者 J 积分成为计算裂纹扩展的关键。传统的有限元方法根据裂纹尖端附近的应力、应变及位移场确定, 为了得到精确的解, 在裂纹尖端区域需要十分精细的网格, 并且裂纹发生扩展, 相应的网格就需要重新划分, 这样使得计算精度和求解效率大大降低。后来相继推出了叠加法、奇异元法和刚度导数等方法, 但这些方法只适用于分析驻立裂纹, 还没有设计出分析裂纹扩展的有效方法^[1-4]。

近年来, 人们提出了无网格计算方法。该方法将整个求解域离散为独立的节点, 而无须将节点连成单元, 这样可以完全抛开网格生成和重划, 位移场的近似采用了基于节点的函数拟合(常规有限元采用单元内节点插值), 可以保证基本场变量在整个求解域内连续。因为脱离了单元约束, 所以在处理裂纹扩展这类具有动态不连续边界时具有很高的精度和效率。因此, 采用无网格方法模拟裂纹扩展具有很好的应用前景。本文在简要介绍无网格方法的基础上给出了模拟裂纹扩展的关键因素以及提高计算精度的方法。

1 无网格计算的基本原理

收稿日期: 2001-07-19; 修订日期: 2001-08-08

基金项目: 国家杰出青年科学基金(59825117)

作者简介: 姜路亮(1975-), 男, 博士研究生。

根据基本场变量的逼近方式和控制方程的离散方式, 可以将无网格计算划分为几种不同的方法, 现在比较成熟而且应用最广的方法是无网格 Galerkin 法(EFGM)。下面以区域 Ω 中定义的函数 $u(x)$ 为例来介绍无网格计算的基本原理。

考虑二维域 Ω 内求解问题, 其基本方程为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + b &= 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1-a) \\ u &= \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (1-b) \\ \sigma \cdot n &= \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (1-c) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\partial\Omega = \Gamma_u + \Gamma_t$, $u = [u_x u_y]^T$ 为位移向量, $b = [b_x b_y]^T$ 为体积力向量, σ 为应力张量, n 为域边界 Γ_t 的外法向, \bar{u}, \bar{t} 分别为边界位移和边界力。

与微分方程(1-a)对应的积分方程的弱形式为:

$$\Pi(u) = \int_{\Omega} \nabla_s u : \sigma(u) d\Omega - \int_{\Omega} u \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_t} u \cdot \bar{t} d\Omega = 0 \quad (2)$$

变分形式为:

$$\delta \Pi(u) = \int_{\Omega} \nabla_s \delta u : \sigma(u) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot \bar{t} d\Omega = 0 \quad (3)$$

其中 δ 为变分算子, ∇_s 是对称梯度算子。

对于位移型无网格方法, 未知量为广义节点位移 $\tilde{u}(x_i)$ (在下文中简称为 $\tilde{u}_i, i = 1, 2, \dots, N$), 得到广义节点位移之后, 通过移动最小二乘法拟合得到求解域内任意点的位移值, 进而求得应力、应变场的分布, 这是无网格方法的关键。

和有限元类似, 求解域内任意一点的位移值 $u(x)$ 可以表示为:

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) \cdot \tilde{w}_i \quad (4)$$

其中 $\Phi(x)$ 称为变形函数。

应用移动最小二乘法, 求解域内任意一点位移可以表示为:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \\ &= P^T(x) \cdot a(x) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $p^T(x)$ 是完备多项式基, m 是基底中函数的个数, $a(x)$ 是相应的系数。可以看出移动最小二乘法中多项式的系数 $a(x)$ 随空间坐标变化。

对于二维求解域来说, 常用的基函数有线性基和平方基:

$$\begin{aligned} p^T(x) &= [1, x, y] \quad m=3 \text{ (线性基)} \\ p^T(x) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad m=6 \text{ (平方基)} \end{aligned}$$

系数 $a(x)$ 根据加权最小二乘来确定, 它使得函数的加权局部近似误差的二次范数最小。

$$E = \sum_{i=1}^N w(x - x_i) \cdot [u(x, x_i) - \tilde{u}_i]^2 \quad (6)$$

其中 $w(x - x_i)$ 是具有紧支域的权函数。

将公式(6)写成矩阵形式有:

$$E = (Pa - \tilde{u})^T W(x) (Pa - \tilde{u}) \quad (7)$$

其中 $\tilde{u} = [\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \dots \tilde{u}_N]^T$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1(x_N) & p_2(x_N) & \dots & p_m(x_N) \end{bmatrix}$$

$$W(x) =$$

$$\begin{bmatrix} w(x - x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(x - x_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w(x - x_N) \end{bmatrix}$$

由于 E 取极小, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= A(x) a(x) - B(x) \tilde{u} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

这里 $A = P^T W(x) P$, $B = P^T W(x)$, 所以

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) \tilde{u} \quad (9)$$

根据(4)式可得基于移动最小二乘法的形函数的表达式为

$$\Phi(x) = p^T(x) A^{-1}(x) B(x) \quad (10)$$

求得形函数后, 经过相应的求导、积分运算便可得

到几何矩阵、刚度矩阵, 求得总体方程, 其推导过程与有限元相似。

应用 Galerkin 法将控制方程(2)转变成能量泛函积分求极值, 需要涉及到在整个求解域对能量进行积分。对于传统有限元, 该积分是在单元内进行的, 由于无网格方法不存在单元, 所以在积分时要人为地将求解域分割成多个规则子区域, 称为积分子域(integral subdomain)。对于结构分析, 由于变形很小, 可以考虑利用离散的节点构造积分子域。需要指出的是: 积分子域不同于有限元中的单元, 在有限元中, 单元与节点之间必须保持严格的协调关系, 而无网格方法中构造积分子域是很随意的, 只要能够覆盖整个求解域即可, 其作用只是用作积分, 子域边界的交点不必和节点重合。

2 几个关键问题的处理

实际情况下, 裂纹扩展是一个动态连续过程, 为了能够模拟真实情况, 必须将连续问题离散为多个增量形式, 在每一个增量内将裂纹扩展考虑为稳态过程, 不考虑裂纹尖端应力场的变化, 并认为裂纹沿直线传播。数值算例表明, 只要每一个增量取得合适的话, 可以准确模拟裂纹扩展。

2.1 裂纹扩展准则

为了模拟裂纹的扩展, 必须计算出在不同时刻裂纹尖端的扩展角度, 通常计算扩展角的方法有: 最大周向应力, 最大能量释放率准则, 应变能密度因子准则等。本文采用最大周向应力法确定开裂角, 认为裂尖沿着最大周向应力的法向扩展, 计算公式为

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (11)$$

其中 K_I, K_{II} 分别为 I、II 型裂纹的应力强度因子, θ 为裂纹扩展方向角, 如图 1 所示。

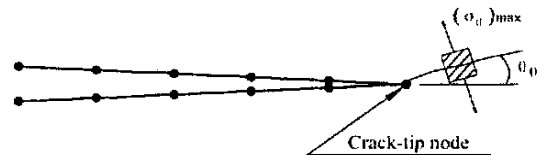


图 1 裂纹扩展方向角的确定

Fig. 1 Determination of the crack-growth direction

因此, 确定了应力强度因子即可求出裂纹扩展的方向角, 其中 K_I, K_{II} 可根据位移分解法确

定。
在完成一次增量扩展之后,原有的裂纹尖端节点在垂直于裂纹扩展方向一分为二,新的裂纹尖端节点距原来的节点为 da ,其变化示意图见图 2,因此每完成一次增量扩展,必须对裂纹几何形状及其附近节点分布进行更新。

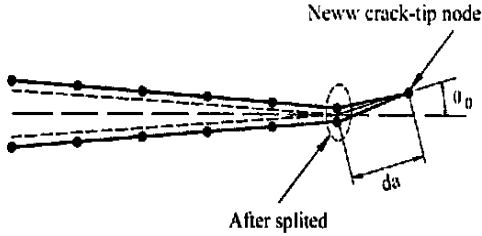


图 2 完成一个增量扩展后裂纹构形的变化
Fig. 2 Change of the crack configuration after an increment

2.2 不连续性的处理

在本文的分析中,将裂纹考虑为不受力的自由边界,因此裂纹的两侧位移场是不连续的,如何处理这种不连续是无网格计算的一个关键问题。在有限元中,处理这类不连续问题的方法很简单,直接在不连续处设置为单元边界,这样位移函数的插值、能量泛函的积分都限制在单元内,而无网格方法则不同,其形函数的构造是基于求解域内节点值的拟合,在遇到不连续问题时,应当控制节点的影响域不能跨越不连续边界。在处理这类问题时,可以将每点的影响域看作从该点发射出的无数条光线,当这些光线遇到不连续边界时便会自动截断^[5]。从图形学的观点,在研究不连续边界附近节点的影响域时,需要判断从该点出发的射线是否与不连续边界相交,如果相交,把不连续边界外部的影响域去掉。根据这一思路,图 3 阴影部分为 i, j 点的影响域。

2.3 扩展基函数的引入

基于移动最小二乘法的无网格计算,只需要线性基函数便可得到 C^1 位移场,为了提高计算精度,可以考虑增加基底函数的阶次。经证明:任何包含于基函数中的函数均可准确的再生^[5]。通常把通过升高基底函数的阶次得到的函数称为内部基函数(intrinsic basis),另外,还可以引入其它函数,称之为外部基函数(extrinsic basis)。例如在分析奇异性问题时,可以将奇异函数作为一个基函数,文献[6]在分析裂纹尖端的应力强度因子时,就引入了奇异函数作为基函数。为了引入合适

的函数,首先分析 I、II 型裂纹的位移场。

对于 I 型裂纹,裂纹尖端的位移场为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K}{2G} \frac{r}{2\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ v &= \frac{K}{2G} \frac{r}{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

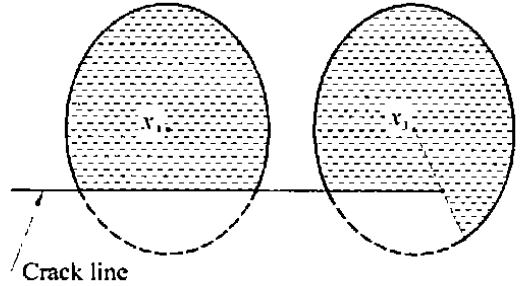


图 3 无网格计算中不连续性的处理
Fig. 3 Treatment of discontinuity in meshless method

对于 II 型裂纹,裂纹尖端的位移场为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K}{2G} \frac{r}{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ v &= \frac{K}{2G} \frac{r}{2\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中 G 为剪切模量; r 和 θ 代表以裂纹尖端为原点的极坐标; κ 为 Kolosov 常数

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 - 4\mu \text{ 平面应变} \\ \kappa &= \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \text{ 平面应力} \end{aligned}$$

式(12)、(13)可以看作是包含 $\frac{r}{2\pi}, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\theta$ 的函数,因此可以采用如下基函数 p^T

$$p^T = \left[1, x, y, \frac{r}{2\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{r}{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{r}{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta, \frac{r}{2\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta \right]$$

(enriched basis)

为了比较不同基函数对提高计算精度的影响,下面对裂纹尖端的应力场进行分析,以具有边界裂纹的均匀受拉方板作为分析对象,其几何模型参见图 4(a),考虑到对称性,只对其上半部分进行离散分析,节点分布如图 4(b)所示,图中虚线代表积分分子域的边界线。

根据解析理论:在裂纹尖端的延长线上某一点的 y 方向的应力可以表述为:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{2\sqrt{r}} \quad (14)$$

其中 r 是此点距裂纹尖端的距离, K_I 是应力强度因子,其表达式为:

$$K = \alpha \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \quad (15)$$

其中 σ 是板两端的均匀拉应力, 取为单位应力。对于图 4(a) 模型, $a = 10\text{mm}$, $b = 50\text{mm}$, 查阅文献 [7] 可知: $\alpha = 2.84$ 。分别采用线性基函数 (linear basis)、二次基函数 (quadratic basis) 及带有扩展函数的增强基函数 (enriched basis) 进行计算, 将计算结果与解析解进行比较, 如图 5。

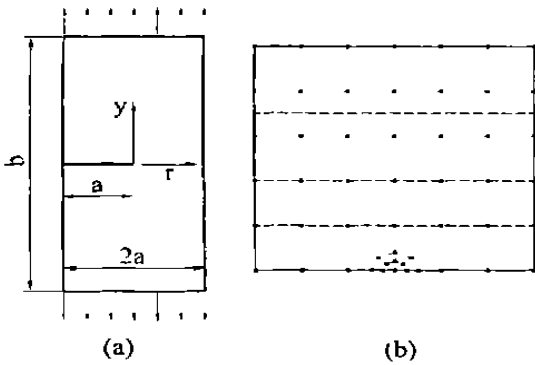


图4 无网格方法计算裂纹尖端应力场

Fig. 4 Computation of stress field near the crack tip by meshless method (a) geometric model; (b) meshless discrete model (the upper half)

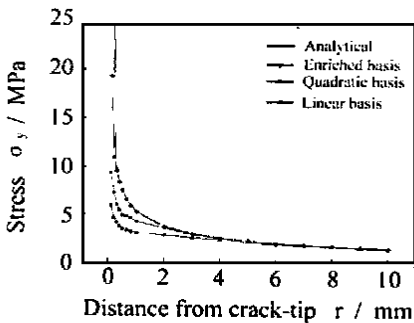


图5 使用不同基函数得到的计算结果

Fig. 5 Comparison of results from different basis with analytical data

通过图 5 可以看出, 使用扩展基函数后可以大大提高裂纹尖端应力场的计算精度, 因此, 有利

于精确模拟裂纹扩展。在裂纹尖端区域需要加密结点, 对于新增节点位置, 虽然没有单元约束可以任意设置, 但合理的布点会利用有限的节点描述更多的信息, 根据裂纹尖端位移场的分布情况, 本文采用圆周型加密方案, 即新增加的节点规则地分布在一系列以裂纹尖端为圆心的同心圆上。

3 数值算例

根据上文的介绍, 应用无网格方法模拟裂纹扩展的计算流程为:

step 1 对求解域进行离散, 在裂纹尖端区域进行局部加密节点;

step 2 根据当前节点分布求出位移场, 应力、应变场;

step 3 计算裂纹尖端的应力强度因子 (SIFs);

step 4 计算裂纹扩展的方向角 θ , 假定裂纹扩展的长度为 da

step 5 更新裂纹的几何形状及其附近节点分布;

step 6 判断裂纹扩展是否结束, 如果没有结束, 重复 step2-step5。

Ti-6Al-4V 合金在航空工业中具有重要地位, 本文研究复合型裂纹在循环载荷作用下裂纹扩展过程。试样的几何形状如图 6 所示, 材料的物理特性为: 弹性模量 $E = 1.1 \times 10^8 \text{MPa}$, 泊松比 $\mu = 0.29$, 所受循环载荷的应力比为 0.1, 取两个不同的试样, 它们的裂纹长度、裂纹倾斜角及所受应力见表 1。

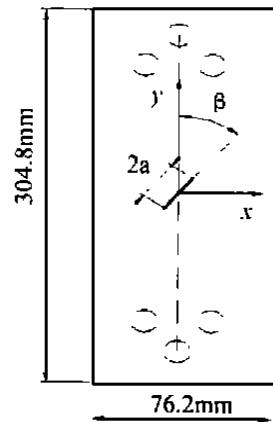


图6 试样的几何形状

Fig. 6 Geometric configuration of specimen

由于裂纹尖端需要精细计算, 所以在离散时

对该区域进行局部加密, 节点离散图见图 7。在计算过程中, 每次裂纹长度增量 da 取为裂纹长度的 3%。

表 1 两个试样的裂纹长度、裂纹倾斜角及极限应力

Table 1 Crack length, crack direction, and extreme stress of two specimens

Specimens	$\sigma_{min} / \text{MPa}$	$\sigma_{max} / \text{MPa}$	β	$2a / \text{mm}$
1	20.7	207	30°	14.2
2	17.2	172	43°	13.5

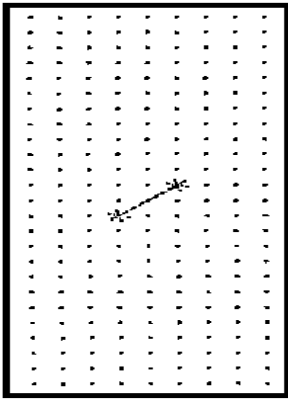


图 7 无网格计算模型(采用局部节点加密)

Fig.7 Computational model for meshless method

文献[8]在液压伺服试验机上对试样进行实验, 通过实验可以测得裂纹扩展的连续的轨迹线; 采用无网格方法计算时以裂纹中心为原点建立坐

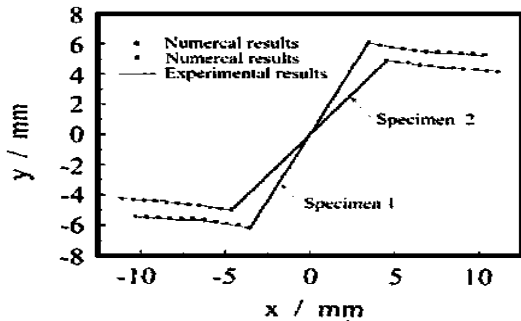


图 8 数值模拟结果与实测值的比较

Fig. 8 Comparison of numerical results with experimental ones

标系, 见图 6, 通过多次增量扩展, 可以得到每一个增量步时刻裂纹尖端的位置, 见图 8 中所示的离散的数据点, 将数值模拟结果与实测值进行比较, 如图 8 所示(由于本文只限于对裂纹扩展的稳

态过程进行分析, 所以只对裂纹扩展初期进行了比较)。通过比较可以看出: 模拟结果与实验结果基本吻合。

4 结论

本文介绍了如何利用无网格方法根据线弹性理论模拟循环载荷下的裂纹扩展过程, 通过以上分析可以看出: 无网格方法在模拟裂纹扩展时不需要网格划分和重画, 可以跟随裂纹尖端实时加密结点; 通过在裂纹尖端区域进行局部细化及引入带有奇异性的扩展基函数, 可以得到精确的应力场; 将连续的裂纹扩展离散为分段的线性增量, 在每一个增量步内应力应变场及扩展角均保持不变可以大大简化分析过程。通过对带有中心斜裂纹的 Ti-6Al-4V 合金平板进行分析, 数值模拟结果与实验值吻合的较好, 证明了该方法的可行性。

参考文献

- [1] KARDESTUNCER H. 有限元法手册[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 769—778.
- [2] RAO A K. RAJU I S. KRISHNA A M. A powerful hybrid method in finite element analysis[J]. Int J Num Meth Eng, 1971, 3: 389—403.
- [3] THESKEN J C. GUDMUNDSON P. Application of a moving variable order singular element to dynamic fracture mechanics[J]. Int J Fracture, 1991, 52: 47—65.
- [4] LEE K Y. LEE J D. LIEBOWITZ H. Finite element analysis of the slow crack growth process in mixed mode fracture[J]. Engng Fracture Mech, 1997, 56 (4): 551—577.
- [5] BELYTSCHKO T, ORGAN D, GERLACH C. Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engng, 2000, 187: 385—399.
- [6] FLEMING M. CHU YA. MORAN B. et al. Enriched element-free Galerkin methods for crack-tip field[J]. Int J Numer Meth Engng, 1997, 40: 1483—1504.
- [7] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [8] PUSTEJOVSKY MA. Fatigue crack propagation in titanium under general in-plane loading. Part I: experiments[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1979, 11: 9—15.

Meshless method for numerical simulation of crack propagation

LOU Lu-liang¹, ZENG Pan¹, NIE Lei²

(1. Department of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing, China 100084; 2. College of Materials Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi an, China 710072)

Abstract: Crack propagation is an important failure mechanism in aeronautical materials that requires accurate numerical model to capture stress singularity at the crack tip. As a promising numerical simulation method, meshless computation has some outstanding advantages over the traditional finite element method (FEM) in treatment of arbitrary evolving discontinuity. Because of the independence of elements, the adaptive refinement can be easily achieved, which makes the crack propagation analysis dramatically simplified. By introducing enriched basis and nodal refinement, the computational accuracy was improved. The continuous crack propagation was modelled as a series of linear crack-growth increment. At each increment the crack-growth direction was determined based on the stress intensity factors. The key technique and the flow chart of the method were presented. The paper concludes with a sample calculation of oblique center-crack plate of Ti-6Al-4V alloy under uniaxial tensile load. The predicted crack trajectory by meshless method is in good agreement with the experimental data.

Key words: meshless method; crack propagation; Ti-6Al-4V alloy