3.2 程序运行

编制并调用程序，根据提示输入题目所要求的参数，也可以自行确定研究数据．输入完毕后，程序开始仿真演示．

图 7 所示正在绘制 D 点运动轨迹，坐标轴的单位为 m．

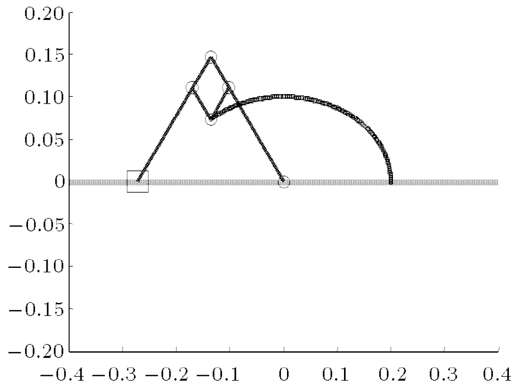


图 7 正在动画模拟

从图 8 可以明显地看出 D 点的轨迹是一个椭圆迹线．运用力学的原理，推导了各点的运动方程，但其表示的运动轨迹并不直观．结合 MATLAB 使得这一过程非常形象，加深了我们对于力学的理解．

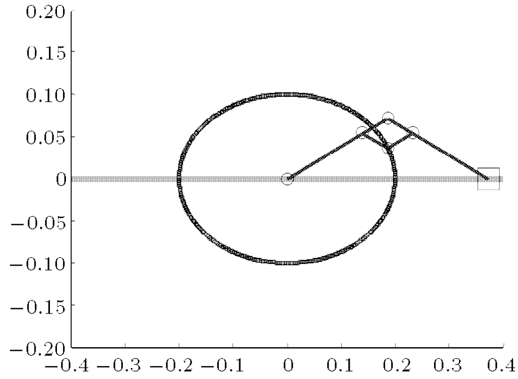


图 8 模拟完成

4 结 论

本文从教学中发现问题，将力学分析作为依据和主导，用 MATLAB 仿真处理了摆线问题，点的合成运动一个实例和椭圆尺规机构．本文所有程序均可作为教学演示，使抽象的力学生动活泼起来．

参 考 文 献

1 哈尔滨工业大学理论力学教研室．理论力学 (第 6 版)．北京：高等教育出版社，2002

2 王沫然． MATLAB 与科学计算 (第 2 版)．北京：电子工业出版社，2003

(责任编辑：刘俊丽)

两个自由度的单质点体系自振频率及振型计算

刘书智 1)

(内蒙古科技大学建筑与土木工程学院，包头 014010)

摘要 对于具有两个自由度的单质点体系自由振动，先假定一个振动方向，求出该振动方向的柔度系数，对柔度系数求极值，满足柔度极大值的方向即是第 1 振型方向，由振型正交性原理可确定第 2 振型．由此将两个自由度体系的计算变成了单自由度体系的计算，根据求出的柔度系数，可方便地求出自振频率．

关键词 自振频率，振型，柔度系数，自由度

中图分类号： TU 311.3 **文献标识码：** A

文章编号： 1000-0879(2010)03-120-02

1 问题的提出

具有两个自由度体系的单质点自由振动计算是多质点体系自由振动的一种特殊情况，教科书里一般把它当作两个自由度体系按一般方法计算其自振频率及振型．具有两个自由度的单质点体系，质点运动过程中任一时刻的位置需要两个独立几何参数来确定具有两个自振频率以及相应振型．学生在学习该内容时，有时误认为两个振型分别是水平振动和竖向振动. 实际上对某一振型而言, 它是沿着某一个方向振动, 如果能预先确定振动方向，就相当于变原体系为单自由度体系，其自振频率及振型问题便迎刃而解．

2 振型的确定

第 1 振型往往是最容易出现的振型，其沿着最大柔度的方向．如图 1 所示结构 [1]，质点 M 具有两个自由度，假定振动沿着 θ 方向 (θ 为未知量)，求 θ 方向的柔度系数 $\delta(\theta)$，满足极值条件的柔度系数为 $\delta^*(\theta)$，则自振频率 (圆频率)

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{M\delta^*(\theta)}} \tag{1}$$

2009–07–21 收到第 1 稿， 2009–12–25 收到修改稿．

1) 刘书智，男，副教授，主要从事建筑结构的教学与科研工作． E-mail nkdlsz@sina.com

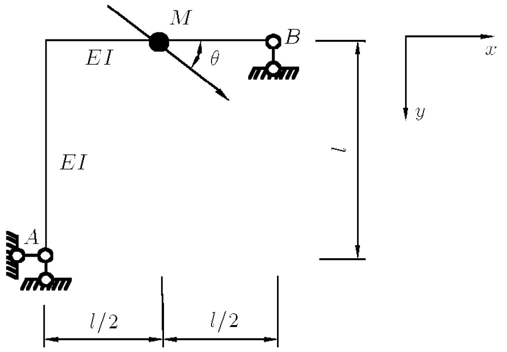


图 1　结构图

为确定振型方向，首先沿着 θ 方向施加单位力 $P=1$，求柔度系数 $\delta(\theta)$. 由柔度系数的极值条件 $\dfrac{\mathrm{d}\delta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$, 求出 θ_1 和 θ_2, 并代入 $\delta(\theta)$ 式里，求出较大的为 $\delta^*(\theta_1)$, 则另一个为 $\delta^*(\theta_2)$, 然后代入式 (1) 可求出相应的两个圆频率 ω_1 和 ω_2.

如仅考虑弯矩影响，柔度系数

$$\delta(\theta)=\sum\int\frac{\bar{M}_p(\theta)\bar{M}(\theta)}{EI}\mathrm{d}s \tag{2}$$

其中，$\bar{M}_p(\theta),\bar{M}(\theta)$ 都是单位力作用下的弯矩方程，对于静定结构两者相同. 对于超静定结构，为简化计算，可选取一个较简单的静定基本结构，$\bar{M}(\theta)$ 是该静定基本结构在单位力作用下的弯矩方程. 符合图乘法条件的可用图乘法计算柔度系数，或者应用 Simpson 公式进行位移计算 [2].

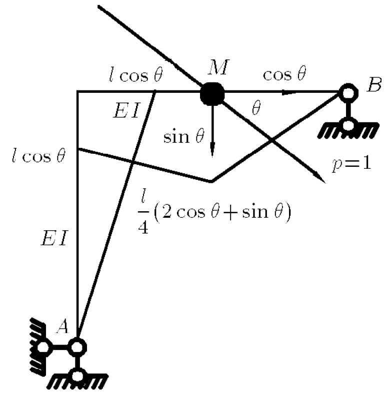
根据求出的振动方向角 θ_1, $\tan\theta_1$ 即为第 1 振型. 根据振型的正交性原理，可确定另一个振型. 这里的振型和多质点的振型表示方法有所不同，但本质一样.

3　算　例

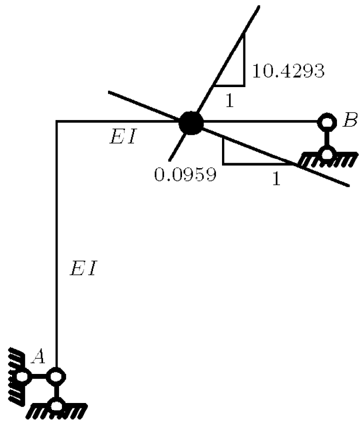
求图 1 所示静定结构的圆频率及振型. 在质点上沿 θ 方向施加单位力 $P=1$, 分解该力为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$, 作 $\bar{M}(\theta)$ 图如图 2(a) 所示，由图乘法求出柔度系数

$$\delta(\theta)=\frac{l^3}{48EI}(1+31\cos^2\theta+3\sin 2\theta)$$

由极值条件 $\dfrac{\mathrm{d}\delta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 得 $\dfrac{l^3}{48EI}(-31\sin 2\theta+6\cos 2\theta)=0$, $\tan 2\theta=\dfrac{6}{31}$, 取 $\theta_1=5.477^0$, 根据振型的正交性, 可确定另一个振型的方向：$\theta_2=90^0+5.477^0=95.477^0$. 第 1 振型：$\tan\theta_1=0.095\,9$, 第 2 振型：$\tan\theta_2=-10.429\,3$, 振型如图 2(b) 所示. 把 θ_1, θ_2 代入柔度系数公式，求出 $\delta^*(\theta_1)=\dfrac{32.287\,7l^3}{48EI}$, $\delta^*(\theta_2)=\dfrac{0.712\,3l^3}{48EI}$. 代入式 (1) 求出



(a)



(b)

图 2　单位弯矩图及振型图

相应的圆频率

$$\omega_1=1.219\,3\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}},\quad \omega_2=8.208\,7\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}$$

4　结束语

通过对该类结构自振频率及振型的计算，很好地说明了基频一定是沿着刚度最弱的方向出现，另一个频率则对应着刚度较大的方向. 当一个物理现象在不同线路之间选择时，将选择最容易发生的线路，这也是一个基本的自然规律. 本文方法实际上是先确定振动方向，变多自由度计算为单自由度计算. 对于多质点体系，也有类似的情况，只不过它的振型不易确定而已. 对于桁架结构，柔度系数的形式稍有变化，同样可应用本文方法计算.

参　考　文　献

1 龙驭球，包世华主编. 结构力学教程 (Ⅱ). 北京：高等教育出版社，2001. 193～298

2 胡景龙，李青宁，阎艳伟. 结构位移计算的牛顿 - 柯特斯方法. 力学与实践，2008, 30(2): 93～95

(责任编辑：周冬冬)