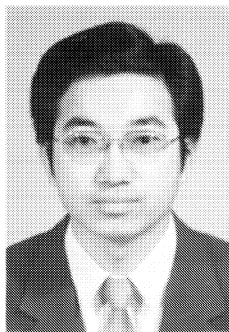


弹性与断裂力学复变方法研究进展

——纪念弹性与断裂力学复变函数法提出 100 周年¹⁾

刘官厅²⁾

(内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)



刘官厅, 博士, 教授, 主要从事解析函数理论的应用与断裂力学研究. 在《International Journal of Solid and Structure》、《Mechanics Research Communication》和《中国科学》E 等国内外著名学术期刊上发表学术论文 60 余篇, 其中被 SCI, EI 检索 22 篇, 出版专著《准晶弹性的复变方法与非线性方程的显式解》和《内插空间理论及其应用》两部. 主持国家自然科学基金面上项目 1 项, 主持内蒙古自然科学基金项目 3 项. 2006 年获内蒙古自治区有突出贡献的中青年专家称号, 2009 年获第 2 届内蒙古自治区自然科学奖.

摘要 1909 年, 俄国数学力学家哥洛索夫首先将复变函数方法应用于二维弹性力学问题, 揭开了弹性力学复变方法研究的序幕. 100 年来, 复变方法在求解弹性与断裂力学问题中取得了很大发展, 特别在断裂力学中的应用尤为成功. 2009 年恰逢弹性力学复变方法提出 100 周年, 该文试图总结 100 年来复变方法在经典断裂力学、复合材料断裂力学、新型材料断裂力学以及三维空间断裂问题中的发展与应用, 以作纪念.

关键词 复变方法, 弹性力学, 断裂力学

中图分类号: O343.7 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2010)03-010-06

RESEARCH PROGRESS OF COMPLEX VARIABLE METHOD FOR ELASTICITY AND FRACTURE MECHANICS¹⁾

LIU Guanting²⁾

(College of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China)

Abstract The Russian scientist of mathematics and mechanics G.V. Kolosov introduced firstly the complex variable method to solve two-dimensional elasticity problems in 1909, which was then extended to fracture mechanics problems. In the past 100 years, the complex variable method has made great progresses. This year is the hundredth anniversary of the complex variable method of elasticity and fracture mechanics. This memorial paper summarizes research progresses of complex variable method in classical fracture mechanics, composite materials fracture mechanics, novel materials fracture mechanics and fracture problems for three dimensional bodies.

Key words complex variable method, elasticity mechanics, fracture mechanics

2009-11-11 收到第 1 稿, 2010-04-21 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10761005)、内蒙古自然科学基金 (2009MS0102, 2009BS0104) 与内蒙古自治区高等学校科学研究 (NJzy08024) 资助项目.

2) E-mail: guantingliu@imnu.edu.cn

引言

1814 年, 法国数学家柯西 (A.L. Cauchy) 的一篇文章系统地阐述了复变函数的积分理论, 首次将复变函数看作是复变量的整体进行研究, 并给出了著名的柯西积分定理和柯西积分公式^[1], 为复变函数论的发展奠定了扎实的理论基础. 后又经过德国数学家黎曼 (G.F.B. Riemann) 和魏尔斯特拉斯 (K. Weierstrass) 等人的巨大努力, 复变函数论已经形成了非常系统的理论, 并渗入到代数学、微分方程、拓扑学等数学分支, 在热力学、流体力学和电学等方面得到了很好的应用.

复变函数论的主要研究对象是解析函数, 而解析函数的一个重要性质是区域内部的值可以由边界上的值表示, 这就为复变函数论在固体力学中的应用奠定了理论基础. 在 1909 年, 俄国数学力学家哥洛索夫 (G.V. Kolosov) 首先将复应力函数法应用于解决二维弹性静力学问题^[2], 从此揭开了弹性力学复变方法研究的序幕. 2009 年恰逢弹性力学复变方法提出 100 周年, 本文试图总结 100 年来这一方法的研究进展, 特别是在断裂力学方面的应用与发展, 作为对已有综述文献的补充与完善, 以作纪念.

1 弹性力学复变方法的产生与发展

1909 年, 哥洛索夫在研究带有椭圆形孔口的无限大薄板在无穷远处沿孔的长轴方向受一均匀外力作用下的应力分布问题时, 首次将应力分量和位移分量用两个复变函数表示出来, 用于解决二维弹性静力学问题, 并获得了成功. 这一开创性的工作开启了平面弹性复变方法研究的大门, 标志弹性力学复变方法的诞生.

在弹性力学发展的初期, 寻求满足全部弹性力学方程和边界条件的解析解是弹性力学的主要任务. 先驱们为此竭尽所能, 在应用数学领域积极探索. 而解析函数恰好具有将区域内部的值与边界上的值有机地联系起来的重要性质, 因此, 哥洛索夫弹性力学复变方法的创立犹如一把开山利斧, 为解决平面弹性问题提供了一种强有力的工具, 很快得到了广大研究者的响应, 哥洛索夫的学生穆斯海里什维利 (N.I. Muskhelishvili) 就是众多研究者中的一位杰出代表. 1933 年, 穆斯海里什维利的专著《数学弹性力学的几个基本问题》^[3]问世, 全书共分为 4 章, 对弹性力学平面问题的复变函数法进行了全面系统的论述, 阐述了用复变函数法求解弹性平面问

题的基本理论, 并概括了当时许多新的研究成果, 成功地给出了许多用其理论解决实际工程中静力学模型例子, 这些例子的结论至今仍然被很好地运用着. 他的老师哥洛索夫在给《数学弹性力学的几个基本问题》一书的序言中对每一章的内容进行了详细点评, 指出该专著中给出了许多著名工程力学问题的解析求解和若干创新之处. 如, 对第 3 章“保角映射与复积分对于平面问题的应用”的点评是“第 3 章整个是属于著者的, 这不论是就其独创性及已解决问题的普遍性或者就著者所使用方法的普遍性而言, 都是如此.”穆斯海里什维利的工作由于其理论的严谨和应用的有效与便捷, 为数学力学界乃至工程领域普遍接受, 吸引了许多研究者从事此领域的工作. 该专著堪称弹性力学和数学力学书海中的瑰宝, 让人们真正领略到了弹性力学复变方法的强大效力. 由于该书在力学领域的极大影响和广受欢迎, 分别于 1935 年、1948 年、1953 年出版了第 2 版、第 3 版和第 4 版, 进行了必要的补充与修订, 并被翻译成英文和中文等多种非俄文版本出版, 足以说明该专著得到了国际同行认可.

特别值得一提的是专著^[3]在引入复变表示时的方法与文献^[2]不同. 根据 1862 年艾瑞 (G.B. Airy) 引入的应力函数 $U(x, y)$, 经典弹性平面问题的控制方程在不考虑体力作用的情况下可表示为一个双调和方程

$$\nabla^2 \nabla^2 U(x, y) = 0$$

其中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为调和算子. 而调和函数、双调和函数与复变函数理论中的解析函数之间又有着非常紧密的联系. 穆斯海里什维利首先将应力函数用复变函数 $\varphi(z)$ 和 $\chi(z)$ 表示为

$$2U(x, y) = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}$$

进而给出了应力分量、位移分量和边界条件的复变表示, 这一方法通俗易懂, 推导详尽, 为之后弹性力学复变方法的推广和应用起到了示范作用. 此前, 古萨 (E. Goursat) 曾用不同的方法给出过双调和函数的复变表示, 且形式也与此略有不同.

用穆斯海里什维利方法 (即弹性力学复变方法) 求解弹性平面问题, 虽然在其著作中给出了许多成功的范例, 但受方法的限制, 作用并不能充分发挥出来. 正如穆斯海里什维利自己指出的一样, 这种方法存在很大的局限性, 要求保角映射必须有理化,

如其专著中作者建议了如下的保角映射

$$z = \omega(\zeta) = \frac{R}{\zeta} + a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots$$

由于当时所用的方法多是直接应用柯西积分及解析函数的性质,有时也借助于一些简单的保角映射,因此该方法对一些形状特殊的模型求解非常有效,当边界形状复杂时则会导致难以处理的 Fredholm 积分方程。

继穆斯海里什维利的著作后,英国 A.H England 1971 年出版的著作《弹性理论中的复变函数法》^[4]是另一部较完整地复变函数法应用于弹性力学进行论述的著作。但该著作在国内尚不多见,且未见到中文翻译的版本。弹性力学的复变函数法是在 20 世纪 50 年代末期引入我国的。在后来的几十年中,我国数学家路见可教授对这一方法的发展做出了很大的贡献。1986 年,他所著的专著《平面弹性复变方法》^[5]代表了自 60 年代后我国学者的研究成果。在其专著中简明扼要地说明了平面弹性理论中的复变函数方法,给出了多种弹性平衡基本问题求解过程,特别是对断裂力学中的一些基本缺陷问题和一些具有复杂边界条件的不同材料焊接的第一、二基本问题进行了论述。专著《平面弹性复变方法》自出版以来,深受广大研究者欢迎,分别于 2002 年和 2005 年出版了第 2 版、第 3 版。

2 复变方法的成功应用

自平面弹性复变方法创立以来,许多研究者就致力于这一方法的应用研究,并且在许多领域中获得了成功。

2.1 经典断裂力学中的应用与发展

断裂力学创立于 20 世纪初。1920 年,英国科学家格里菲斯(A.A.Griffith)尝试解释玻璃的实际强度远低于理论强度的原因,他以材料内部存在缺陷的观点为基础,提出在一定条件下,微小缺陷的失稳扩展将导致材料或结构的破坏,揭开了断裂力学研究的序幕。之后的许多大型事故都验证了这一观点的正确性。如:1943~1947 年,美国近 500 艘全焊接船中发生了 1000 多起脆性破坏,为了分析原因,从 100 多个损坏处割下试件进行实验,发现事故总是在有焊接缺陷处发生;1947 年,前苏联 4500m³ 的大型储油罐底部的壳体连接处,在气温降到 -43℃ 时,形成大量裂纹,造成储罐的破坏;1969 年,美国 F-111 飞机在执行飞行训练中,左翼脱落,导致

飞机坠毁,最后发现是由于机翼枢轴存在缺陷而导致的疲劳断裂;1982 年,我国长江葛洲坝 2 号船闸人字门拉杆断裂,造成长江航运断航 9 天,分析原因发现在断口处存在初始缺陷,等等。

20 世纪四五十年代,奥罗万(E. Orowan)与欧文(G.R. Irwin)发展和完善了格里菲斯理论,引入了裂纹尖端应力强度因子的概念,对断裂判据的建立和断裂力学的应用奠定了坚实的基础,20 世纪 70 年代,断裂力学得到了蓬勃发展。有限裂纹的引入使问题的研究从单连通区域扩大到具有复杂边界的多连通区域上,这为复变方法的应用提供了新的用武之地,也使得复变方法展现出新的活力。这主要是因为用复变函数方法求解可以充分地利用解析函数在边界上的已知解,借助于柯西积分公式确定出弹性区域内部的值,而保角映射法的使用可以把不规则的单连通区域划为简单的规则区域——单位圆盘或者上半平面,不仅使得积分的曲线变得十分简单,而且为进一步的解析延拓奠定了基础,解析延拓又为用刘维尔定理确定函数的具体形式(即变隐函数为显函数)提供了前提。可以说保角映射的引入,使得复变函数中的柯西积分、解析延拓、刘维尔定理有机连接成为一个整体,为充分发挥复变函数这一极为有效的工具求解具体问题发挥了不可估量的作用。

继哥洛索夫 1909 年的开创性工作之后,英格立斯^[6]于 1913 年利用椭圆坐标计算了包含一个穿透性椭圆孔洞的平板受拉伸作用的问题,给出了裂纹和尖角处的应力分布。1919 年,穆斯海里什维利利用柯西积分和保角映射等典型的复变函数方法系统地求解了受斜拉伸作用的椭圆孔口问题,得到了复势函数的解析解,给出了取得最大最小应力的精确位置。1921 年,普厄希尔也发表了关于椭圆孔洞的同类型的文章。文献[2-3,6]的工作被认为是断裂力学复变方法的早期创立阶段。

20 世纪 80 年代以来,范天佑和申大维等人引入了三角函数、指数函数、对数函数、根式函数以及它们的复合函数等一系列非有理函数形式的保角映射^[7-10],求解了带单裂纹和共线双裂纹的狭长体、带裂纹的圆形与椭圆形孔口、星型裂纹、唇形裂纹等若干具有复杂裂纹边界的弹性问题,扩展了可用来作保角映射的函数类,使得穆斯海里什维利复变方法在断裂力学中得到进一步发展,在理论上为求解具体的断裂力学问题提供新的途径,为工程上的具体应用提供了若干有用的公式。如,基于地球的板块理论,共线双裂纹的狭长体模型可以较好地模

拟地震后余震的传播。近年来，这一方法又被进一步推广到求解具有一般曲线边界裂纹的情形^[11]，均得到了问题的解析解。郝天护、张晓堤、黄克智等将复变方法应用于弹性损伤材料，求得了一种弹性损伤材料的Ⅲ型裂纹在小范围损伤条件下的全场解，给出了损伤区形状、损伤耗散能、裂纹表面剪开位移及损伤区前方应力分布等数值结果。这些工作极大地扩展了断裂力学复变方法的应用范围。

2.2 复合材料断裂力学的应用

复合材料作为一种先进功能材料具有比强度高、能按结构的使用要求设计材料等优点，广泛应用于各种工程结构中。随着复合材料的广泛应用，也给力学分析提出了许多的研究问题。复合材料的实验研究表明缺陷出现的部位可能在纤维上、基体内或在两者的界面上，材料内部任何一处的微缺陷都有可能整个材料的破坏。复合材料断裂力学的研究已成为一个国际前沿课题。

由于复合材料属于各向异性材料，所以经典的复变方法不能直接应用，需引入广义复变函数。文献[12-13]利用复变方法求解了含裂纹的各向异性体的周期基本问题、散射波与半圆形凹陷的相互作用问题等，同时还给出了一个类似 Cauchy 核的 Hilbert 核积分公式。专著[5]中都开辟了专门的章节讨论了复变方法在求解复合材料断裂力学问题中的应用。

杨维阳等人的《复合材料断裂复变方法》^[14]是关于复合材料断裂力学复变方法的一本专著，将复合材料平面断裂问题化为广义双调和方程或偏微分方程边值问题，采用广义复变方法推导了复合材料板 I 型、II 型、III 型和混合型受纯弯曲、受纯扭转和受弯扭作用下裂纹尖端应力、应变、位移、弯矩、扭矩的解析解。同时将 J 积分化为复变形式，即复变函数积分的实部或虚部，证明了复合材料板各型裂纹尖端 J 积分的路径无关性。该专著简明扼要地讨论了广义复变函数在求解各向异性材料断裂力学问题中的应用。

界面裂纹是复合材料断裂力学的重要研究对象。文献[15]运用复变函数方法，研究了基体、涂层和夹杂中复势函数的一般解答。给出了界面含有一条裂纹时，复势函数的精确级数形式解。基于已获得的复势函数和广义 Peach-Koehler 公式，计算了作用在位错上的象力。结果表明，界面裂纹对涂层夹杂附近的位错运动有很大的影响效应，含界面裂纹涂层夹杂对位错的捕获能力强于完整粘结情况，

并发现界面裂纹长度和涂层材料常数达到某一个临界值时可以改变象力的方向。

2.3 在新型材料力学问题中的应用与发展

若干新型材料力学问题都表现出了多场耦合的特性，如磁电弹性材料存在多个力学量与电学量、磁学量间的相互耦合效应；准晶弹性问题的刻画不仅需要描写晶格振动的声子场，还需要刻画原子准周期排列的相位子场，而且二者是相互耦合的，等等。因此新型材料弹性与断裂力学问题的求解较经典弹性具有本质的难度，引起了广大研究者的关注，并已成为力学家和数学家研究的热门课题。多个势函数的引入、广义解析函数和广义保角映射的应用是解决新型材料弹性与断裂力学问题的新发展。

Horacio Sosa^[16]、高存法等^[17]利用广义解析函数和广义保角映射并结合罗朗展开求解压电材料中的椭圆孔口与裂纹问题，戴隆超等^[18]基于复变函数的方法，以 PZT-4 材料为例，采用精确电边界条件和非导电边界条件对远场均匀载荷作用下的横观各向同性压电体椭圆孔进行了力学分析，均获得了弹性场与电场的解析解。

范天佑等创造性地引进位移势函数和应力势函数，求解准晶弹性与断裂力学问题，使数目巨大的基本方程组简化成一个或少数几个高阶偏微分方程（即控制方程），通过引入复变量或广义复变量，给出控制方程解的复变函数表示。通过构造适当的保角映射，求解了若干准晶断裂力学问题^[19-20]。专著[21]较系统地总结了一维与二维准晶平面弹性与断裂力学的复变方法，求得了若干裂纹与位错问题的解析解。如：一维六方准晶垂直于准周期方向的平面弹性问题，引入位移势函数 $F(x, y)$ ，则该构型平面弹性问题的控制方程为调和方程与双调和方程

$$\nabla^2 F(x, y) = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 F(x, y) = 0$$

势函数 $F(x, y)$ 的复变表示与经典弹性完全一致，已由穆斯海里什维利给出。

二维十次对称准晶垂直于周期方向的平面弹性问题，引入应力势函数或位移势函数 $F(x, y)$ ，则该构型平面弹性问题的控制方程为 4 重调和方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F(x, y) = 0$$

文献[20]首次将该势函数 $F(x, y)$ 用 4 个解析函数表示为

$$F(x, y) = 2\operatorname{Re}(f_1(z) + \bar{z}f_2(z) + \bar{z}^2 f_3(z) + \bar{z}^3 f_4(z))$$

$$z = x + yi$$

成功求解了椭圆孔口问题. 而垂直于准周期方向的平面弹性问题, 引入位移势函数 $U(x_1, x_3)$, 其控制方程为

$$(a\partial_1^6 + b\partial_1^4\partial_3^2 + c\partial_1^2\partial_3^4 + d\partial_3^6)U(x_1, x_3) = 0$$

其复变表示为

$$U(x_1, x_3) = 2\text{Re}[U_1(z_1) + U_2(z_2) + U_3(z_3)]$$

这是关于 3 个广义复变量 z_1, z_2, z_3 的解析表示, 需用广义复变方法进行运算.

三维二十面体准晶平面弹性问题, 引入应力势函数或位移势函数 $F(x, y)$, 则该构型平面弹性问题的控制方程为 6 重调和方程

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2F(x, y) = 0$$

其势函数 $F(x, y)$ 的复变表示为

$$F(x, y) = 2\text{Re}(f_1(z) + \bar{z}f_2(z) + \bar{z}^2f_3(z) + \bar{z}^3f_4(z) + \bar{z}^4f_5(z) + \bar{z}^5f_6(z))$$

其中, $z = x_1 + x_2i$ 为复变量. 这是关于同一个普通复变量 z 的解析表示.

利用上述复变表示, 通过构造非有理函数型的保角映射, 刘官厅等开展了准晶复杂缺陷问题的研究, 求解了一维六方准晶中具有不对称裂纹的圆形孔口问题、狭长体中非对称静态裂纹与快速传播裂纹问题、带裂纹的椭圆孔口问题、圆弧裂纹及抛物线裂纹的反平面剪切问题等等, 均获得了应力场或应力强度因子的解析解, 将复变方法较好地推广到了准晶弹性与断裂力学中^[22].

文献 [23] 采用复变函数法探讨了十次对称二维准晶材料中接触问题. 结果显示, 对于具有有限摩擦的接触问题, 接触应力在接触区边缘具有实指数奇异性; 而对于粘结接触问题, 接触应力在接触区边缘具有振荡型奇异性. 将复变函数成功应用于准晶接触问题中.

3 复变方法在三维空间弹性与断裂问题方面的推广

1963 年, 我国力学家唐立民在《中国科学》上发表了“三维弹性问题的复变函数方法”的论文, 提出了在 $x-y$ 平面上用复变函数而 z 方向用积分方程逐次迭代, 解决了一类特殊的空间弹性问题, 首次将复变函数方法应用于三维空间弹性问题的研究. 随

后, 樊大钧的专著^[24]较为系统地简介了当时国内外复变方法在研究弹性力学三维问题的研究成果, 主要包括三维旋转轴对称与非轴对称等问题, 给出了大量的工程应用实例.

对于弹性力学一般的空间问题, 应力和位移分量可用 3 个三维双调和伽辽金位移函数完全表示. 文献 [25-26] 将三维双调和函数分解为一个实函数与一个复函数的乘积进行求解, 均得到了问题的解析解. 文献 [27] 利用复变方法研究了周期桶状垫圈全平面应变问题, 将此三维弹性问题归结为求解 3 个复应力函数所满足的解析函数边值问题, 对相同材料和不同材料两类问题分别进行了讨论, 都获得了封闭形式的解析解.

板壳断裂问题是一类非常重要的三维断裂问题, 在工程上具有非常广泛的应用. 由于弹性体内不仅存在面内位移, 还存在面外位移, 其应力应变场沿厚度方向发生变化, 因此, 较一般平面弹性问题复杂. 仿照穆斯海里什维利处理平面弹性问题的思路, Savin^[28]首先给出了板的弯曲内力复变表示. Sih 和 Paris^[29]利用复变函数方法研究了经典板壳 (Kirchhoff 板壳理论) 弯曲断裂问题, 建立了复应力强度因子与复势函数的解析关系式. 柳春图等^[30]将他们在平面断裂问题中所建立的复变 - 主部分分析法成功推广于板弯曲断裂问题, 获得了若干有意义的结果, 阐明了不同裂纹间复势函数的虚常数跳跃的物理意义. 1990 年, 吕品等^[31]建立了 Reissner 板弯曲的复变函数分析方法, 进一步完善了板壳断裂的复变方法.

4 展望与未来

近年来, 由于向有限元法、有限差分法和边界元法等许多数值方法的蓬勃发展, 加之计算机软件的使用, 使得上述数值方法能够较好的实现, 大批学者转向了弹性问题的数值研究. 但是作为一种极为有效和独具特色的方法, 复变函数法在多连通域、复杂几何形状等问题的解析求解中成功应用, 使得利用复变函数法求解弹性平面问题时, 无需预先估计位移和应力、应变场的特征, 无需预先构造未知函数的形式, 只需要按照解法中所包含的数学推导逐步进行下去, 就可得到严格的解析解. 而解析解有利于对变量变化的分析, 因此, 在宏观平面弹性理论和断裂力学中, 复变方法发挥着不可替代的作用. 探索复变方法的新发展, 或许将解析研究与数值方法的有机结合, 对于解决某些特定问题, 可能是一

种有效的求解途径. 非常可喜的是已有一些学者开始致力于这方面的研究. 如周勇等^[32]基于复势理论和杂交变分原理建立了一种适用于力电耦合分析的杂交应力有限元模型, 王其申^[33]提出了由泛复函构造弹性力学平面问题特解的新的复变方法.

本文的撰写也参考了王省哲和怡晓玲的综述文章^[34], 与文献^[34]不同的是本文侧重于介绍复变方法在断裂力学方面的发展及其应用, 特别是穆斯里什维利方法的推广及其在新型材料断裂力学中的应用, 因此是文献^[34]的发展与完善. 在此向所有引文的作者表示诚挚的谢意.

参 考 文 献

- Smithies F. Cauchy and the Creation of Complex Function Theory. Cambridge Universty Press, 1997
- Kolosov GV. On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematical theory of elasticity. Yuriev, 1909
- Muskhelishvili NI. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Netherlands: Noordhoof Ltd, 1953
- England AH. Complex Variable Method in Elasticity. New York: Wiley, 1971
- 路可见. 平面弹性复变方法. 武汉: 武汉大学出版社, 1986
- Inglis CE. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Trans Inst Naval Arch*, 1913, 55: 219–241
- Fan TY. Exact solution of semi-infinite crack in a strip. *Chinese Physics Letter*, 1990, 7: 402–405
- Shen DW, Fan TY. Exact solutions of two semi-infinite collinear cracks in a strip. *Engng Fract Mech*, 2003, 70: 813–822
- 陈柱, 刘官厅, 关璐. 星形裂纹的应力分析. *力学学报*, 2009, 41(3): 425–430 (Chen Zhu, Liu Guangting, Guan Lu. Stress analysis of star cracks. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, 41(3): 425–430 (in Chinese))
- 范天佑. 断裂理论基础. 北京: 科学出版社, 2003
- 陈宜周, 李福林, 林筱云. 圆弧形裂纹问题中的应力对数奇异性. *力学学报*, 2006, 38 (2): 251–254 (Chen Yizhou, Li Fulin, Lin Xiaoyun. Log-singularity of stress in circular arc crack problem. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38 (2): 251–254 (in Chinese))
- 刘殿魁, 许贻燕. 各向异性介质中 SH 波与多个半圆形凹陷地形的相互作用. *力学学报*, 1993, 25 (1): 93–102 (Liu Diankui, Xu Yiyan. Interaction of multiple semi-cylindrical canyons by plane sh-waves in anisotropic media. *Acta Mechanica Sinica*, 1993, 25 (1): 93–102 (in Chinese))
- 高存法, 全兴华. 含半无限裂纹的各向异性体平面问题基本解. *力学与实践*, 1995, 17 (5): 46–47 (Gao Cunfa, Tong Xinghua. General solution of plane problems of anisotropic media with semi-infinite cracks. *Mechanics in Engineering*, 1995, 17 (5): 46–47 (in Chinese))
- 杨维阳, 李俊林, 张雪霞著. 复合材料断裂复变方法. 北京: 科学出版社, 2005
- 刘又文, 方棋洪, 蒋持平. 压电螺位错与含界面裂纹圆形涂层夹杂的干涉. *力学学报*, 2006, 38 (2): 185–191 (Liu Youwen, Fang Qihong, Jiang Shiping. Electroelastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and a circular coated inclusion with interfacial cracks. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38 (2): 185–191 (in Chinese))
- SoSa HA. Plane problems in piezoelectric media with defects. *Int J Solids Structure*, 1991, 28: 491–505
- Gao CF, Fan WX. Exact solution for the plane problem in piezoelectric medias with an elliptic or a crack. *Int J Solids Structure*, 1999, 36: 2527–2540
- 戴隆超, 郭万林. 压电体椭圆孔边的力学分析. *力学学报*, 2004, 36 (2): 224–228 (Dai Longchang, Guo Wanlin. On the problem of piezoelectric solid with an elliptic hole. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36 (2): 224–228 (in Chinese))
- 范天佑. 准晶数学弹性理论及应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1999
- Liu Guanting, Fan Tianyou. The complex method of the plane elasticity in 2D quasicrystals with point group 10 mm tenfold rotational symmetry and holey problems. *Science in China (Series E)*, 2003, 46(3): 326–336
- 刘官厅. 准晶弹性的复变方法与非线性方程的显式解. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 2005
- Guo JH, Liu GT. Exact analytic solutions for an elliptic hole with asymmetric collinear cracks in a one-dimensional hexagonal quasi-crystal. *Chinese Physics B*, 2008, 17(7): 2610–2620
- 王旭, 张俊乾, 郭兴明. 点群 10 mm 十次对称二维准晶中的两类接触问题. *力学学报*, 2005, 37 (2): 169–174 (Wang Xun, Zhang Junqian, Guo Xingming. Two kinds of contact problems in decagonal quasicrystalline materials of point group 10 mm. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, 37 (2): 169–174 (in Chinese))
- 樊大钧. 空间弹性力学 - 复变函数论的应用. 成都: 四川科学技术出版, 1985
- Piltner R. The use of complex valued functions for the solution of three-dimensional elasticity problems. *J Elasticity*, 1987, 18: 191–225
- 贾普荣. 弹性力学空间问题的复变函数解. *力学与实践*, 1995, 17(3): 73–75 (Jia Purong. Complex variable functions solutions of space problems of elasticity mechanics. *Mechanics in Engineering*, 1995, 17(3): 73–75 (in Chinese))
- 李星. 周期桶状垫圈全平面应变问题. *力学与实践*, 1994, 16 (6): 27–30 (Li Xing. All plane strain problems for periodical disc with shape of cylinder. *Mechanics in Engineering*, 1994, 16 (6): 27–30 (in Chinese))
- Savin GN. Stress Concentration Around Hole. New York: Pergamon, 1961
- Sih GC, Paris PC, Erdogan F. Crack tip stress intensity factors for plane extention and plate bending problems. *J Appl Mech*, 1962, 29: 306–310
- 柳春图, 蒋持平. 板壳断裂力学. 北京: 国防工业出版社, 2000

- 31 吕品, 黄茂光. Reissner 板弯曲的复变函数分析方法. 力学学报, 1990, 22 (6): 689–699 (Lü Pin, Huang Maoguang. Complex variable analytic method for solving reissners plate bending problems. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 22 (6): 689–699 (in Chinese))
- 32 周勇, 王鑫伟. 压电材料平面裂纹尖端场的杂交应力有限元分析. 力学学报, 2004, 36 (3): 354–358 (Zhou Yong, Wang Xinwei. Analyses of crack-tip fields of plane piezoelectric materials by the hybrid stress finite element method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004, 36 (3): 354–358 (in Chinese))
- 33 王其申. 由泛复函构造弹性力学平面问题的特解. 力学与实践, 1995, 17 (4): 56–58 (Wang Qishen. Special solutions of plane problems of elasticity mechanics constructed by general complex variable functions. *Mechanics in Engineering*, 1995, 17 (4): 56–58 (in Chinese))
- 34 王省哲, 怡晓玲. 弹性力学问题复变函数解法的应用与发展. 力学与实践, 2008, 30: 110–113 (Wang Xingzhe, Yi Xiaoling. Application and development of complex variable method for elasticity mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2008, 30: 110–113 (in Chinese))

(责任编辑: 刘俊丽)