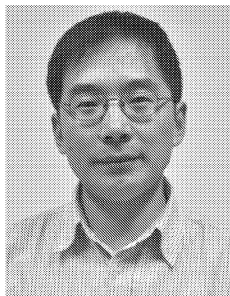


密集颗粒物质的多尺度结构¹⁾

孙其诚²⁾ 金 峰 王光谦

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)



孙其诚, 1999 年在中国科学院获得博士学位, 2001 年清华大学博士后出站, 之后赴英国, 在英国皇家学会院士 Prof. D. Weaire 课题组工作, 2005 年秋回国. 一直从事颗粒物质基本理论及工程应用的研究, 发表论文 80 余篇, 其中 25 篇被 SCI 检索, 出版《颗粒物质力学导论》专著 1 部, 英文专著 1 章, 曾获欧洲物理学会优秀研究工作奖; 2009 年, 与澳大利亚工程院院士 Prof. A. B. Yu 共同主编《科学通报》和 *Chinese Science Bulletin* 中英文双刊的“Granular Physics and Its Applications”专题, 旨在推动我国颗粒物质的基础研究. 正在主持 973 课题一项.

摘要 颗粒物质是大量离散的固体颗粒相互作用而组成的复杂体系. 依据颗粒排布的稀疏程度, 体系可分为颗粒气体、颗粒流体和颗粒固体, 它们有不同本质的动量传递和能量耗散机制. 后两者属于密集颗粒物质体系, 内部形成了颗粒 → 力链 → 体系的多尺度结构, 并涉及多个特征时间尺度, 是典型的多尺度体系. 合理分割体系结构层次、正确理解不同层次的物理过程、并确定它们之间的关联是密集颗粒物质研究的核心任务. 本文依次分析了密集颗粒物质的内在物理图像、多尺度结构层次和特征时间等, 并介绍了多尺度研究框架.

关键词 颗粒物质, 多尺度, 力链

中图分类号: O469 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2010)01-010-06

THE MULTISCALE STRUCTURE OF DENSE GRANULAR MATTER¹⁾

SUN Qicheng²⁾ JIN Feng WANG Guangqian

(State Key Laboratory for Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract The granular matter is a large assemblage of dense packing particles. The interparticle forces are usually dominant in comparison with drag forces from interstitial fluid, and are transmitted through heterogeneous force chains. This paper studies the multiscale structures and rate-dependent processes involved in granular materials, and shows that the granular matter is a typical multiscale mechanical system. Three length scales are identified, particle, force chain and granular system in micro- meso- and marco scales, respectively, and with three related characteristic time scales. The correlation of particle-force chain, force chain-system would be the major problem in the multiscale analysis of granular materials.

Key words granular matter, multiscale, force chains

1 颗粒体系简介

颗粒物质是大量离散的固体颗粒相互作用而组成的复杂体系. 近二十年来, 在诺贝尔物理学奖得

主 P.G. de Gennes 的倡议下, 物理学家从非平衡态统计和非线性物理的角度对颗粒体系的静力学与动力学进行研究, 颗粒体系的研究已经成为物理学界

2009-02-08 收到第 1 稿, 2009-10-15 收到修改稿.

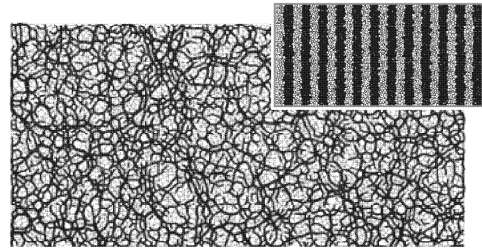
1) 国家重点基础研究发展计划 (2010CB731504) 和清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室自主课题 (2008-ZY-06) 资助项目.

2) E-mail: qcsun@tsinghua.edu.cn

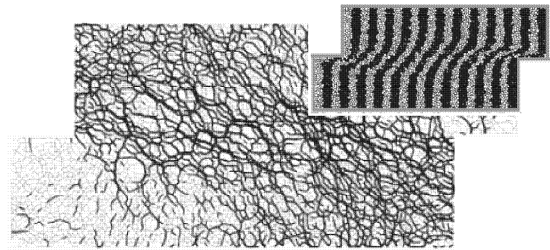
活跃的研究领域^[1]。根据颗粒排布的稀疏程度，体系可分为颗粒气体、颗粒流体和颗粒固体。颗粒气体以碰撞为主，实现动量传递，其研究已取得了一些突破性进展，比如发现其动力学行为可采用考虑能量耗散性的修正气体动力学理论来描述。

颗粒流体和颗粒固体属于密集排布的颗粒物质体系，进展相对缓慢。大量光弹实验表明，在密集体系中，颗粒间接触力一般大于间隙气体或液体力而起主导作用，且沿着链状路径（亦即力链）这一非线性结构传递，形成颗粒 → 力链 → 体系的多尺度结构。颗粒固体和颗粒流体的多尺度结构及其演变规律又有很大差异，决定各自的动力学及两者间的相转变。对于颗粒固体，人们发现力的传播模式与体系尺度与颗粒间摩擦力的大小有关，其应力基本与剪切速率无关，一些力学行为可采用固体弹塑性理论予以初步描述，但是体胀、软化、大变形等一系列更复杂动力学行为仍无法解决，这涉及一定数量力链的断裂和重构。对于颗粒流体，断裂和重构的力链数目和频率显著增加，应力基本与剪切速率成正比，此时固体弹性力学和流体动力学均不适用。当断裂和重构的力链数目和频率增加到某一阈值时，颗粒固体会演变为颗粒流体，对这种相变的研究更是刚刚起步。实验结果表明，密集颗粒体系内部发生着复杂的物质交换和能量传递等过程，由于其非连续和非均匀的基本特点，其内秉的能量耗散行为与普通物质不同，颗粒体系局部任何一个扰动沿着力链的传播都快于颗粒运动，因此激波极易形成，同时在短距离内较快衰减，这些特征就使得颗粒体系在有限范围内发生塑性变形或者破坏，比如单一的局部剪切带，或者有若干小破坏面组成的分布式破坏（即使在小应变和低应变率情况下，也是如此），这些变形或破坏都发生在力链尺度上。这些物理过程强烈地依赖于颗粒物性参数、力链网络结构和强度、以及边界条件等多个尺度层次。从分析密集体系多尺度结构特征入手，可以在颗粒固体应力传播模式、破坏机制、颗粒流体流动本构关系等密集体系的关键问题上取得突破，并初步建立起宏观动力学的微观理论，这是密集颗粒物质研究的主导思想和根本目的。

图 1 是采用颗粒离散元法模拟得到的二维颗粒体系直剪时的力链结构。可以看出，力链网络和对应的颗粒位移场有很大不同，并且剪切带周围的力链与剪切方向的夹角约为 30° 左右，而剪切带外的力链变化很小。



(a) 初始排布颗粒体系中的力链



(b) 当受到剪切时，力链发生演变

图 1 二维颗粒体系直剪时力链网络^[2]

(图中斑马线图显示了颗粒位移情况)

与此同时，自然界中常见的土质滑坡、泥石流和岩土等都是密集颗粒体系，在降雨和地震等因素诱发下，内部结构可能失稳，由颗粒固体转变为颗粒流体，通常以高速冲刷、淤埋等形式对下游带来毁灭性灾害。在这样的条件下，体系的性质等很难直接测定，加强密集颗粒物质的研究，结合室内实验和野外观测，可能对其内部结构特征、流动起动机理（亦即颗粒固体转变为颗粒流体）、流动过程及规律进行深入的机理性研究，能够为工程技术提供所需颗粒体系的性能参数，为土力学、泥沙运动力学和泥石流等学科的发展创造条件。图 2 是“granular matter”或“granular materials”出现在关键词、或篇名或摘要中的文章数量，基本上随年份按指数增加。

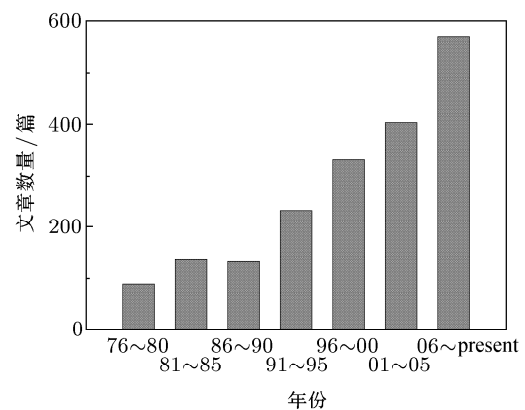


图 2 颗粒物质的文章随年份的增长情况

(2009 年 11 月检索 www.sciencedirect.com)

我国颗粒物质的研究起步较晚,但发展迅速,瞄准了关键科学问题,逐渐接近国际水平^[3].研究队伍不断壮大,研究范围从基础研究到工程应用全面展开.2009年8月,中国力学学会学术大会'2009组织了“颗粒物质力学及工程应用”的专题研讨会,50位来自力学和物理领域的科研人员参加;2009年 *Chinese Science Bulletin* 出版了“Granular Physics and Its Applications”专题,包含中国在内的6个国家的专家应邀撰写了文章^[4].

2 多尺度问题

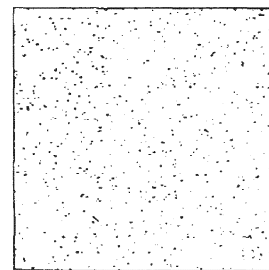
随着工程问题的越来越复杂和学科向更深入、更广泛领域的拓展,体系结构层次及层次间的关联等科学问题已经不能再采用统计平均和微扰方法处理,必须将不同尺度耦合求解,这就是多尺度问题.特别是近十年来,“多尺度”已经成为研究热点^[5,6],普遍出现在物理、力学、地球科学、水利工程、生物、材料、化学等学科的研究中,但是“多尺度”至今没有严格的定义,在不同学科中的含义相差很大,有的甚至把“多尺度”认为是研究对象尺寸大小的不同.事实上,在力学中多尺度有明确的物理含义:在固体破坏中,不同尺度的微损伤相互作用产生更大尺度上的裂纹导致材料破坏;在流体中,不同尺寸的涡漩相互作用构成复杂的流动图案.这些力学问题的共同特点是存在不同大小的结构层次,具有不同的特征时间;层次间有不同程度的关联,不同结构层次上的物理机制往往不一致.因此多尺度具有深刻的含义,反映了体系内在结构层次性及不同层次间的关联,从哲学高度揭示了研究体系的层次性和普遍联系性,而绝非研究体系尺寸的大小.不同尺寸的体系中普遍涉及多尺度,只是显著与否的问题.

对于复杂演变的动力学体系,往往多个本质不同的内在物理过程相互作用,继续采用均一化处理显然不合适,进行结构层次的合理分割及尺度间作用的关联,就成为机理研究的核心问题,亦即基于多尺度的概念,根据系统内在物理机制分割成不同尺度的有限结构层次,然后逐一去分析研究,并充分考虑尺度分割完毕后尺度间的关联,多尺度方法是研究复杂体系的有效思路.结合研究体系的主要矛盾,通常把结构层次再凝练、简化为微观、细观和宏观3个尺度结构层次(尽管可能涉及更多的物质层次).从物理学角度,微观严格地指原子层次的过程,比如颗粒表面接触时表面原子间的粘连作用,在多尺度研究中,我们认为微观尺度应该是组成体系的基

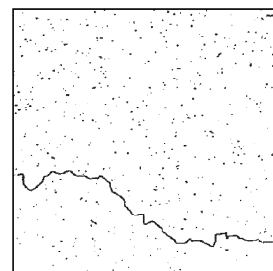
本单元;宏观尺度是指所研究体系,而细观尺度则是指由基本单元组成的相对稳定的结构体,它往往对宏观尺度的行为起决定性作用,显然它既大于基本单元的微观尺度、又小于体系的宏观尺度.对于特定的体系,微观、细观和宏观等3个尺度所指的对象不一样.

多尺度方法在固体的统计细观力学研究和气固流态化过程研究中得到成功应用.在气固流态化过程中,微观尺度指的是微小颗粒,其表面力较强,诸多颗粒相互吸引形成较为稳定的新结构体——聚团,构成了细观尺度,虽然聚团可在瞬间破碎或再生成,但是一旦生成,则聚团相对稳定,对流态化系统的流动、传热、传质和反映等有较大影响,如何从机理上解释聚团形成和破碎机制、量化聚团大小和持续时间等一系列关键问题至今尚未很好地解决.

在固体的统计细观力学研究中,微观尺度指的是原子点阵,细观尺度指的是微裂纹、微孔洞、微损伤和微结构等,宏观尺度的固体破坏是大量微损伤的累积,并通过跨尺度的非线性关联发展而诱发宏观灾变,微观尺度上某些无序结构的效应可能被强烈放大,上升为显著的大尺度效应,是一种跨尺度演化的过程^[7],如图3所示的微裂纹级串现象的模拟结果^[8].统计细观损伤力学是描写非均匀介质损伤演化的一种连接细观与宏观尺度的统计理论,可导出描写宏观损伤演化规律的损伤动力学函数,其性质决定了



(a) 微裂纹数目达到临界点, 额外的一条随机裂纹触发



(b) 众多裂纹间的级串

图3 二维微裂纹系统中大量微裂纹级串导致破坏^[8]

系统中随机损伤发展为损伤局部化的转折点。

从图 3 可以看出，在初始阶段由于成核的微裂纹数目较少，分布比较稀疏，随着成核的微裂纹数目的增加，在局部出现不同程度的微裂纹连接，演化过程继续进行，当演化到一临界点时，一随机成核的微裂纹增加触发了一级串连接过程，形成一贯通裂纹，导致层裂破坏。

3 颗粒体系的多尺度

在密集颗粒物质研究中，我们认为力链网络复杂动力学响应决定颗粒体现的宏观力学性能，是颗粒物质力学研究的主要矛盾，进而提出了颗粒物质力学的多尺度研究框架。从颗粒间的接触作用和颗粒体系应力应变特性来看，颗粒体系中的微观尺度应

该是组成颗粒体系的基本单元，即单颗粒；宏观尺度是指整个颗粒体系；而细观尺度则是指由基本单元组成的较为稳定的结构体，亦即力链。

在准确计算颗粒接触力的基础上，作者提出强力链判断准则：颗粒必须相邻，颗粒间球心连线角度变化小于一定角度 θ_c ，同时颗粒上接触力要大于接触力平均值 $\langle F \rangle$ 。我们基于此判据对准静态颗粒体系单轴压缩时力链形态进行了量化分析，该体系由 10 400 个等径颗粒组成，静摩擦系数为 0.4，孔隙率为 0.124。图 4 是颗粒体系中强力链网络，其中由 3 个颗粒以上组成的强力链用粗线表示。我们发现对于体系大小不同、荷载加载方式不同时，静态颗粒体系中的细观尺度力链长度的幂指数变化不大，只有在体系发生流动时才发生变化，其中必然蕴含深

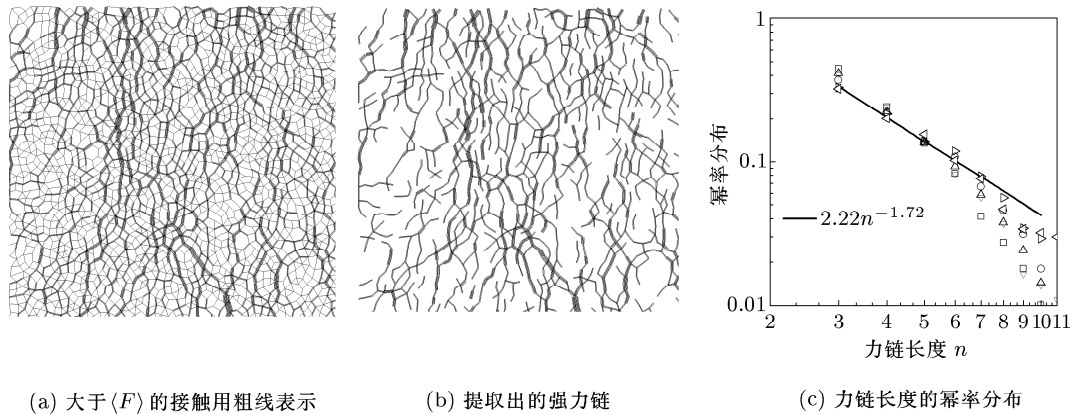


图 4 颗粒连接网络及提取出的强力链 (颗粒体积分数 0.848, 平均配位数 $\langle Z \rangle = 4.00$, 角度阈值 $\theta_c = 45^\circ$, 接触力阈值 $F_c = \langle F \rangle$)

刻的物理意义。

4 颗粒体系的特征时间

Barenblatt 于 1992 年的第 18 届国际理论与应用力学大会 (ICTAM) 指出“在这些现象的数学模型里，力学性能的宏观方程和微观结构转变的动力学方程，组成统一的方程组，需联立求解”^[7]。对于颗粒体系，力链只能承受一定大小的切向力，所以颗粒物质中的力链不会太长，由几个或十几个颗粒组成，颗粒体系的空间尺度区分不太明显，主要体现在特征时间尺度的差异上。

从物理机制上看，密集颗粒体系在外力作用下颗粒相互挤压形成力链，或者力链上颗粒被推开，使得力链断裂，进而影响颗粒体系的力学性能，这是颗粒体系的基本物理图像，与固体微损伤的累积，并通过跨尺度的非线性关联发展而诱发宏观灾变的

图像类似。在力链演变过程中，蕴涵了 3 个速率过程，宏观控制条件下力链的稳定过程、力链形成和断裂过程、力链中应力波传递过程，分别对应 3 个不同的特征时间^[10]。

力链持续时间：力链从形成至断裂的时间

$$t_{fc} = \frac{1}{\gamma}$$

当颗粒体系以 γ 的速率剪切时，力链以 γ 的速率转动，逐渐不稳定而断裂，甚至颗粒间拓扑关系发生重排。显然 t_{fc} 与力链持续时间相关。 γ 决定了宏观应力公式中的基本时间，比如在 Bagnold 应力 $\tau = k\gamma^2$ 中， γ 是唯一的时间尺度。

颗粒构成力链或脱离力链的时间：在外荷载发生变化时，力链中的颗粒逐渐脱离力链或者颗粒被挤压而形成力链，则在外力 Pd^2 作用下，颗粒移动直

径 d 的时间为

$$d \propto \frac{Pd^2}{\rho d^3} t_m^2$$

则有

$$t_m = \frac{d}{\sqrt{P/\rho}}$$

力链中接触力传递时间: 颗粒间力和能量都是通过弹性波沿着力链传播出去, 实验发现约 70% 的能量通过沿颗粒表面传播的瑞利波传递, 瑞利波传播

单颗粒表面所需要的时间

$$t_R = \frac{\pi R}{v_R} = \frac{d}{0.104\nu + 0.558} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

其中, G 为颗粒材料的剪切模量, $G = E/2(1+\nu)$, E 和 ν 是颗粒材料的弹性模量和泊松比, d 是颗粒直径, ρ 是颗粒材料密度.

以上 3 个物理过程的特征时间之比, 构成了 3 个过程的竞争与耦合, 汇总在表 1 中.

表 1 颗粒物质体系的 3 个物理过程和它们的特征时间

特征时间			3 个物理过程特征时间的相互关系	
宏观条件下力链稳定特征时间	力链形成或断裂特征时间	力链上力传递的特征时间	细观 / 宏观	力传递 / 力链形成
$t_{fc} = \frac{1}{\gamma}$	$t_m = \frac{d}{\sqrt{P/\rho}}$	$t_R = \frac{d}{0.104\nu + 0.558} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$	$\frac{t_m}{t_{fc}} = \frac{d}{\gamma\sqrt{P/\rho}}$	$\frac{d/v_R}{t_m} = \frac{\rho}{(0.163\nu + 0.877)\sqrt{GP}}$
			$\frac{t_R}{t_{fc}} = \frac{d}{\gamma} \cdot \frac{1}{0.104\nu + 0.558} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$	

(1) 力链形成或断裂所需特征时间与力链稳定特定时间的竞争与耦合

$$\frac{t_m}{t_{fc}} = \frac{d}{\gamma\sqrt{P/\rho}}$$

该比值也称为惯性数 I (inertial number)^[11]. 显然对于小的 t_m/t_{fc} , 对应准静态颗粒流动, 此时颗粒体系变形非常缓慢, 但是对于较大的 t_m/t_{fc} , 则对应快速颗粒流. 所以如果增加剪切速率或者减小内部压强, 都使得颗粒流动从准静态到快速流动过渡. t_m/t_{fc} 与 Savage 数或者 Coulomb 数基本等价^[12].

(2) 力链形成或断裂过程与相应的应力传递过程的竞争与耦合

$$\frac{d/v_R}{t_m} = \frac{\rho}{(0.163\nu + 0.877)\sqrt{GP}}$$

对于刚性颗粒, $G \rightarrow \infty$, 则 $(d/v_R)/t_m \rightarrow 0$, 则密集颗粒体系局部任何一个扰动沿力链迅速传播出去, 其速度都快于颗粒运动速度, 因此激波极易形成, 同时又在短距离内较快衰减.

(3) 力链上力传递时间与力链持续时间的竞争与耦合

$$\frac{t_R}{t_{fc}} = \frac{\pi d \dot{\gamma}}{0.163\nu + 0.877} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

当 t_R/t_{fc} 很小时, 力链上微小的应力变化都极快传递, 则力链表现为一相对稳定的结构体, 整个颗粒体

系表现为准静态或缓慢变形, 反之亦然. 显然 t_m/t_{fc} 和 t_R/t_{fc} 的意义相近, 但属于不同尺度特征时间的比值.

对于 $d = 1\text{ mm}$ 的沙粒, $E = 5\text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2650\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\gamma = 20/\text{s}$, 外荷载 $P = 10^4\text{ Pa}$, 则 $t_m = 1.91 \times 10^{-4}\text{ s}$, $t_{fc} = 5.00 \times 10^{-2}\text{ s}$, $t_R = 3.98 \times 10^{-6}\text{ s}$, 进一步得到 $t_m/t_{fc} = 3.82 \times 10^{-3}$, $t_R/t_{fc} = 7.6 \times 10^{-5}$, $(d/v_R)/t_m = 2.06 \times 10^{-4}$. 由此我们看出, 该颗粒体系非常缓慢变形, 力链是准静态的结构体.

5 结 论

多尺度反映了系统结构层次性及不同层次间的关联, 从哲学高度揭示了研究体系的层次性和普遍联系性. 随着研究体系越来越复杂, 内在结构层次的影响越来越突出, 多尺度方法是剖析这些问题的有效途径之一, 必将在现代科学发展中占重要地位. 目前多尺度方法仅在几个有限的力学问题中得到较为系统发展, 尚不存在普适的多尺度研究方法.

对于密集颗粒体系, 依据内在物理过程, 把体系结构层次划分为 3 个尺度: 微观尺度是组成颗粒体系的基本单元, 即单颗粒; 宏观尺度是指整个颗粒体系; 而细观尺度则是指由基本单元组成的较为稳定的力链网络. 其中颗粒 - 力链、力链 - 宏观的两个关联是颗粒物质多尺度方法的难点和重点. 从分析

密集体系多尺度结构特征入手, 可以在颗粒固体应力传播模式、破坏机制、颗粒流体流动本构关系等密集体系的关键问题上取得突破, 并能够初步建立起宏观动力学的微观理论, 这将是今后若干年内密集颗粒物质研究的主导思想。

参 考 文 献

- 1 陆坤权, 刘寄星. 软物质物理学导论. 北京: 北京大学出版社, 2006 (Lu Kunquan, Liu Jixing. An introduction to soft matter physics. Beijing: Peking University Press, 2006 (in Chinese))
- 2 Zhang L, Thornton C. A numerical examination of the direct shear test. *Géotechnique*, 2007, 57(4): 343~354
- 3 孙其诚, 王光谦. 颗粒物质力学导论. 北京: 科学出版社, 2009 (Sun Qicheng, Wang Guangqian. An Introduction to the Mechanics of Granular Matter. Beijing: Science Press, 2009 (in Chinese))
- 4 “颗粒物质物理及其应用” 专题. 科学通报, 2009, 54(11): 1483~1523 (Special topic: Granular physics and its applications. *Chinese Science Bulletin*, 2009, 54(11): 1483~1523 (in Chinese))
- 5 李静海, 欧阳洁, 高士秋等. 颗粒流体复杂系统的多尺度模拟. 北京: 科学出版社, 2007 (Li Jinghai, Ouyangjie, Gao Shiqiu, et al. Multiscale Simulations of Particle Fluid Systems. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese))
- 6 范镜泓. 材料变形和破坏的多尺度分析. 北京: 科学出版社, 2008 (Fan Jinghong. Multiscale Analysis for Deformation and Fracture of Materials. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 7 白以龙, 汪海英, 柯孚久等. 从“哥伦比亚”号悲剧看多尺度力学问题. 力学与实践, 2005, 27(3): 1~6 (Bai Yilong, Wang Haiying, Ke Fujiu, et al. A view on multi-scale mechanical problems from Columbia tragedy. *Mechanics in Engineering*, 2005, 27(3): 1~6 (in Chinese))
- 8 卢春生, 柯孚久, 白以龙等. 演化诱致突变的计算机模拟. 中国科学 (A 辑), 1995, 25(1): 54~60 (Lu Chunsheng, Ke Fujiu, Bai Yilong, et al. Numerical simulation of evolution-induced catastrophe. *Science in China Series A*, 1995, 38(4): 462~471)
- 9 Sun Qicheng, Wang Guangqian, Hu Kaiheng. Some open problems in granular matter mechanics. *Progress Nat Sci*, 2009, 19(5): 523~529
- 10 Sun QC, Wang GQ. A multiscale methodology in granular matter physics. In: Proceedings of the XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (XXII ICTAM). Adelaide, Australia, 2008, 25~29
- 11 Forterre Y, Pouliquen O. Flows of dense granular media. *Annu Rev Fluid Mech*, 2008, 40: 1~24
- 12 Ancey C, Coussot P, Evesque P. A theoretical framework for granular suspension in a steady simple shear flow. *J Rheol*, 1999, 43: 1673~1699

(责任编辑: 刘俊丽)

(上接第 19 页)

4 总 结

本文运用复变函数方法, 研究了楔型向错偶极子与楔型裂纹的弹性干涉问题. 利用保角变换和解析延拓技术, 得到了该边值问题的封闭形式解, 导出了楔型裂纹尖端的应力强度因子的解析表达式, 给出了裂纹和向错偶极子不同几何组合对应力强度因子的影响规律. 研究表明: 在一定条件下, 楔型向错偶极子能够延缓裂纹的扩展; 当偶极子靠近裂纹时, 其对裂纹尖端的屏蔽、反屏蔽效应显著增强. 同时, 向错偶极子的方向存在一个临界值使其对应力强度因子的屏蔽或反屏蔽效应最大. 此外, 裂纹张开角以及偶极子臂长对应力强度因子也有较大的影响.

参 考 文 献

- 1 Romanov AE. Screened disclinations in solids. *Materials Science & Engineering A*, 1993, 164(1): 58~68
- 2 Romanov AE. Mechanics and physics of disclinations in solids. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2003, 22(5): 727~741
- 3 Li JCM. Disclination model of high angle grain boundaries. *Surface Science*, 1972, 31(1): 12~26
- 4 Romanov AE. Straight disclinations near a free surface. *Physica Status Solidi (A)*, 1981, 63(3): 383~388
- 5 Vladimirov VI, Romanov AE. The behaviors of wedge disclination systems near grain boundaries. *Physics of Metals*, 1982, 4(6): 1053~1062
- 6 Yu HY, Sanday SC. Disclination in bimetals. *Physica Status Solidi (A)*, 1991, 126: 355~365
- 7 Wu MS. Exact solutions for a wedge disclination dipole in a transversely isotropic biomaterial. *International Journal of Engineering Science*, 2000, 38(16): 1811~1835
- 8 Sheinerman AG, Gutkin MY. Misfit disclinations and dislocation walls in a two-phase cylindrical composite. *Physica Status Solidi (A)*, 2001, 184(2): 485~505
- 9 Fang QH, Liu YW, Jiang CP, et al. Interaction of a wedge disclination dipole with interfacial cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, 73(9): 1235~1248
- 10 Muskhelishvili NL. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Leyden: Noordhoff, 1975. 331~340
- 11 Zhang TY, Tong P, Ouyang H, et al. Interaction of an edge dislocation with a wedge crack. *Journal of Applied Physics*, 1995, 78(8): 4873~4880

(责任编辑: 周冬冬)