图的二分问题唯一全局最优解实例与骨架计算复杂性

江 贺[①②] 张宪超[①] 陈国良[②]

(① 大连理工大学软件学院, 大连 116621; ② 中国科学技术大学计算机科学与技术系, 合肥 230027. E-mail: jianghe@dlut.edu.cn)

摘要 骨架分析是近年来理论计算机科学研究的热点, 对于NP-难解问题的启发式算法设计具有重要意义. 由于骨架计算复杂性研究十分困难, 现有的骨架分析方法多采用实验统计手段. 针对现有方法中存在的骨架规模小的缺陷, 给出图的二分问题GBP(graph bi-partitioning problem)的唯一全局最优解实例构造算法, 有效提高了骨架的规模. 同时, 利用该算法从理论上证明了寻找GBP问题的完整骨架属于NP-难解问题, 即在 $P \neq NP$ 的假设下, 不存在多项式时间的算法可以确保得到GBP问题的完整骨架. 本文的工作拓广了骨架计算复杂性研究的范围, 所提出的唯一全局最优解实例构造算法对于NP-难解问题启发式算法设计亦具有较高的参考价值.

关键词 图的二分问题 **NP**-难解 骨架分析 唯一全局最优解实例 计算复杂性

骨架分析(backbone analysis)[1]是近年来NP-难解问题[2]研究中非常活跃的领域, 对于衡量问题的难度(hardness)和相变(phase transition)具有重要意义. Monasson等人[3]撰文讨论了骨架对约束可满足性问题SAT(the satisfiability problem)的求解难度及相变的影响. Zhang[4]分析了骨架规模对于非对称旅行商问题ATSP(asymmetric traveling salesman problem)求解难度的影响. 同时, 骨架分析是当前NP-难解问题算法设计的重要手段: Schneider[5]和邹鹏等人[6]利用多个局部最优解的相同边作为近似骨架, 得到了求解TSP问题的多级归约算法; Zhang等人[7]给出了求解TSP问题的骨架导向LK算法; Zhang[8], Dubois等[9]和Valnir[10]分别给出了求解SAT问题的骨架导向局部搜索算法; Zou等人[11]提出了求解二次指派问题QAP(quadratic assignment problem)的近似骨架导向的蚁群算法. 然而, 目前骨架分析还主要停留在实验统计分析的基础上, 计算复杂性分析一直是骨架研究的难点. 在我们的知识范围内, 目前仅有的计算复杂性结果是由Kilby等人[12]证明了获取TSP问题的完整骨架属于NP-难解的.

图的二分问题GBP(graph bi-partitioning problem)[2]属于典型的NP-难解问题, 在并行计算、VLSI电路设计、交通调度和数据挖掘等众多领域具有极其广泛的应用背景. 根据计算复杂性理论[13]可知: 除非P = NP, 否则NP-难解问题不存在多项式时间的完全算法. 对于大规模实例, 人们的研究目标集中在能用较短时间得到可接受(在性能上)解的启发式算法(heuristic)方面[14~18]. 目前GBP问题尚缺乏骨架的计算复杂性研究结果, 仅有的结果是Zou等人[19]利用近似骨架进行启发式算法设计. 然而, 现有的成果存在以下问题. (ⅰ) 目前普遍使用的近似骨架方法存在缺陷, 当全局最优解个数不唯一时, 骨架的规模非常小, 这样近似骨架的作用极其有限. 能否找到方法解决GBP问题骨架规模过小的缺陷? (ⅱ) 理论上是否存在算法可以在多项式时间内得到完整骨架? 若存在这样的算法, 则可以直接使用骨架来进行算法设计, 而无须使用近似骨架. 针对上述问题, 本文首先给出了唯一全局最优解GBP实例的构造方法, 对于任意GBP实例, 均可以在多项式时间内得到对应的唯一全局最优解GBP实例, 且新实例的全局最优解恰好是原GBP实例的一个全局最优解, 显著提高了骨架的规模. 其次, 利用唯一全局最优解GBP实例的骨架可以在多项式时间内构造全局最优解, 进而从理论上证明了获取GBP问题的完整骨架属于NP-难解问题, 即在 $P \neq NP$ 的假设下, 不存在算法可以在多项式时间内得到完整骨架. 本文的工作拓广了骨架计算复杂性的研究范围, 文中所采用的先构造唯一全局最优解实例, 再由其骨架构造全局最优解的研究方法对于其他NP-难解问题具有较强的参考价值.

1 预备知识

首先给出文中所用到的一些定义和记号.

2007-05-20 收稿, 2007-08-10 接受

国家自然科学基金(批准号: 60673046, 60673066)、辽宁省自然科学基金(批准号: 20051082)和大连理工大学青年教师培养基金资助项目

定义 1 给定无向加权图 $G=(V, E, w)$, 其中 $V=\{1, 2, \cdots n\}$为顶点集合(n 为偶数), E 为无向边的集合(即(i, j), (j, i)表示同一条边), w_{ij} 表示边(i, j)的权值, $|V|=n$ 表示集合 V 中顶点的数目, $|E|=m$ 表示集合 E 中边的数目, GBP 实例(记为 GBP(V, E, w))的可行解 $s=(V_1, V_2)$将 V 划分为两个规模相等、不相交的子集 V_1, V_2 (即 $V_1 \cap V_2=\varnothing$, $V_1 \cup V_2=V$, $|V_1|=|V_2|=n/2$).

由于(V_1, V_2)与(V_2, V_1)实际上是相同的可行解, 本文在后面的叙述中约定, 对于任意的形式为 $s=(V_1, V_2)$可行解, 顶点 1 必须出现在 V_1 中.

定义 2 给定无向加权图 $G=(V, E, w)$上 GBP 实例 GBP(V, E, w), 对于可行解 $s=(V_1, V_2)$, 记 $C(s)=\{(i, j)|(i, j)\in E, i\in V_1, j\in V_2\}$表示顶点集 V_1 与 V_2 之间的割(cut), 可行解 s 的目标函数值定义为 $w(s)=\sum_{(i,j)\in C(s)} w_{ij}$. GBP 问题的目标是寻求目标函数值最小的可行解 s^*, 即 $w(s^*)=\min\{w(s)|s\in\prod\}$, 其中$\prod$是全体可行解的集合.

定义 3 给定无向加权图 $G=(V, E, w)$, 若任意顶点 $i\in V-\{1\}$, 均有$(i, 1)\in E$ 成立, 则称 $G=(V, E, w)$为顶点 1-连通的, 此时实例 GBP(V, E, w)被称为顶点 1-连通实例.

给定无向加权图 $G=(V, E, w)$, 若图 G 是连通图, 给定 GBP 实例 GBP(V, E, w)的可行解的割, 可以如算法 1 构造可行解.

算法 1 割的可行解构造算法

输入: GBP 实例 GBP(V, E, w), 割 E_C

输出: 解 s

Begin

(1) Choose arbitrarily an edge $(i^*, j^*)\in E_C$, $V_1=\{i^*\}$, $V_2=\{j^*\}$;

(2) $T_0=V_1\cup V_2$, $T_1=V_1\cup V_2$;

(3) while $T_0 \neq \varnothing$ do

 (3.1) choose arbitrarily a vertex $i\in T_0$, $T_0=T_0-\{i\}$;

 (3.2) for each adjacent vertex j to i and $j\notin T_1$ do

  (3.2.1) if $i\in V_1$ and $(i, j)\in E_C$ then $V_2=V_2\cup\{j\}$;

  (3.2.2) if $i\in V_1$ and $(i, j)\notin E_C$ then $V_1=V_1\cup\{j\}$;

  (3.2.3) if $i\in V_2$ and $(i, j)\in E_C$ then $V_1=V_1\cup\{j\}$;

  (3.2.4) if $i\in V_2$ and $(i, j)\notin E_C$ then $V_2=V_2\cup\{j\}$;

  (3.2.5) $T_1=T_1\cup\{j\}$, $T_0=T_0\cup\{j\}$;

(4) if $1\in V_2$ then $s=(V_2, V_1)$ else $s=(V_1, V_2)$;

End

算法 1 的正确性是显而易见的. 算法本身实际上是对于连通图顶点的一次遍历, 故此 $V_2\cup V_1=V$; 根据步骤(3.2)可以知道, 每一个顶点会且仅会加入到 V_2, V_1 中的某一个, 即 $V_2\cap V_1=\varnothing$, 并且 $C(s)=E_C$. 算法步骤(1), (2)和(4)的时间复杂度为 $O(1)$, 步骤(3)的时间复杂度为 $O(m)$, 故算法 1 的时间复杂度为 $O(m)$.

定义 4 对于无向加权图 $G=(V, E, w)$上 GBP 实例 GBP(V, E, w), 存在有限多个全局最优解 $s_1^*, s_2^*, \cdots s_q^*$, 记所有全局最优解的集合为$\prod^*$, 其中 $q=|\prod^*|$为全局最优解个数. GBP 实例 GBP(V, E, w)的骨架定义为 $\mathrm{bone}(V, E, w)=C(s_1^*)\cap C(s_2^*)\cap\cdots\cap C(s_q^*)$.

根据定义 4 可知, GBP实例GBP(V, E, w)的全局最优解越多, 骨架的规模越小. 在给出骨架定义的基础上, 本文给出近似骨架的定义. Boese[20]最早在TSP问题上观察到, 局部最优解与全局最优解之间有约 80%的边重合. 随后, Merz等人[21]在图的划分问题、Reeves[22]在flow-shop调度问题发现了类似的性质. 这一现象习惯上称之为“大坑”猜想(big valley hypothesis). 由于实际运算中全局最优解难以获得, 很多研究人员根据局部最优解与全局最优解之间的关系, 利用局部最优解来模拟全局最优解以获得近似骨架, 再利用近似骨架来指导算法设计[5~11]. 由于“大坑”猜想对于近似骨架及其算法设计的重要意义, 文献[20]成为NP-难解问题研究领域引用率最高的论文之一.

定义 5 对于无向加权图 $G=(V, E, w)$上 GBP 实例 GBP(V, E, w)的局部最优解 $s_1, s_2, \cdots s_k$, 称 $C(s_1)\cap C(s_2)\cap\cdots\cap C(s_k)$为实例 GBP$(V, E, w)$的近似骨架, 记为 $a-\mathrm{bone}(s_1, s_2, \cdots s_k)$.

定义 6 对于无向加权图 $G=(V, E, w)$上 GBP 实例 GBP(V, E, w), 若其有且仅有一个全局最优解, 则称该实例是唯一全局最优解实例.

2 GBP 问题的唯一全局最优解实例构造

首先给出 GBP 问题的顶点 1-连通偏移实例的构造算法, 然后证明顶点 1-连通偏移实例是唯一全局最优解实例.

算法 2 顶点 1-连通偏移实例的构造算法

输入: GBP 实例 GBP(V, E, w)

输出: GBP$(V, \hat{E}, \hat{w})$

Begin

(1) $\hat{E}=E$;

(2) for $i=2$ to n do

 if $(i,1)\notin E$ then $\hat{E}=\hat{E}\cup\{(i,1)\}$, $w_{i1}=0$;

(3) for each $(i, j)\in\hat{E}$ do

$\hat{w}_{ij} = w_{ij} + 1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|}$;

End

算法2的时间复杂度分析如下: 步骤(1)的时间复杂度为 $O(m)$, 步骤(2)的时间复杂度为 $O(n)$, 步骤(3)的时间复杂度为 $O(m+n)$, 故该算法的时间复杂度为 $O(m+n)$. 显然, 给定任意 GBP 实例 GBP(V, E, w), 算法 2 所得实例 $\text{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 是顶点 1-连通实例, 本文将通过算法2 所得的实例称为 $\text{GBP}(V,E,w)$ 的顶点 1-连通偏移实例. 给定 $\text{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 的一个可行解 $s = (V_1, V_2)$, 它的割记为 $\hat{C}(s)=\{(i,j)|i\in V_1, j\in V_2, (i,j)\in\hat{E}\}$. 顶点 1-连通偏移实例实际上也是一种 GBP 实例, 而本文将进一步证明其全局最优解的个数唯一.

引理 1 给定顶点 1-连通实例 $\text{GBP}(V,E,w)$ 的任意两个不同的可行解 $s_1=(V_1^1,V_2^1)$ 和 $s_2=(V_1^2,V_2^2)$, 必有 $C(s_1)\neq C(s_2)$ 成立.

证明 因为 $s_1=(V_1^1,V_2^1)$ 和 $s_2=(V_1^2,V_2^2)$ 是不同的两个解, 故 $V_1^1\neq V_1^2$, 从而存在顶点 i^* 仅属于 V_1^1, V_1^2 中的某一个, 不妨设为 $i^*\in V_1^1$ 且 $i^*\notin V_1^2$ (对于 $i^*\in V_1^2$ 且 $i^*\notin V_1^1$ 的情况, 可以类似证明). 根据本文约定有 $1\in V_1^1$ 且 $1\in V_1^2$. 按照命题假设 GBP(V, E, w)是顶点 1-连通实例可知 $(i^*,1)\in E$, 故有 $(i^*,1)\notin C(s_1)$ 且 $(i^*,1)\in C(s_2)$ 成立, 即 $C(s_1)\neq C(s_2)$. 原命题得证.

定理 1 给定 GBP 实例 GBP(V, E, w), 若 $w_{ij}\in Z$ ($(i,j)\in E$), 则它的顶点 1-连通偏移实例的 GBP(V, $\hat{E},\hat{w}$) 具有唯一全局最优解.

证明 对于 $\text{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 的任意不同的解 $s_1=(V_1^1,V_2^1)$ 和 $s_2=(V_1^2,V_2^2)$, 若能证明 $\hat{w}(s_1)-\hat{w}(s_2)\neq 0$ 始终成立, 则说明原命题成立.

根据定义可知:

$$\hat{w}(s_1)=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}\hat{w}_{ij}=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}(w_{ij}+1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|})$$
$$=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}w_{ij}+\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|},$$
$$\hat{w}(s_2)=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_2)}\hat{w}_{ij}=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_2)}(w_{ij}+1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|})$$
$$=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_2)}w_{ij}+\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_2)}1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|}.$$

记 $\Delta_1=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}w_{ij}$, $\Delta_2=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_2)}w_{ij}$,

$$\delta_1=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|},$$
$$\delta_2=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_2)}1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|},$$

则 $\hat{w}(s_1)-\hat{w}(s_2)=\Delta_1-\Delta_2+\delta_1-\delta_2$. 根据题设 $w_{ij}\in Z$ ($(i,j)\in E$), 故此 $(\Delta_1-\Delta_2)\in Z$. 而 $0<\delta_1=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|}<\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}1/2^{3n}<n^2/2^{3n}<1$, 类似地 $0<\delta_2<1$. 因此, $-1<\delta_1-\delta_2<1$, 只需证明 $\delta_1-\delta_2\neq 0$ 即可说明 $\hat{w}(s_1)-\hat{w}(s_2)\neq 0$.

对于任意的两条边 (k,l) 和 (k',l'), 除非(1) $k=k'$ 且 $l=l'$, 或者(2) $k=l'$ 且 $l=k'$, 否则 $k\times n+l\times n+|k-l|\neq k'\times n+l'\times n+|k'-l'|$. 因此, 当使用二进制表示方法时, $\delta_1=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|}$ 实际上是小数点后的一串二进制数, 它在第 $i\times n+j\times n+|i-j|$ 位 ($\forall(i,j)\in\hat{C}(s_1)$)取值为 1, 而在其他位取 0. 类似地, δ_2 也是小数点后的一串二进制数.

由 $s_1\neq s_2$ 且 $\text{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 是顶点 1-连通实例, 根据引理 1 可知 $\hat{C}(s_1)\neq\hat{C}(s_2)$, 从而存在一条边 (i',j') 仅属于 $\hat{C}(s_1)$, $\hat{C}(s_2)$ 中的一个, 不妨设 $(i',j')\in\hat{C}(s_1)$ 且 $(i',j')\notin\hat{C}(s_2)$ (对于 $(i',j')\in\hat{C}(s_2)$ 且 $(i',j')\notin\hat{C}(s_1)$ 的情况可以类似证明). 在使用二进制表示权值的情况下, δ_1 在小数位的第 $i'\times n+j'\times n+|i'-j'|$ 位为 1, 而 δ_2 该位为 0, 故 $\delta_1-\delta_2\neq 0$, 也即 $\hat{w}(s_1)-\hat{w}(s_2)\neq 0$. 原命题得证.

3 GBP 问题的骨架计算复杂性

通过分析顶点 1-连通偏移 GBP 实例与原 GBP 实例的关系, 证明除非 P = NP, 否则 GBP 问题的完整骨架不可能在多项式时间内获得.

引理 2 给定 GBP 实例 GBP=(V, E, w), 若 $w_{ij}\in Z$ ($(i,j)\in E$), 给定任意两个不同的可行解 $s_1=(V_1^1,V_2^1)$ 和 $s_2=(V_1^2,V_2^2)$, 若 $w(s_1)<w(s_2)$, 则顶点 1-连通偏移 GBP 实例 $\text{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 满足 $\hat{w}(s_1)<\hat{w}(s_2)$ 成立.

证明 对于 GBP 实例 GBP(V, E, w)的任意两个不同的可行解 $s_1=(V_1^1,V_2^1)$ 和 $s_2=(V_1^2,V_2^2)$, 若 $w(s_1)<w(s_2)$, 根据 $w_{ij}\in Z$ ($(i,j)\in E$)可知 $w(s_2)-w(s_1)\geqslant 1$.

而根据顶点 1-连通偏移 GBP 实例的定义可知:

$$0<\hat{w}(s_1)-w(s_1)=\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}1/2^{i\times n+j\times n+|i-j|}$$
$$\leqslant\sum_{(i,j)\in\hat{C}(s_1)}1/2^{3n}\leqslant(n(n-1)/2)(1/2^{3n})<n^2/2^{3n+1}<1.$$

同理可知: $0<\hat{w}(s_2)-w(s_2)<1$. 故有以下等式成立:

$$\hat{w}(s_2)-\hat{w}(s_1)=w(s_2)-w(s_1)+(\hat{w}(s_2)-w(s_2))-(\hat{w}(s_1)-w(s_1))>w(s_2)-w(s_1)-1\geqslant 0.$$

原命题得证.

定理 2 给定 GBP 实例 GBP(V, E, w), 若 $w_{ij}\in Z$

($(i,j)\in E$), 则顶点 1-连通偏移 GBP 实例 $\mathrm{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 的全局最优解也是 GBP(V, E, w)的全局最优解.

证明 首先, $\mathrm{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 的全局最优解也是 GBP(V, E, w)的一个可行解. 下面用反证法证明, 假设实例 $\mathrm{GBP}(V,E,\hat{w})$ 的全局最优解(记为 $s^*=(V_1^*,V_2^*)$)不是 GBP(V, E, w)的全局最优解, 则存在一个解 $s=(V_1,V_2)$, 使得 $w(s)<w(s^*)$ 成立. 那么, 根据引理 2 可知 $\hat{w}(s)<\hat{w}(s^*)$ 成立, 矛盾. 原命题得证.

定理 3 除非 P = NP, 否则不存在多项式时间算法可以获得 GBP 问题的完整骨架.

证明 反证法, 假设存在多项式时间算法(时间复杂度记为 $O(\bullet)$)可以获得 GBP 问题的完整骨架, 下面将构造多项式时间算法获得其全局最优解, 从而说明矛盾的存在.

给定无向加权图GBP(V, E, w)上的任意的GBP实例GBP(V, E, w) (不妨假定 $w_{ij}\in Z$ ($(i,j)\in E$)[1]), 可以如下构造GBP(V, E, w)的算法: (ⅰ) 利用算法 2(顶点 1-连通偏移实例的构造算法)可在 $O(m+n)$ 内得到顶点 1-连通偏移实例 $\mathrm{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$; (ⅱ) 由于 $\mathrm{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 也属于GBP问题, 按照假设, 可以在 $O(\bullet)$ 得到其完整骨架; (ⅲ) 因 $\mathrm{GBP}(V,\hat{E},\hat{w})$ 仅有一个全局最优解(定理 1), 故其骨架就是全局最优解的割, 再由算法 1(割的可行解构造算法)可在 $O(m)$ 内得到可行解, 而根据引理 1 可知, 该可行解就是全局最优解. 因此, 通过步骤(1), (2)和(3)可以在 $O(\bullet)+O(m+n)+O(m)$ 时间内得到原实例的一个全局最优解, 故GBP问题是多项式时间内可解; 而根据计算复杂性理论 [13]可知: 除非P = NP, 否则NP-难解问题不存在多项式时间的完全算法, 矛盾. 故假设不成立, 原命题得证.

4 结论与展望

针对现有获取 GBP 近似骨架方法存在的骨架规模小的缺陷, 本文给出 GBP 的唯一全局最优解实例构造算法, 显著提高了骨架的规模. 同时, 利用该算法从理论上证明了寻找 GBP 问题的完整骨架属于NP-难解问题. 我们准备在下一步的工作中, 利用唯一全局最优解实例构造算法改进已有的基于近似骨架的启发式算法, 并将本文分析骨架计算复杂性的技巧应用于其他 NP-难解问题.

参 考 文 献

1 Slaney J, Walsh T. Backbones in optimization and approximation. In: Bernhard N, ed. Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01), 2001, Aug 04—10, Seattle, Washington. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 254—259

2 Garey M R, Johnson D S. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: W. H. Freeman, 1979. 10—35

3 Monasson R, Zecchina R, Kirkpatrick S, et al. Determining computational complexity for characteristic ‘phase transition’. Nature, 1998, 400(8): 133—137

4 Zhang W X. Phase transition and backbones of the asymmetric traveling salesman problem. J Artif Intell Res, 2004, 21(1): 471—497

5 Schneider J. Searching for backbones-a high-performance parallel algorithm for solving combinatorial optimization problems. Future Gener Comput Syst, 2003, 19(1): 121—131[DOI]

6 邹鹏, 周智, 陈国良, 等. 求解 TSP 问题的多级归约算法. 软件学报, 2003, 14(1): 35—42

7 Zhang W X, Looks M. A novel local search algorithm for the traveling salesman problem that exploit backbones. In: Leslie P K, Alessandro S, eds. Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI05), 2005, July 31—Aug 5, Edinburgh, Scotland, UK. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2005. 343—351

8 Zhang W X. Configuration landscape analysis and backbone guided local search. Part I: Satisifiability and maximum satisfiability. Artif Intell, 2004, 158(1): 1—26[DOI]

9 Dubois O, Seymour P. A backbone-search heuristic for efficient solving of hard 3-SAT formula. In: Bernhard N, ed. Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01), 2001, Aug 04—10, Seattle, Washington. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 248—253

10 Valnir F J. Backbone guided dynamic local search for propositional satisfiability. In: Frederick H, ed. Proceedings of the 9th International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics (AI & Math -06), 2006, Jan 04—06, Florida. New York: Springer, 2006. 100—108

11 Zou P, Zhou Z, Chen G L, et al. Approximate-backbone guided fast ant algorithms to QAP. J Softw, 2005, 16(10): 1691—1698[DOI]

12 Kilby P, Slaney J, Walsh T. The backbone of the traveling salesperson. In: Leslie P K, Alessandro S, eds. Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI05), 2005, July 31—Aug 5, Edinburgh, Scotland, UK. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2005. 175—181

13 Sahni S, Gonzalez T. P-complete approximation problems. J ACM, 1976, 23(3): 555—565

14 Soper A J, Walshaw C, Cross M. A combined evolutionary search and multilevel optimization approach to graph-partitioning. J Glob Optim, 2004, 29: 225—241[DOI]

1) 如果存在边的权值为小数的情况, 可以将所有的边的权值放大相同倍数, 得到新的权值 w'_{ij} 均为整数, 此时新实例 GBP(V, E, w')的解与原实例 GBP(V, E, w)相同

15 Kernighan B W, Lin S. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. Bell Syst Tech J, 1970, 49(2): 291—297
16 Hoffman A G. The dynamic locking heuristic—a new graph partitioning algorithm. In: Toumazou C, Battersby N, Porta S, eds. Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1994, May 30—June 2, London, England. New York: IEEE Computer Society Press, 1994. 173—176
17 Gil C, Ortega J, Montoya M G, et al. A mixed heuristic for circuit partitioning. Comput Optim Appl, 2002, 23(2): 321—340[DOI]
18 Banos R, Gil C, Ortega J, et al. A parallel evolutionary algorithm for circuit partitioning. In: Clematis A, ed. Proceedings of the 11th Euromicro Workshop on Parallel and Distributed Processing, 2003, Feb 05—07, Genova, Italy. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2003. 365—371
19 Zou P, Zhou Z, Wan Y Y, et al. New meta-heuristic for combinatorial optimization problems: Intersection based scaling. J Comput Sci Tech, 2004, 19(6): 740—751
20 Boese K D. Cost Versus Distance in the Traveling Salesman Problem. Technical Report CSD-950018, UCLA Computer Science Department, 1995
21 Merz P, Freisleben B. Fitness landscapes, memetic algorithms and greedy operators for graph bi-partitioning. Evolut Comput, 2000, 8(1): 61—91[DOI]
22 Reeves C R. Landscapes, operators and heuristic search. Ann Oper Res, 1999, 86(1): 473—490[DOI]