具有半刚性节点性质的平面刚架弹簧单元的研究

蒋玉川 1) 徐双武 2) 李章政 应志君

(四川大学建筑与环境学院，成都 610065)

摘要 联合应用力法与逐段刚化法推导出具有半刚性节点性质的弹簧节点梁单元和平面刚架弹簧单元的单元刚度方程. 该方法具有物理概念清楚，推导过程简便、巧妙的特点. 本文所建立的弹簧节点梁单元和平面刚架弹簧单元可以应用在具有半刚性节点性质的工程结构的承载力分析与计算中.

关键词 力法，逐段刚化法，半刚性节点，平面刚架，弹簧单元

中图分类号：TU351 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-0879(2012)04-031-04

DOI：10.6052/1000-0879-11-331

STUDY OF PLANE FRAME OF SPRING ELEMENT WITH PROPERTY OF SEMI-RIGID JOINT

JIANG Yuchuan1) XU Shuangwu2) LI Zhangzheng YING Zhijun

(School of Architecture and Environment, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract We deducted the stiffness equation of the beam element with spring joint and the plane frame of spring element with property of semi-rigid joint by using force method and the method of gradual rigidization. The method has the characterics of clear physical concept, simplicity of deduction processes. The beam element with spring joint and the plane frame of spring element were employed to calculating and analyzing bearing capacity in engineering structures with semi-rigid joints.

Key words force method, method of gradual rigidization, semi-rigid joint, plane frame, spring element

工程实际中有很多结构构件的节点具有半刚性节点的性质，比如钢管脚手架、高压电线塔、钢结构的某些梁柱连接点以及卫星发射架等. 如果将此类结构按照刚框架处理，则势必造成很大的安全隐患，而按照桁架处理则偏保守. 研究具有半刚性节点性质的弹簧单元具有重要的理论意义和工程应用价值. 目前用得较多的是以实验为基础测得节点在转角方向的刚度来修正一般刚架单元的刚度矩阵 [1]，也有按位移法来建立弹簧单元的刚度方程 [2]，但其推导过程不详. 本文首先应用力法来推导弹簧节点梁单元的单元柔度方程，在求柔度系数时采用了逐段刚化法 [3] 求位移的思想，使柔度系数的求解得以简化，然后利用刚度矩阵与柔度矩阵互为逆矩阵的性质，推导出了弹簧节点梁单元和平面刚架弹簧单元的单元刚度方程. 该方法物理概念清楚，方法简便、巧妙，为建立更为复杂的弹簧单元的单元刚度方程提供了思路.

1 用力法并结合逐段刚化法推导弹簧节点梁单元的单元刚度方程

如图 1 所示为两端节点处装有转角弹簧的弹簧节点梁单元，弹簧的转角刚度为 k，杆件的抗弯刚度为 EI，弹簧节点梁单元在杆端弯矩 $M_{ij} = X_i$ 和 $M_{ji} = X_j$ 作用下发生的转角为 θ_i 和 θ_j，根据力法列出柔度方程如式 (1) 所示

2011–10–19 收到第 1 稿，2012–01–04 收到修改稿.

1) 蒋玉川，男，1963 年生，教授，博士. 研究方向为结构力学及结构工程. E-mail：ycj01@tom.com

2) 徐双武，男，1968 年生，讲师，国家一级注册结构工程师. 研究方向为结构工程. E-mail：shuangwu@vip.136sc.com

$$\left.\begin{aligned}\delta_{ii}X_i+\delta_{ij}X_j=\theta_i\\ \delta_{ji}X_i+\delta_{jj}X_j=\theta_j\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

或将式 (1) 记为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\delta_{ii} & \delta_{ij}\\ \delta_{ji} & \delta_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_i\\ X_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_i\\ \theta_j\end{Bmatrix}\tag{2}$$

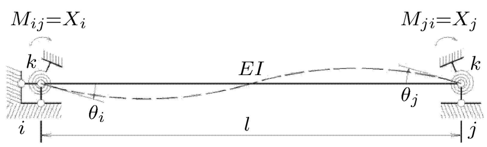
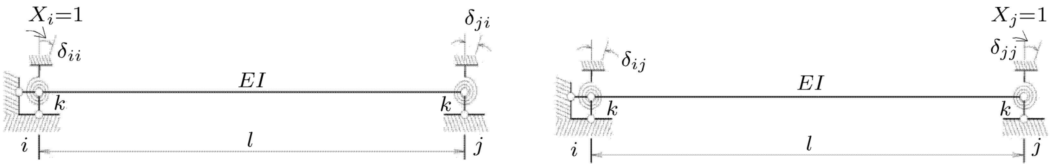


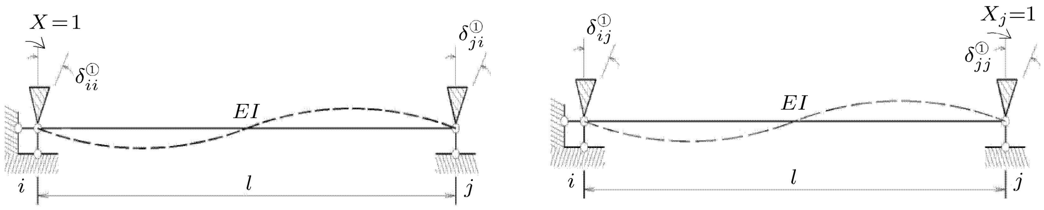
图 1 弹簧节点梁单元

根据逐段刚化法求位移的思路，将图 2(a) 中求柔度系数 δ_{ii} 和 δ_{ji} 的问题转化为图 3(a)(两端刚接，中间杆件刚度为有限值) 与图 3(b)(两端刚度为有限值，中间杆件刚度无限大) 求柔度的叠加.

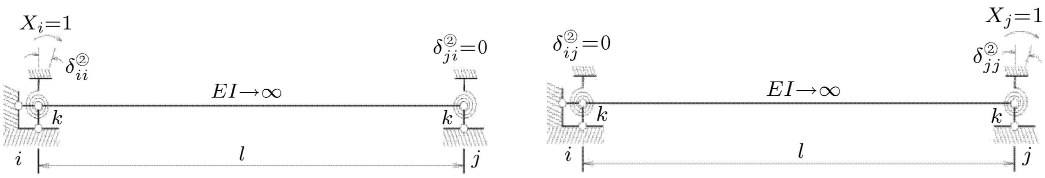


(a) (b)

图 2 求柔度系数



(a) 梁变形 (c) 梁变形



(b) 弹簧变形 (d) 弹簧变形

图 3 逐段刚化法求柔度系数

同理，柔度系数 δ_{jj}, δ_{ij} (图 2(b)) 可以视为图 3(c) 与图 3(d) 柔度系数的叠加. 根据文献 [4] 中的推导，可以得到

$$\delta_{ii}^{(1)}=\delta_{jj}^{(1)}=\frac{l}{3EI},\quad \delta_{ij}^{(1)}=\delta_{ji}^{(1)}=-\frac{l}{6EI}$$

$$\delta_{ii}^{(2)}=\delta_{jj}^{(2)}=\frac{1}{k},\quad \delta_{ij}^{(2)}=\delta_{ji}^{(2)}=0$$

叠加可得柔度系数为

$$\delta_{ii}=\delta_{jj}=\delta_{ii}^{(1)}+\delta_{ii}^{(2)}=\frac{l}{3EI}+\frac{1}{k}$$

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}=\delta_{ij}^{(1)}+\delta_{ij}^{(2)}=-\frac{l}{6EI}$$

将柔度方程 (2) 两边乘以其逆矩阵 $\boldsymbol{\delta}^{-1}$ 可得

$$\begin{Bmatrix}X_i\\ X_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{ii} & \delta_{ij}\\ \delta_{ji} & \delta_{jj}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\theta_i\\ \theta_j\end{Bmatrix}\tag{3}$$

且注意到 $\boldsymbol{\delta}^{-1}=\boldsymbol{K}$，则式 (3) 可表示为

$$\begin{Bmatrix}X_i\\ X_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{ii} & k_{ij}\\ k_{ji} & k_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_i\\ \theta_j\end{Bmatrix}\tag{4}$$

式 (4) 即是弹簧节点梁单元的单元刚度方程.

下面来求刚度系数矩阵，即弹簧节点梁单元的单元刚度矩阵，有

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{\delta}|}[\boldsymbol{\delta}^*]^{\mathrm{T}} \qquad (5)$$

其中，$|\boldsymbol{\delta}|$ 为柔度矩阵行列式的值，$[\boldsymbol{\delta}^*]^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\delta}$ 矩阵的代数余子式的转置矩阵，即

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ji}\delta_{ij}|} \begin{bmatrix} \delta_{jj} & -\delta_{ji} \\ -\delta_{ji} & \delta_{ii} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

其中

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{2EI}{l} \frac{1}{\left[1 + 8\dfrac{EI}{lk} + 12\left(\dfrac{EI}{lk}\right)^2\right]}$$

$$k_{ii} = k_{jj} = \frac{4EI}{l} \frac{\left(1 + 3\dfrac{EI}{lk}\right)}{\left[1 + 8\dfrac{EI}{lk} + 12\left(\dfrac{EI}{lk}\right)^2\right]}$$

讨论: 当弹簧刚度 $k \to \infty$ 时，刚度系数 $k_{ii} = k_{jj} = \dfrac{4EI}{l}$，$k_{ij} = k_{ji} = \dfrac{2EI}{l}$，节点退化为刚节点；当弹簧刚度 $k \to 0$ 时，使用洛比达法则 $k_{ii} = k_{jj} = 0$，$k_{ij} = k_{ji} = 0$，节点退化为铰节点；当弹簧刚度 k 为有限值时，方程 (4) 为具有半刚性性质的弹簧节点梁单元的单元刚度方程.

2 平面刚架弹簧单元的单元刚度矩阵

图 4 所示为忽略轴向变形的平面刚架弹簧单元，弹簧的转角刚度为 k，杆件的抗弯刚度为 EI，弹簧单元在杆端弯矩 $M_{12} = X_1$ 和 $M_{21} = X_2$ 作用下发生的转角为 θ_1 和 θ_2，加入轴向变形后，其单元刚度矩阵可以如式 (7) 表示

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{X}_1 \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & 0 & 0 & -\dfrac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ -\dfrac{EA}{l} & 0 & 0 & \dfrac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}^{\mathrm{e}} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{e}} \qquad (7)$$

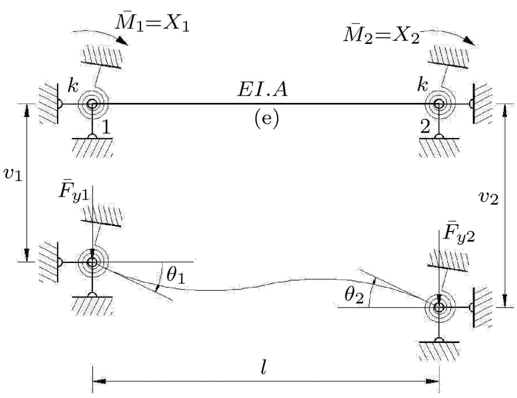


图 4 平面刚架弹簧单元 (忽略轴向变形)

根据力法列出柔度方程为

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1C} = \theta_1 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2C} = \theta_2 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

式中

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{3EI} + \frac{1}{k}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l}{6EI}$$

$$\Delta_{1C} = \Delta_{2C} = \frac{v_2 - v_1}{l}$$

对方程 (8) 进行求解, 可以得到 X_1 及 X_2 的表达式如下所示

$$\left.\begin{aligned} X_1 = &\frac{1}{l\left(\dfrac{1}{2}Z + K\right)}\bar{v}_1 + \frac{(Z+K)}{\left(\dfrac{3}{2}Z + K\right)\left(\dfrac{1}{2}Z + K\right)}\bar{\theta}_1 - \\ &\frac{1}{l\left(\dfrac{1}{2}Z + K\right)}\bar{v}_2 + \frac{z}{(3Z+K)(Z+K)}\bar{\theta}_2 \\ X_2 = &\frac{1}{l\left(\dfrac{1}{2}Z + K\right)}\bar{v}_1 + \frac{Z}{(3Z+K)(Z+K)}\bar{\theta}_1 - \\ &\frac{1}{l\left(\dfrac{1}{2}Z + K\right)}\bar{v}_2 + \frac{(Z+K)}{\left(\dfrac{3}{2}Z + K\right)\left(\dfrac{1}{2}Z + K\right)}\bar{\theta}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

式中, $Z = \dfrac{1}{3EI}$，$K = \dfrac{1}{k}$，将其与式 (7) 对比，可得相应刚度系数 k_{32}, k_{33}, k_{35}, k_{36} 以及 k_{62}, k_{63}, k_{65}, k_{66}.

再求杆端剪力 $\bar{F}_{y1}$, $\bar{F}_{y2}$，如图 4 所示，其表达式

为

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}_{y1}=\frac{1}{l}(X_1+X_2)=k_{22}\bar{v}_1+k_{23}\bar{\theta}_1+\\ k_{25}\bar{v}_2+k_{26}\theta_2\\ \bar{F}_{y2}=-\frac{1}{l}(X_1+X_2)=k_{52}\bar{v}_1+k_{53}\bar{\theta}_1+\\ k_{55}\bar{v}_2+k_{56}\theta_2\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

将式 (9) 的结果代入式 (10) 中，可以得到 $\bar{F}_{y1}$ 及 $\bar{F}_{y2}$ 的结果如下

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}_{y1}=\frac{4}{l^2(Z+2K)}\bar{v}_1+\frac{2l}{l^2(Z+2K)}\bar{\theta}_1-\\ \frac{4}{l^2(Z+2K)}\bar{v}_2+\frac{2l}{l^2(Z+2K)}\bar{\theta}_2\\ \bar{F}_{y2}=-\frac{4}{l^2(Z+2K)}\bar{v}_1-\frac{2l}{l^2(Z+2K)}\bar{\theta}_1+\\ \frac{4}{l^2(Z+2K)}\bar{v}_2-\frac{2l}{l^2(Z+2K)}\bar{\theta}_2\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

对比式 (10) 和式 (11) 可得相应的刚度系数 $k_{22},k_{23},k_{25},k_{26}$, 及 $k_{52},k_{53},k_{55},k_{56}$.

将各刚度系数 k 值代入式 (7)，可得平面刚架弹簧单元单元刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\ 0&\frac{4}{l^2\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&0&-\frac{4}{l^2\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}\\ 0&\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&\frac{4\left(\frac{l}{3EI}+\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{l}{EI}+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&0&-\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&\frac{\frac{2l}{3EI}}{\left(\frac{l}{EI}+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}\\ -\frac{EA}{l}&0&0&\frac{EA}{l}&0&0\\ 0&-\frac{4}{l^2\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&-\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&0&\frac{4}{l^2\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&-\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}\\ 0&\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&\frac{\frac{2l}{3EI}}{\left(\frac{l}{EI}+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&0&-\frac{2}{l\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}&\frac{4\left(\frac{l}{3EI}+\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{l}{EI}+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{l}{3EI}+\frac{2}{k}\right)}\end{bmatrix}\quad(12)$$

讨论：(1) $k\to 0$ 时，式 (12) 退化为

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ -\frac{EA}{l}&0&0&\frac{EA}{l}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad(13)$$

为两端铰接的平面桁架单元刚度矩阵.

(2) $k\to\infty$ 时，式 (12) 退化为

$$\boldsymbol{K}'^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\ 0&\frac{12EI}{l^3}&\frac{6EI}{l^2}&0&-\frac{12EI}{l^3}&\frac{6EI}{l^2}\\ 0&\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{2EI}{l}\\ -\frac{EA}{l}&0&0&\frac{EA}{l}&0&0\\ 0&-\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}&0&\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}\\ 0&\frac{6EI}{l^2}&\frac{2EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}\end{bmatrix}\quad(14)$$

为一般刚架梁单元的单元刚度矩阵.

(下转第 30 页)

参 考 文 献

1 Menon C, Busolo S, Cocuzza S, et al. Issues and new solutions for testing free-flying robots. IAC- 04-IAF-1.J, 2004 (5): 1-11

2 Xu WF, Liang B. A ground experiment system of free-floating robot for capturing space target. *J Intell Robot Syst*, 2007 (48): 187-208

3 Pascal M. Some open problems in dynamic analysis of flexible multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 2001, 5: 315-334

4 Saha SK. Recursive dynamics algorithms for serial, parallel, and closed-chain multibody systems. Indo-US Workshop on Protein Kinematics & Protein Conformations, IISc, Bangalore, 2007: 1-34

5 Carrera E, Serna MA. Inverse dynamics of flexible robots. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1996, (41): 485-508

6 Stepanenko Y, Vukobratovic M. Dynamics of articulated open-chain active mechanisms. *Mathematical Biosciences*, 1976, 28 (1-2): 137-170

7 Luh JYS, Walker MW, Paul RPC. On-Line computational scheme for mechanical manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1980, 102(2): 69-76

8 Saha SK, Schiehlen WO. Recursive kinematics and dynamics for closed loop multibody systems. *Int J of Mechanics of Structures and Machines*, 2001, 29(2): 143-175

9 Anderson KS, Critchley JH. Improved order-n performance algorithm for the simulation of constrained multi-rigid-body dynamic systems. *Multibody System Dynamics*, 2003, 9(2): 185-212

10 Jain A，Rodriguez G. A spatial operator algebra for computation multibody dynamics. In：International Conference on Scientific Com putation and Differential Equations，Grado, Italy, 1997

11 吴洪涛, 熊有伦. 机械工程中的多体系统动力学问题. 中国机械工程，2000，11(6)：608-611 (Wu Hongtao, Xiong Youlun. The problem of multi-body systems dynamics in mechanical engineering. *China Mechanical Engineering*, 2000，11(6)：608-611 (in Chinese))

12 熊启家. 基于空间算子代数理论的链式多体系统递推动力学研究. [博士论文]. 南京：南京航空航天大学，2003 (Xiong Qijia. The recursive dynamics research of chained form multibody system based on the theory of spatial operator algebra. [PhD Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2003 (in Chinese))

13 方喜峰，吴洪涛，刘云平等. 基于空间算子代数理论计算多体系统动力学建模. 机械工程学报，2008, 39(1)：66-72 (Fang Xifeng, Wu Hongtao, Liu Yunping, et al. Computational dynamics of multi-body system modeling based on spatial operator algebra theory. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 39(1)：66-72 (in Chinese))

14 田富洋，吴洪涛，赵大旭等. 柔性多体系统混合递推动力学建模及实时仿真研究. 中国机械工程，2010, 21(1)：6-12 (Tian Fuyang, Wu Hongtao, Zhao Daxu, et al. Hybrid dynamics of flexible multibody system and real time simulation. *China Mechanical Engineering*, 2010, 21(1)：6-12 (in Chinese))

15 何广平，陆震，王凤翔. 欠驱动柔性机器人动力学耦合奇异研究. 航空学报，2005, 26(2)：240-245 (He Guangping, Lu Zhen, Wang Fengxiang. Study on dynamic coupling singularity of underactuated manipulators. *Acta Aeronautica et Astronautica SInica*, 2005, 26(2)：240-245 (in Chinese))

16 陈炜，余跃庆，张绪平等. 欠驱动柔性机器人动力学建模与耦合特性. 机械工程学报，2006, 42(6)：16-23 (Chen Wei, Yu Yueqing, Zhang Xuping, et al. Dynamic modeling and coupling of underactuated flexible robot. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(6)：16-23 (in Chinese))

17 翟婉明. 车辆－轨道耦合动力学 (第 3 版). 北京：科学出版社, 2007

18 Jain A, Rodriguez G. Recursive flexible multibody system dynamics using spatial operators. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1992, (15): 1453-1466

19 田富洋, 吴洪涛, 赵大旭等. 空间柔性机器人动力学分析的快速积分算法. 山东大学学报 (工学版)，2009, 39(6): 94-98 (Tian Fuyang, Wu Hongtao, Zhao Daxu, et al. Fast integration algorithms for dynamics of a flexible space robots system. *Journal of Shandong University* (*Engineering Science*), 2009, 39(6): 94-98 (in Chinese))

(责任编辑：胡 漫)

(上接第 34 页)

3 结 论

本文采用力法并结合使用逐段刚度法来建立弹簧节点梁单元的单元刚度方程. 该方法本质上为力法方程，在求柔度系数时使用了逐段刚化法求位移的思想，使柔度系数的计算得以简化. 然后利用刚度矩阵与柔度矩阵互为逆矩阵的性质，推导出了弹簧节点梁单元的单元刚度方程，所得到的结果与文献 [2] 中用刚度法建立的单元刚度方程完全一致. 进一步还建立了平面刚架弹簧单元的单元刚度矩阵. 本文的方法概念清楚、简便、巧妙，现正将该结果应用于扣件式钢管脚手架的稳定承载力研究之中.

参 考 文 献

1 袁雪霞, 金伟良. 扣件式钢管支模架稳定承载能力研究. 土木工程学报，2006，39 (5)：43-50 (Yuan Xuexia, Jin Weiliang. A study on the stability bearing capacity of fastener-style tubular steel formwork-supports. *China Civil Engineering Journal*, 2006，39 (5)：43-50 (in Chinese))

2 敖鸿斐, 李国强. 双排扣件式钢管脚手架的极限稳定承载力研究. 力学季刊，2004, 25(2): 213-218 (Ao Youfei, Li Guoqiang. Investigation of overall load-bearing stability capacity of tube-and-couple scaffolds. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2004, 25(2): 213-218 (in Chinese))

3 龚志钰, 李章政. 材料力学. 北京：科学出版社，1999

4 龙驭球, 包世华. 结构力学 I—— 基本教程. 北京：高等教育出版社，2006

(责任编辑：胡 漫)