

纸拱桥结构模型优化建模分析¹⁾

—— 大学生结构设计竞赛谈

舒小娟²⁾ 黄柱 周旭光

(湖南科技大学土木学院, 湖南湘潭 411201)

摘要 以大学生结构设计竞赛为背景, 以纸拱桥结构模型为分析实例, 引导大学生讨论如何运用数学规划思想来进行结构优化分析, 培养大学生的学习主动性和创造性. 通过对拟定的结构竞赛规则下的结构进行受力定性分析, 建立了纸拱结构寻优的数学规划模型, 以拱桥质量最轻为目标函数, 结构在特定荷载作用和材料特性条件下, 满足材料强度极限值和稳定性要求作为约束条件, 分析求解纸拱结构模型的拱轴线, 截面形状与尺寸相关的等决策变量的最优解. 求解得到了拱轴线函数的解析解特例, 并采用简单迭代运算求解了拱截面尺寸的最优解.

关键词 结构优化设计, 数学规划, 纸拱结构, 约束条件, 最优解

中图分类号: O342 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2012)04-089-04

DOI: 10.6052/1000-0879-11-278

引言

结构设计竞赛是一项针对在校大学生的集挑战性、创造性、趣味性于一体的科技竞赛活动, 旨在通过对力学原理、结构设计方法、实验技术等知识的综合应用, 培养大学生的创新思维、团队协作精神、创新设计和动手实践的能力等综合素质. 近些年来, 国内在校大学生结构设计竞赛有多种层次的组织形式, 如教育部、土木工程学会联合主办, 高校轮流承办的全国大学生结构设计竞赛, 是教育部确定的全国九大大学生学科竞赛之一; 华南理工大学主办、地方高校轮流承办的中南地区大学生结构设计竞赛; 湖南省教育厅和建设厅主办, 湖南高校承办的湖南省大学生结构设计竞赛^[1-4]. 自这些竞赛开展以来, 提高了各高校土木类大学生的学习和创作热情, 成为近年来各高校学子参与热情最高的专业竞赛之一.

每年参赛作品的结构构型多种多样, 从获奖作品分析, 能取得优异成绩的作品, 均能做到对材料性能把握准确、结构选型布局合理、受力分析细致周到, 但少有作品能体现真正意义上的优化设计理念.

结构设计竞赛所设计的模型虽小, 但却同实际结构一样五脏俱全. 建立优化设计的理念, 尝试采用数学规划的思想

构建结构优化模型^[6-7], 对于培养大学生的学习主动性和创造性具有切实的现实意义. 本文试以一纸拱桥结构模型为分析实例, 讨论如何运用数学规划思想, 在假设的比赛限制条件下, 进行结构优化分析的原理、步骤与计算方法. 在介绍中, 注重将优化设计与本科阶段学生所学的力学和数学知识结合起来. 期望这些讨论对参加建模比赛的同学能有一些启迪和借鉴.

1 结构设计竞赛规则

统计多次竞赛, 采用最多的评分规则是结构所受荷载与结构模型质量之比. 现参照《中南地区第二届大学生结构设计竞赛细则》, 对荷载形式略做改动, 虚拟结构设计竞赛规则.

1.1 设计结构要求

要求设计的结构总长度不超过 1000 mm, 横向宽度不超过 240 mm, 总高度不超过 25 cm. 结构支承条件为简支条件, 提供两条横向长 300 mm, 宽 30 mm 的条形固定支承带, 可提供竖向支承, 不提供水平支承. 支承中心距离结构计算跨度 900 mm. 承受均布荷载, 总重 40 kg. 采用 10 个软质沙袋布载. 每个沙袋 4 kg, 宽 160 mm, 长 900 mm, 缓慢垒叠加载. 要求结构提供宽度不小于 200 mm, 高度不小于 160 mm 的加载桥面空间. 比赛对结构所设计的形式不限, 评分规则: 加满荷载, 结构整体及主要构件无破坏的前提下, 质量轻的胜出.

1.2 设计材料及制作工具

历次竞赛结构常用的材料有纸、棉线或蜡线、木条或竹条、胶水等. 本次设计参照这些竞赛, 设定下列比赛用的材料: 巴西白卡纸, 蜡线, 白乳胶. 提供的制作模型的工具: 绘图板, 美工刀, 剪刀, 铅笔, 直尺, 三角板, 刷子, 铁钉等.

1.3 材料物理力学性能

白卡纸具有较强的抗拉、压强度和刚度. 参考近年各院校的数据^[2-3], 0.3 mm 厚的巴西白卡纸的相关力学性能参数见表 1.

因受胶水性能等因素影响, 不同层数白卡纸的力学性能有所不同^[2]. 建议实际做模型, 最好先做一些初步设计形状的杆件进行拉压测试, 确定其材料参数.

2011-01-16 收到第 1 稿, 2012-06-07 收到修改稿.

1) 湖南省大学生研究性学习和创新性实验计划资助项目 (KDCX0903).

2) 舒小娟, 1975 年生, 女, 博士生, 副教授, 长期从事桥梁结构教学及组合结构、箱梁结构特性研究工作. E-mail: yanzhiyao@yahoo.cn

表 1 白卡纸的力学性能参数

厚度/ mm	极限拉应力/ MPa	极限压应力/ MPa	弹性模量/ MPa
0.3	22.2	7.0	1450

1.4 蜡线材料性能

蜡线的特点是抗拉强度高、但弹性较大、对变形有要求的结构,用铅发丝线作受拉构件的效果没有窄纸条好.有些文献提出采用预拉的方法来减小蜡线变形,但实践表明效果不理想.因此建议对于主受力的受拉结构,如系杆,为避免主结构出现大变形,采用纸带受拉.而对于不会影响主结构受力的次结构,如吊杆,变形要求较宽松,可采用蜡线材料.文献 [2] 的蜡线材料参数见表 2.

表 2 蜡线极限拉力

根数	1	2	3	4
极限力/N	48	110	168	207

2 结构优化的思路与数学建模

2.1 结构选型

结构优化一般分为 3 个层次 [4]: (1) 尺寸优化; (2) 形状优化; (3) 拓扑优化. 按设计竞赛规则, 不限定结构形式, 寻求最优结构属于拓扑优化问题, 存在无穷多潜在的拓扑. 在尺寸和形状优化中, 可以把杆件的横截面面积、节点坐标或板壳的厚度作为设计变量, 采用常规的迭代方法如数学规划方法求解. 这里, 我们限于在前 2 个层次上讨论结构优化问题. 在进行定性力学分析的基础上, 并结合一些模型制作经验, 对特定的桥型, 用数学规划方法求解最优结构.

现在先借助一般的力学原理, 讨论结构选型问题. 按设计结构的特点, 符合桥梁结构的特征. 现代桥型有梁桥、拱桥、桁架桥、斜拉桥、吊桥等. 但斜拉桥需要桥塔两边对称受力, 不适用于单跨结构、吊桥需要锚碇提供水平反力, 也不适用于此. 梁式桥以受弯为主, 而受弯不能充分发挥材料强度, 重量会较大. 因为需要构造桥面, 桁架桥也不适宜. 综合分析, 认为采用带系杆的拱结构型比较合理. 拱结构以受压为主, 可以较充分地发挥材料的强度潜力.

选型定为下承式系杆拱结构. 这样, 本例结构理论优化设计问题便可表述为寻求特定工况作用下最轻结构的数学寻优问题. 结构的重量由主拱圈、系杆、吊杆、横梁、横撑构成. 受拉的系杆和吊杆受力明确, 容易确定, 且重量占很小比例. 下面主要以主拱圈优化来阐述结构优化的数学规划思想和求解方法.

2.2 主拱圈结构优化的数学规划表述

如图 1 所示的拱, 计算跨径为 l , 矢高为 f . 因拱自身重量与外载相比很轻, 故可视为承受均布荷载, 用 q 表示、纸材弹性模量为 E , 材料极限强度即最大容许应力为 $[\sigma]$. 拱圈截面采用双轴对称截面, 面积 $A(x)$, 抗弯抵抗矩为 $W(x)$. 又设拱轴线方程为 $y(x)$. 以上材料参数是已知的, 跨径已知. 由拱的受力特性, 矢高大的轴力相对小, 故采用尽可能大的

矢高. 为了方便分析, 建筑限高用 f_0 表示, 拱顶的截面高度设为 D , 则矢高为 $f = f_0 - D/2$. 为了简化分析, 根据拱的经验设计值先给定一个合理的 D 值. 现在用数学规划思想来表述寻求满足竞赛规则的最优拱结构, 它具有结构最轻的特点. 那么, 其数学规划式为 [6]

$$\left. \begin{aligned} & \text{find } y(x), A(x), W(x) \\ & \min G = \int_0^l A(x)(1 + y'^2(x))^{\frac{1}{2}} dx \\ & \text{s.t. } 0 \leq \sigma(y(x), A(x), W(x)) \leq [\sigma] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, G 表示结构的体积, 与质量最小等效. 为了能尽量使拱截面应力均匀, 要求设计的拱结构任意截面上均只有压应力, 并假定压应力为正. 上式实际上就是结构优化的满应力准则法 [5].

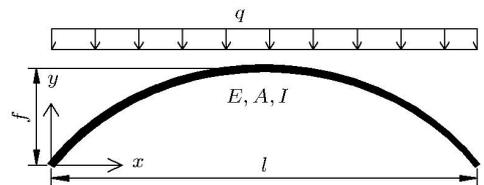


图 1 抛物线形拱

上式的求解是十分困难的, 为了减少需要决策的变量或自变函数, 使数学规划的求解变得简单些, 我们要运用力学原理来进一步简化. 下面来分析拱的受力, 以求合理的拱轴线和约束集函数 σ 的表达式. 如图 2 选取一隔离体进行分析, 由平衡原理有

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= H_0 \\ V(x) &= V_0 - qx = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \\ M(x) &= V_0x - H_0y(x) - \frac{qx^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

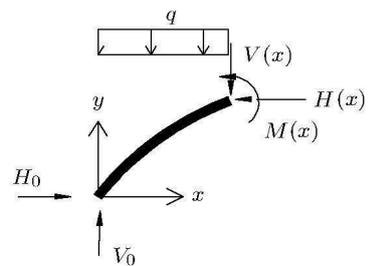


图 2 隔离体受力

如果要截面在破坏时材料充分利用, 最理想的状态当然是全截面均匀受压, 拱圈截面仅受轴力, 没有弯矩. 即 $M(x) = 0$, 由此解得

$$y = -\frac{4f}{l^2}(x^2 - lx) \quad (3)$$

是一条二次抛物线, 这就是结构力学和桥梁工程知识点: 二次抛物线拱在均布荷载作用下, 拱轴线与压力线重合 [7]. 如此, 自变函数 $y(x)$ 也不再是决策变量. 既然拱只受轴力, 不受弯矩, 则其应力只与 $A(x)$ 有关, 与 $W(x)$ 无关. 任意截面的应力计算式为

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{(V^2(x) + H^2(x))^{\frac{1}{2}}}{A(x)} = \frac{ql}{A(x)} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{l}{8f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

这样, 此结构优化问题实际上便简化为第一个层次的截面尺寸优化问题. 将式 (3) 求导、式 (4) 代入到式 (1) 中, 就得到显式的数学优化式, 式中, 只有 $A(x)$ 是决策变量 (自变函数).

2.3 决策变量 (拱圈面积函数) 的求解

本例的求解较为特殊. 分析目标函数的特点, 它是一个积分形式, 其被积函数由两个均大于 0 的函数相乘构成, 不难理解, 两个越小的数相乘得到的积分值越小. 那么, 后面一部分表示弧长, 决定于已知的 $y(x)$ 函数, 故应将面积尽量取到最小. 截面所能取到的最小面积实际上由应力约束条件决定, 即当 $\sigma(x) = [\sigma]$ 时, $A(x)$ 取到最小. 将此条件代入式 (4), 解得

$$A(x) = \frac{ql}{[\sigma]} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{l}{8f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

这里得到的是一个解析解. 这种应力约束下的最小重量结构经常被称为 Michell 结构 [5]. 但是在实际工程中, 能够得到解析解的这种结构并不多, 而且它仅限于单工况. 考虑实际施工上的困难, 上述最优拱结构实际上是不可能实现的. 首先曲杆的制作难, 要使杆件面积按函数关系渐次变化亦难实现. 此外, 真实荷载作用到拱上不会是均布荷载, 因为荷载要通过吊杆传递到拱上, 而吊杆不连续, 因而拱结构实际上会做成折杆结构, 每根杆件沿长形状面积相等. 这样, 在特定的若干等间距吊杆布置下, 结构优化的决策变量变成了各节点 y 坐标与各杆件面积.

显然, 当节点数趋于无穷时, 优化决策解就等于式 (3) 和式 (5) 的解, 那么, 在一定数量的节点下, 节点位置优化结果可在式 (3) 线的上下一定空间内寻求到一个近似优化解. 可以在抛物线上选择一系列点作为初值, 然后设定一定的寻优路径, 采用数值迭代的方法求解. 直接采用抛物线计算的节点坐标, 也是一个近优解. 杆件面积亦然.

结合制作难度与时间考虑, 将结构设计为双臂平行拱结构, 拱脚和拱顶附近采用横撑联系成为整体. 每肋按水平 10 等段划分, 全桥共 18 根吊杆和 9 根吊杆横梁. 结构布局如图 3 所示. 初拟拱截面限高 h (20 mm), 将已知参量代入式 (5) 计算得各折杆的最小面积, 拱顶的杆件面积等于 13.39 mm^2 , 拱脚的杆件面积等于 19.58 mm^2 .

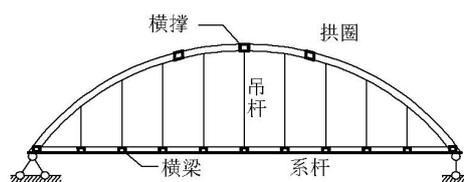


图 3 结构立面图

2.4 主拱圈截面尺寸优化

从稳定性出发, 在面积确定的情况下, 截面惯性矩越大则稳定性越好. 在各个方向都能得到较大的惯性矩的截面是圆管形截面. 考虑到平面外的稳定性可以采用横撑来加强, 又可设计成矩形箱截面, 高度方向大于等于宽度方向, 保证纵向稳定性要求. 壁厚的大小则要从箱室的局部稳定性考虑, 限定在一个合理的范围内.

综上所述, 在已知初拟的拱截面限高 h (20 mm), 单层纸厚 0.3 mm 情况下, 拱的截面优化问题的数学规划可以这样描述: 求截面宽 b , 上下边纸层数 n_1 , 左右边纸层数 n_2 的最优解, 目标为使拱圈截面积 A 尽可能小, 同时满足这样一些约束条件: 截面积不小于按式 (5) 计算结果 A_0 , 拱肋纵向稳定性大于等于要求的强度承载力, 箱室满足局部稳定性壁厚要求. 表达为数学规划模型如下

$$\begin{aligned} & \text{find } b, n_1, n_2 \\ & \text{min } A(b, n_1, n_2) \\ & \text{s.t. } \left\{ \begin{array}{l} A \geq A_0, b \leq 20 \\ \frac{\pi^2 EI}{l_0^2 A_0 [\sigma]} \geq 1 \\ \frac{h - 0.6n_2}{0.3n_1} \leq 35 \\ \frac{b - 0.6n_1}{0.3n_2} \leq 35 \end{array} \right. \quad (6) \end{aligned}$$

式中, E 为纸的弹性模量, I 为截面抗弯惯性矩. A 和 I 均容易写成决策变量的显式表达式. l_0 拱肋计算长度, 这里应按两铰拱取用等于 0.54 倍拱肋长度. 约束条件中的第 3, 4 点, 参照钢结构设计规范箱室受压时的局部承压条件 [8], 略做提高. $b \leq 20 \text{ mm}$ 是为桥面净宽限制要求的可能最大值,

本例的求解也较为简单, 可以采用试算法. 宽度 b 先取 20 mm, 然后根据局部稳定条件, 可行区间应为 2 层以上, 分别递增层数进行试算, 找出最优的解答.

需要指出, 如果按式 (6) 优化的计算面积比按式 (5) 计算小了很多, 则表明原来设定的拱肋高度偏小不合理, 结构并非最优解. 那么, 按一定步骤回到式 (1) 的优化分析, 再到式 (6) 分析. 通过一定次数的迭代分析, 可以寻求一个近似最优解.

最后取 $l = 900 \text{ mm}$, $f = 200 \text{ mm}$, 求得优化的拱肋矩形空心截面尺寸为高 22.2 mm, 宽 15.5 mm, 壁厚均为 2 层纸. 截面面积为 43.8 mm^2 . 大于拱脚按强度计算所需最小面积, 因而可设计为等截面直杆.

3 结构其他部分优化分析

3.1 横梁的截面选择与优化

吊杆横梁的设计根据横梁的受力确定。横梁受均布荷载,其最优的横梁尺寸是使之与相应的弯矩和剪力一致,但同样需要考虑侧倾失稳的问题,还应综合考虑吊点的局部构造。结合白卡纸的特点,参考一些比赛经验,认为横梁截面形状选用空心矩形比较好,因抗拉强度大于抗压,一般横梁底只需一层纸就好,而腹板、顶板厚度则同拱圈一样需要考虑局部稳定性要求。读者也可根据受力分析类似进行数学建模优化分析,或采用试算结合试验方法确定理想的横梁构造。

3.2 横撑的截面选择与设计

横撑的主要作用是加强拱肋的横向稳定性。根据比赛规则,除在两拱脚位各设两道横撑之外,跨内需要的横撑数根据稳定性要求来定,同时保证横撑下足够的空间布载。重量最小优化的横撑的构造形式及截面设计,目前还没有成熟的理论公式。初学设计者可以参考拱桥设计的相关书籍,选择横撑构造形式和截面形式。如果要做到精细分析,还需要通过试算比较,甚至试验来定。

4 小结

(1) 结构优化分析虽然复杂,但是通过培养数学优化理念,对结构抽丝剥茧的受力分析,教习本科生正确理解和掌握初等的结构优化方法与步骤是可行的。

(2) 数学规划分析得到的拱轴线优化结论,与拱桥设计

中的拱轴线与压力线重合的概念相吻合

(3) 拱肋截面形状选择与优化分析,有利于学生理解数学优化求解的过程与方法。计算表明,当设计荷载量偏小时,拱截面尺寸由稳定条件决定。

(4) 本文所做的优化分析,均建立在弹性材料基础上,且没有考虑拱肋弹性变形对结构受力的影响。制作模型时可将弹性压缩引起的节点变位反向预设于模型上。

参考文献

- 1 于洋,姜峰,司炳君等.关于结构设计竞赛中模型的设计与制作方法.科技资讯,2007,18:201-202
- 2 刘承斌,王步宇,孙凤钢等.结构设计大赛材料性能实验.实验室研究与探索,2007,26(10):178-179,182
- 3 程涛.结构模型竞赛与土木工程应用型人才的培养.实验技术与管理,2010,27(5):133-136,139
- 4 隋允康,李善坡.结构优化中的建模方法概述.力学进展,2008,38(2):190-200
- 5 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论与方法.北京:科学出版社,2007.1-2
- 6 顾安邦,范立础.桥梁工程(下).北京:人民交通出版社,2008.5:82-92
- 7 叶少有,尹国.基于线性规划的结构优化设计.合肥工业大学学报,2006,29(1):91-93
- 8 GB50017-2003.钢结构设计规范.中华人民共和国建设部,2003

(责任编辑:胡漫)

材料力学教材编写中几个问题的探讨¹⁾

侯作富²⁾ 梅超

(长江大学机械工程学院,湖北荆州 434023)

摘要 材料力学作为机械类、近机械类和土木工程类专业主要必修课程之一,将为一系列后续课程的学习打下重要基础。在总结了当前材料力学教材编写的基本情况后,重点对教材体系、应力集中和圣维南原理、应力状态、组合变形等教材内容编写中存在的问题及改进措施进行了探讨,为材料力学教材的编写或改版提供了一定的参考。

关键词 材料力学,教材体系,编写

中图分类号: O31 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2012)04-092-03

DOI: 10.6052/1000-0879-11-364

2011-10-06 收到第1稿,2011-12-27 收到修改稿。

1) 湖北省教学研究资助项目(2011235)。

2) 侯作富,男,教授,博士,主要从事基础力学教学和科研工作。E-mail: zhou@sohu.com

材料力学是变形体力学的重要基础分支之一,是一门为设计工程实际构件特别是杆件提供必要理论基础和计算方法的重要专业基础课。通过该课程的学习,可使学生对构件的强度、刚度和稳定性问题有比较明确的基本概念、必要的基础知识和比较熟练的计算能力,并具有一定的分析、解决问题的能力 and 初步的实验能力。它是机械类、近机械类和土木工程类专业主要必修课程之一,也是目前我国大多数高校招收该类专业或相近专业硕士研究生的入学考试课程之一。

在我国,材料力学教材经历了引用(主要为前苏联模式)、自建和发展的探索过程。随着科学技术的飞速发展,