

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + x = 0 \quad (8)$$

这个方程没有 Lagrange 表示. 但是, 它在 Lagrange 力学逆问题和 Birkhoff 力学的发展中有重要地位.

## 2.2 Hojman-Urrutia 方程的 Birkhoff 表示

Hojman-Urrutia 方程可表示为 Birkhoff 方程. 令

$$a^1 = x, \quad a^2 = y, \quad a^3 = \dot{x}, \quad a^4 = \dot{y}$$

文献 [2] 给出

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= a^2 + a^3, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = a^4, \quad R_4 = 0 \\ B &= \frac{1}{2}[(a^3)^2 + 2a^2a^3 - (a^4)^2] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

文献 [3] 给出

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= 0 \\ R_2 &= a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t + \\ &\quad (a^2 \sin t + a^4 \cos t) \cos t \\ R_3 &= a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t \\ R_4 &= -(a^2 \sin t + a^4 \cos t) \sin t \\ B &= (a^2 \sin t + a^4 \cos t)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

此外还可以有

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= a^2 + a^3, \quad R_2 = -a^1 \\ R_3 &= a^4 - a^1, \quad R_4 = -a^3 \\ B &= 2a^2a^3 + (a^3)^2 - (a^4)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

## 2.3 Hojman-Urrutia 方程的分数维表示

首先, Hojman-Urrutia 方程可当作一个分数维梯度系统, 其势函数为

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{1}{2}(x_3x_1^2 + x_4x_2^2 - x_4x_3^2 - x_2x_4^2) \quad (12)$$

其中

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = \dot{y}$$

其次, 在分数维力学中, 可 Lagrange 化为

$$L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - y^2 - x\dot{y} + ix_{(1/2)}y_{(1/2)} \quad (13)$$

## 3 结论

Whittaker 方程和 Hojman-Urrutia 方程是分析力学发展中的重要方程. 这两个方程有些相似, 它们都不能 Lagrange 化, 它们都可 Birkhoff 化, 它们都可当作分数维梯度系统, 都可在分数维力学中找到相应的 Lagrange 函数.

## 参 考 文 献

- 1 Riewe F. Mechanics with fractional derivatives. *Phys Rev E*, 1997, 55(3): 3581-3592
- 2 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag, 1983
- 3 梅凤翔, 史荣昌, 张永发等. Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1996
- 4 Tarasov VE. Fractional Dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2010
- 5 Hojman S, Urrutia LE. On the inverse problem of the calculus of variations. *J Math Phys*, 1981, 22(9): 1896-1903

(责任编辑: 刘俊丽)

# 关于茹科夫斯基凳

刘延柱<sup>1)</sup>

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

**摘要** 茹科夫斯基凳是理论力学课程演示动量矩守恒原理的实验装置. 本文讨论引起茹科夫斯基凳能量变化的外力和内力功, 说明茹科夫斯基凳也能成为动能定理的应用范例. 文中还在更广泛意义下讨论准刚体的质量几何变化与能量的关系.

**关键词** 茹科夫斯基凳, 准刚体, 动量矩守恒, 动能定理

**中图分类号**: O313 **文献标识码**: A

**文章编号**: 1000-0879(2012)03-063-03

本文于 2011-11-01 收到.

1) 刘延柱, 教授, 主要研究方向为动力学与控制. E-mail: liuyzhc@gmail.com

DOI: 10.6052/1000-0879-12-174

茹科夫斯基凳是理论力学课程演示动量矩守恒原理的一种实验装置. “茹科夫斯基凳”的名称来源于原苏联理论力学教材, 是一种可绕垂直轴自由旋转的转台. 站立在转台上的人改变手握哑铃的双臂位置, 使转台和人所组成系统的惯性矩发生变化<sup>[1]</sup>(图 1). 沿垂直方向的重力不构成绕转轴的力矩. 如阻尼力矩也忽略不计, 则绕转轴的外力矩为零, 系统的动量矩守恒. 因双臂位置在演示过程中发生变化, 系统不满

足刚体的定义,但对于每个固定姿势,可以利用刚体的动量矩公式<sup>[2]</sup>.当动量矩 $L$ 为常值时,惯性矩 $J$ 的变化必引起角速度 $\omega$ 的变化

$$\omega = \frac{L}{J} \quad (1)$$

图1表示握哑铃人的3种姿势:(a)双臂平举,(b)双臂收缩至胸前,(c)双臂下垂.当状态(a)转变为状态(b)或(c),即双臂平举变为双臂收缩或下垂时,惯性矩 $J$ 减小,转速 $\omega$ 升高.反之,如状态(b)或(c)转变为状态(a),即双臂收缩或下垂变为双臂平举时,惯性矩增大,转速降低.演示茹科夫斯基凳的上述现象,就能直观地解释动量矩守恒的力学概念.

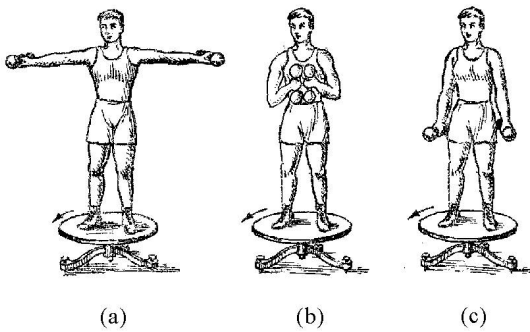


图1 茹科夫斯基凳(引自文献[1])

除了解释动量矩守恒原理之外,茹科夫斯基凳的能量变化也是一个值得讨论的问题.利用刚体的动能公式 $T = J\omega^2/2$ ,将式(1)中的角速度 $\omega$ 代入,化作

$$T = \frac{L^2}{2J} \quad (2)$$

可看出,在动量矩 $L$ 为常值的条件下,动能 $T$ 也随惯性矩 $J$ 的变化而改变.当惯性矩 $J$ 减小使角速度增大时动能也随之增大.反过来也是如此.根据动能定理,质点系动能的变化是外力和内力做功的结果.因此在握哑铃人改变姿态的过程中,必然有外力或内力的功存在.茹科夫斯基凳的外力是哑铃的重力,内力是手对哑铃的握力.后者不仅要克服重力,而且要克服转轴旋转引起的惯性力,包括离心力和科里奥利力.其中重力功 $W_g$ 的正负号很容易确定,向下运动时作正功,向上运动时作负功.内力功 $W_i$ 则必须根据握力和运动方向是一致还是相反来作出判断.外力和内力所作总功 $W = W_g + W_i$ 的正负号决定了能量是增大还是减小.

以下具体分析握哑铃人在凳上运动的两种情况:

情况1:减小惯性矩,角速度和动能均增大.

当状态(a)转变为状态(b),即双臂平举变为双臂收缩时,重力功 $W_g = 0$ .为克服离心力使哑铃产生向内运动的加速度,握力与运动的方向一致,内力功 $W_i > 0$ .满足总功 $W > 0$ .

当状态(a)转变为状态(c),即双臂平举变为双臂下垂时,重力功 $W_g > 0$ ,为使双臂产生下垂的加速度,握力必须

小于重力,所作的负功必小于重力的正功.双臂为克服离心力向内收缩所作的功是正功.仍满足总功 $W > 0$ .

情况2:增大惯性矩,角速度和动能均减小.

当状态(b)转变为状态(a),即双臂收缩变为双臂平举时,重力功 $W_g = 0$ ,为克服离心力的握力和运动方向相反,但产生向外运动加速度的握力和运动方向一致.后者应小于前者,使 $W_i < 0$ ,才能保证总功 $W < 0$ .

当状态(c)转变为状态(a),即双臂下垂转变为双臂平举时,重力功 $W_g < 0$ ,向上提升的握力必须超过重力,才能产生向上的加速度,其正功必大于重力的负功.但为克服离心力向外运动的握力作负功,仍可能满足总功 $W < 0$ .

通过以上具体分析,对于茹科夫斯基凳运动过程中的能量变化就有比较完整的认识.由此可见,茹科夫斯基凳不仅能演示动量矩守恒原理,也能成为能量定理的应用范例.可使学生在分析和讨论过程中巩固与动力学普遍原理有关的基本概念.从而加深理解质点系的动量或动量矩变化只能由外力或外力矩引起,内力不能改变动量或动量矩,但内力的功和外力的功同样影响系统的动能.

在工程技术和日常生活中,常有这种不能满足刚体严格定义但足够刚硬的物体.例如物体内部有微小的质量移动或微小的弹性变形.严格的分析必须用多刚体系统,或带弹性体的多体系统等更复杂的模型替代刚体的简化模型.但理论分析的难度也随之增加.于是出现了“准刚体”(quasi-rigid body 或 near-rigid body)的力学概念.是指不严格满足刚体定义,但可以利用刚体的动量、动量矩和动能公式描述的刚硬物体.其中表示刚体质量几何的参数,如惯性矩和惯性积允许在运动过程中改变而不是常值.以上对茹科夫斯基凳的分析就是在准刚体概念的基础上进行的.实际上理论力学课程在讲授碰撞问题时就已经触及准刚体概念,因为碰撞物体在接触点位置存在局部弹性变形而不符合刚体的严格定义.

在轨道内运行的带弹性天线的自旋卫星是典型的准刚体.在动量矩守恒状态下,天线的弹性变形引起能量耗散.根据式(2)判断,能量降低必导致动量矩增大.由于细长形刚体对横轴的惯性矩大于对细长轴的惯性矩.因此原来绕细长轴旋转的卫星将逐渐转变为绕横轴旋转.这正是1958年美国的绕细长轴旋转的第一颗人造卫星探险者一号(Explorer-1)因天线振动的内阻尼而翻转 $90^\circ$ 的失败原因(图2).

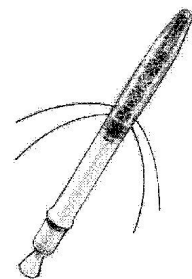


图2 探险者一号卫星

地球也是一个巨大的腾空状态准刚体. 因为地球虽然足够刚硬, 但海洋的潮汐运动、地壳的变动和岩浆的流动每时每刻都在改变地球的质量分布. 潮汐摩擦所做的内力功引起能量耗散使地球的自转速度趋于变慢. 每隔一个世纪自转周期大约增长 1~2ms. 按照以上分析, 由于动能减小是在动量矩守恒条件下发生的, 转速的减小必伴随惯性矩增大. 幸而略显扁平的地球极轴已经是最大惯性矩主轴了, 因此不会出

现如细长卫星那样的翻转现象. 这倒是值得地球居民为之庆幸的大好事.

## 参 考 文 献

- 1 Бутенин НВ, Лунц ЯЛ, Меркин ЛР. Курс Теоретической Механики. Москва, Наука, 1985
- 2 刘延柱, 朱本华, 杨海兴. 理论力学 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2009

(责任编辑: 刘俊丽)

# 力学虚拟实验系统及其在实验力学教学中的作用<sup>1)</sup>

马少鹏<sup>\*,2)</sup> 水小平<sup>\*</sup> 马沁巍<sup>\*</sup> 严冬<sup>\*</sup> 李江城<sup>†</sup> 刘战伟<sup>\*</sup> 谢惠民<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>(北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081)

<sup>†</sup>(清华大学航天航空学院工程力学系, 北京 100084)

**摘要** 力学实验教学中普遍存在的仪器和师资不足的问题严重影响了实验教学效果. 本文发展了一套基于虚拟现实技术的力学虚拟实验系统, 不仅能仿真实验结果, 而且能仿真实验仪器和实验操作过程. 系统可实现光弹性、电子散斑干涉、几何云纹、投影条纹、数字图像相关以及应变片实验共 6 个实验的仿真模拟. 力学虚拟实验系统可作为常规实验力学教学的重要补充, 在很大程度上缓解实验力学教学中存在的问题, 改进教学效果.

**关键词** 实验力学教学, 虚拟实验系统, 虚拟现实技术

中图分类号: O348 文献标识码: A

文章编号: 1000-0879(2012)03-065-03

DOI: 10.6052/1000-0879-11-208

实验力学教学是力学和机械类专业本科生及研究生培养中一个重要环节. 实验力学教学应以学生动手实验为主, 这是各种指导性大纲及绝大多数实验力学教师的共识, 但目前大部分学校在教学实践中还很难达到这一要求: 只讲课不做实验, 或仅做演示实验, 或十几个学生一组做实验的情况非常普遍, 这严重影响了实验力学的教学效果<sup>[1]</sup>. 导致上述问题的主要原因有两方面: 第一是实验仪器台套数上的不足, 第二是实验教学师资力量, 尤其是实验技术人员上的不足. 然而, 以上两方面的不足很难在短期内得到解决或缓解. 目前, 基于计算机仿真和虚拟现实技术, 很多领域都建立先进而实用的仿真系统, 如虚拟装配系统、虚拟训练系统等<sup>[2]</sup>, 如利用这项技术建立力学虚拟实验系统, 则有助于解决上述问题<sup>[3-4]</sup>.

实验力学教学人员以往也常用一些多媒体课件或更复

杂的软件仿真力学实验的结果, 但这些课件或动画只仿真结果, 实验操作者感受不到真实的仪器, 也不能进行自主操作, 因而与真实实验有很大区别, 对实验教学的促进作用有限. 本文发展一种基于虚拟现实技术及三维模型操控技术的新型力学虚拟实验系统, 系统除对各种实验方法实现结果仿真外, 最重要的是实现了仪器的真实再现和操控. 操作者除了用鼠标代替手进行实验操作外, 整个实验过程与真实实验没有区别. 因而, 此虚拟实验系统可作为实验教学的强有力的补充, 甚至在一定程度上替代真实实验. 力学虚拟实验系统包括光弹性、电子散斑干涉、几何云纹、投影条纹、数字图像相关及应变片实验共 6 个模块, 每个实验模块都能够对相应实验方法的仪器装置、实验操作、实验结果和数据处理实现全方位模拟. 力学虚拟实验系统的造价和运行成本低, 可在网络上开放, 因此可在很大程度上缓解由于仪器台套数和师资不足而导致的实验力学教学中存在的问题, 从而大大促进实验力学教学.

## 1 力学虚拟实验系统的实现

力学虚拟实验系统的特点体现在: 用三维显示技术真实再现实验仪器, 实现了实验场景的真实化; 用立体模型操控技术实现仪器的个性化操作, 解除对具体实验过程的步骤化限制, 实现了实验操作过程的真实化; 用高性能算法完成实验结果的真实再现与实时显示, 进一步加强了实验过程的真实化.

图 1 给出了虚拟实验系统中各实验模块的结构及其实现方法, 模块的实现可分为 5 部分: 实验界面、虚拟实验仪器及模型、虚拟实验操作、虚拟实验结果生成和实

2011-05-19 收到第 1 稿, 2011-10-25 收到修改稿.

1) 工程力学国家级教学团队 (北京理工大学, 2007) 经费资助.

2) E-mail: masp@bit.edu.cn