

图4 支杆的等效替换

图5(a)所示体系中的刚片 ABC 和刚片 EFG 分别与基础由两根支杆相连,用它们交点处的固定铰支座 O_1, O_2 代替,并将两刚片分别扩大到 O_1 和 O_2 ,如图5(b)所示.而刚片 O_1ABC 和刚片 O_2EFG 又可分别看成是链杆 O_1C 和 O_2E ,最后得到刚片 CDE 与基础用三根连杆相连.

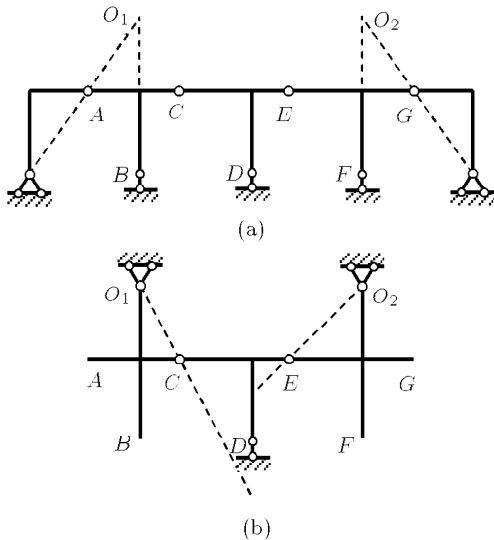


图5 支杆和刚片的等效替换

2.3 支杆的等效滑移

图6所示两体系都是只有 B 点有竖向位移.所以两者的瞬时微小运动是相同的.

结论4:与一杆件共线的支杆可由其一端滑移到另一端,其约束作用不变.

将图7(a)所示体系中 A, B 处的支杆分别滑移到 C, D 处得到图7(b)所示体系,就很容易按简单组成规则进行分析了.

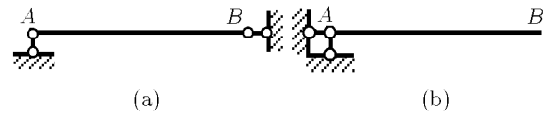


图6 支杆的等效滑移

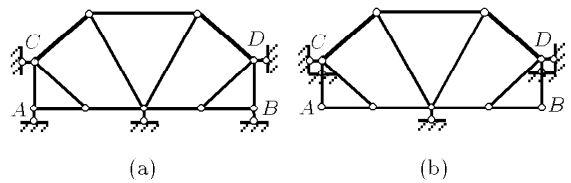


图7 支杆的等效滑移

3 结论

由于体系几何构造分析是分析体系是否能动,有几种运动方式.并不讨论体系具体作何种运动.因此可以对一些不能用简单的组成规则进行分析的体系,进行等效变换后,化成可以用简单的组成规则进行分析的体系.本文讨论的4种等效变换方法不仅是对几何构造分析方法的补充,而且对培养学生的思维能力、分析能力也有一定的帮助.

参考文献

- 1 于苏民. 铰结三角形代换法作平面杆系几何组成分析. 力学与实践, 2005, 27(2): 72-73
- 2 曾究桃, 樊友景. 结构力学. 郑州: 郑州大学出版社, 2008
- 3 龙驭球, 包世华. 结构力学教程. 北京: 高等教育出版社, 2000

(责任编辑: 刘俊丽)

拉氏变换求解梁的挠曲线方程

刘明超^{*,1)} 丁晓燕[†]

^{*}(山东大学土建与水利学院, 济南 250002)

[†](北京理工大学机电学院, 北京 100081)

摘要 运用拉普拉斯变换求解梁的挠曲线近似微分方程, 并利用坐标系平移变换导出了分段梁挠曲线方程的一般形式, 通过算例验证简述了用此方法可方便地根据弯矩方程和边界条件求出梁各段挠曲线方程的表达式.

关键词 挠曲线方程, 拉氏变换, 弯矩方程, 边界条件

中图分类号: O341 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2012)02-078-03

2011-05-24 收到第1稿, 2011-06-09 收到修改稿.

1) 刘明超, 1990年生, 四川广元人, 山东大学土建与水利学院工程力学专业2009级本科生. E-mail: lmc0626@126.com

在材料力学中，求解梁的挠曲线方程对于校核梁的强度、刚度等都是至关重要的。常用的方法是根据挠曲线近似微分方程对梁的弯矩方程进行积分^[1-2]，但该方法在实际运用中需要确定多个积分常数，尤其是对于分段梁，计算比较繁琐。考虑到挠曲线近似微分方程及弯矩方程的基本形式，本文将介绍一种通过对近似微分方程作拉氏变换和反变换，直接根据弯矩方程的系数及梁的支座约束条件和连续性条件确定挠曲线方程的新方法。该方法可以通过对坐标系作平移变换将分段梁中的多个积分常数全部转化为仅含有起点挠度 $w(0)$ 和起点转角 $w'(0)$ 两个量的表达式，很大程度上减小了运算量，可以更容易地求得挠曲线方程。

1 拉氏变换求解梁的挠曲线方程

1.1 弯矩方程起点坐标为坐标原点梁段的挠曲线方程

对于受常见载荷作用的梁，其弯矩方程的一般形式为

$$M(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (n \leq 3) \quad (1)$$

其中

- 外载为集中力偶 (如图 1), $n = 0$
- 外载为集中力 (如图 2), $n = 1$
- 外载为均布力系 (如图 3), $n = 2$
- 外载为非均布力系 (如图 4), $n = 3$

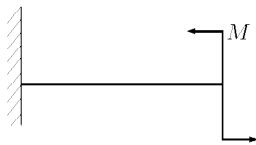


图 1 梁受集中力偶作用

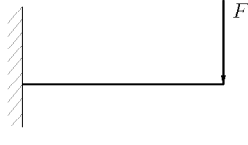


图 2 梁受集中力作用

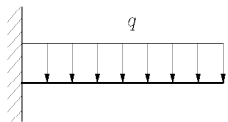


图 3 梁受均布力作用

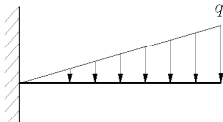


图 4 梁受非均布力作用

挠曲线近似微分方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(当 $n < 3$ 时分别取其中相应的项)

对上式作拉氏变换得

$$EI[s^2 W(s) - sw(0) - w'(0)] = a_3 \frac{3!}{s^4} + a_2 \frac{2!}{s^3} + a_1 \frac{1!}{s^2} + a_0 \frac{1}{s}$$

整理，得

$$EIW(s) = a_3 \frac{3!}{s^6} + a_2 \frac{2!}{s^5} + a_1 \frac{1!}{s^4} + a_0 \frac{1}{s^3} + EIw'(0) \frac{1}{s^2} - EIw(0) \frac{1}{s}$$

对上式作反拉氏变换得

$$EIW(x) = \frac{3!}{5!} a_3 x^5 + \frac{2!}{4!} a_2 x^4 + \frac{1!}{3!} a_1 x^3 + \frac{1}{2!} a_0 x^2 + EIw'(0)x + EIw(0)1(x) \quad (2)$$

由 $1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ 得， $x \geq 0$ 时 $w(0)1(x) \equiv w(0)$ 。

于是，利用式 (2) 便可根据梁的弯矩方程及相应的边界条件写出挠曲线方程。其中 a_0, a_1, a_2, a_3 为弯矩方程中对应的系数， $w(0)$ 为 $x = 0$ 点处的挠度， $w'(0)$ 为 $x = 0$ 处的转角，通常情况下二者为已知量，若为未知，则可通过其余边界条件求得。

对于梁因承受多种组合载荷而需要划分为若干段分别求解的情况，由于第二段及其以后各段的弯矩方程 $M(x)$ 中 x 满足 $0 < l_i \leq x \leq l_{i+1}$ ，故 $w(0)$ 和 $w'(0)$ 不存在，此时上述方程的一般形式就不再适用。这种情况下可以考虑通过对坐标系作平移变换来解决，下面进行分析。

1.2 弯矩方程起点坐标非坐标原点梁段的挠曲线方程

对于受多种组合载荷作用的分段梁，其第二段及其以后各段的弯矩方程应为 $M(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ($l_i \leq x \leq l_{i+1}$) (n 的取值同式 (1))。

由于 $l_i \leq x \leq l_{i+1}$ ，故考虑将 $M(x)$ 配方为 $M(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x - l_i)^j$ 的形式。现在来考虑 $n = 3$ 的情况 (当 $n < 3$ 时分别取其中相应的项)，有

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = a_3 (x - l_i)^3 + a_2 (x - l_i)^2 + a_1 (x - l_i) + a_0$$

令 $t = x - l_i$ ，则有

$$EI \frac{d^2 w}{dt^2} = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

对上式作拉氏与反拉氏变换，得

$$EIW(t) = \frac{3!}{5!} a_3 t^5 + \frac{2!}{4!} a_2 t^4 + \frac{1!}{3!} a_1 t^3 + \frac{1}{2!} a_0 t^2 + EIw'(0)t + EIw(0)1(t) \quad (3)$$

由于 $t = x - l_i$ ，故 $w(t)|_{t=0} = w(x)|_{x=l_i}$ ， $w'(0)|_{t=0} = w'(x)|_{x=l_i}$ ，式 (3) 便为弯矩方程起点不在坐标原点的梁的挠曲线方程的基本形式。考虑到 $l_i = 0$ 时式 (3) 即可化为式 (2)，故式 (3) 为分段梁挠曲线方程的一般形式。

2 算例

求图 5 所示悬臂梁在均布载荷 q 和集中力偶 M 作用下的挠曲线方程。

解：图 5 中各段梁的弯矩方程为

$$\begin{cases} M_1(x) = qlx + \left(M + \frac{3}{2}ql^2\right) & (0 \leq x \leq l) \\ M_2(x) = -\frac{q}{2}x^2 + 2qlx + (M - 2ql^2) & (l \leq x \leq 2l) \\ M_3(x) = M & (2l \leq x \leq 3l) \end{cases}$$

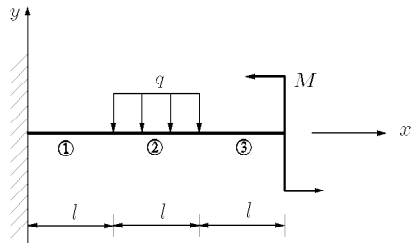


图5 悬臂梁计算简图

对于第①段梁, 弯矩方程起点在坐标原点, 利用式(3), 令 $l_1 = 0$, $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = ql$, $a_0 = M - \frac{3}{2}ql^2$, $w(0) = w'(0) = 0$, 得

$$EIw_1(x) = \frac{1}{6}qlx^3 + \frac{1}{2}\left(M - \frac{3}{2}ql^2\right)x^2 \quad (4)$$

也可以直接利用式(2)进行计算.

对于第②段梁, 弯矩方程起点在 $x = l$ 处, 弯矩方程配方得

$$M_2(x) = -\frac{q}{2}(x-l)^2 + ql(x-l) + \left(M - \frac{1}{2}ql^2\right)$$

利用式(3), 令 $l_2 = l$, 有 $a_3 = 0$, $a_2 = -\frac{q}{2}$, $a_1 = ql$, $a_0 = M - \frac{1}{2}ql^2$, 由式(4)得

$$EIw(l) = EIw_1(x)|_{x=l} = \frac{1}{2}Ml^2 - \frac{7}{12}ql^4$$

$$EIw'(l) = EIw'_1(x)|_{x=l} = Ml - ql^3$$

根据式(3)得

$$EIw_2(x) = -\frac{q}{24}(x-l)^4 + \frac{ql}{6}(x-l)^3 + \frac{1}{2}\left(M - \frac{1}{2}ql^2\right)(x-l)^2 + (Ml - ql^3)(x-l) + \left(\frac{1}{2}Ml^2 - \frac{7}{12}ql^4\right) \quad (5)$$

对于第③段梁, 弯矩方程起点在 $x = 2l$ 处, 弯矩方程配方得

$$M_3(x) = M$$

利用式(3), 令 $l_3 = 2l$, 有 $a_3 = a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = M$, 由式(5)得

$$EIw(2l) = EIw_2(x)|_{x=2l} = 2Ml^2 - \frac{41}{24}ql^4$$

$$EIw'(2l) = EIw'_2(x)|_{x=2l} = 2Ml - \frac{7}{6}ql^3$$

根据式(3)得

$$EIw_3(x) = \frac{M}{2}(x-2l)^2 + \left(2Ml - \frac{7}{6}ql^3\right)(x-2l) + \left(2Ml^2 - \frac{41}{24}ql^4\right) \quad (6)$$

3 结论

以上的理论分析及算例验证表明, 用本文方法及推导出的分段梁挠曲线方程的一般形式求解载荷复杂、分段较多的梁的挠曲线方程更加简便、实用.

参考文献

- 1 刘鸿文. 材料力学 I. 北京: 高等教育出版社, 2004
- 2 韩斌, 刘海燕等. 材料力学. 北京: 兵器工业出版社, 2009
- 3 谢惠明. 梁挠曲线的递推计算. 力学与实践, 2009, 31(6): 74-75
- 4 苑东生. 用待定系数法求梁变形. 力学与实践, 1992, 14(2): 46-49
- 5 刘再兴. 用待定系数法解梁的挠曲线方程. 集美大学学报(自然科学版), 1999, 4(2): 27-30
- 6 W.A. 纳什(美). 材料力学. 赵志岗译. 北京: 科学出版社, 2002

(责任编辑: 刘俊丽)

基于代数系统的力学辅助教学与个性化培养

张旭¹⁾ 邢静忠

(天津工业大学机械工程学院, 天津 300160)

摘要 分析工程力学的课程特点, 论述交互式动态辅助教学和学生个性化培养的必要性. 利用计算机代数系统实现习题的动态生成和计算, 使教师把教学重点投入到力学模型分析和结果评判上, 增强课堂内容的动态交互性. 学生根据自己的学习状况, 设置合适的难度系数和题型, 由系统生成习题并引导学生求解. 不同难度和类型的习题可满足层次学生的需求, 实现个性化培养.

关键词 计算机代数系统, 自主学习, 个性化培养, 工程力学, 内力图

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-0879(2012)02-080-03

工程力学是工科学生必修的专业技术基础课, 它不仅对学习后续专业知识起到桥梁作用, 而且对培养学生的逻辑思

2011-04-22 收到第1稿, 2011-08-03 收到修改稿.

1) 张旭, 1978年, 女, 讲师, 博士, 主要从事固体力学与优化算法研究. E-mail: xuzhang83674367@126.com