(c) $h=8\,\mathrm{m}$, $b=4\,\mathrm{m}$; (d) $h=8\,\mathrm{m}$, $b=6\,\mathrm{m}$. 表 3 和表 4 分别给出在 (c) 和 (d) 两种情况时，考察点处的 2 个主应力与最大剪应力 $(\sigma_{\max},\sigma_{\min},\tau_{\max})$ 的函数解与有限单元解的相对误差，其中考察点的横坐标均取 $x=b/2$, 纵坐标 $y=b\cot\alpha+y'$, 这里 y' 是以坝顶为原点的局部纵坐标.

从表 3 和表 4 可知，若以考察点处 $(\sigma_{\max},\sigma_{\min},\tau_{\max})$ 中任一相对误差不超过 5% 为准则，则矩形变截面坝体分别在 $9.5\,\mathrm{m}\le y'\le 71.5\,\mathrm{m}$ 和 $9.5\,\mathrm{m}\le y'\le 70.5\,\mathrm{m}$ 的范围内其函数解是正确的. 类似地，对 (a) 和 (b) 两种情况进行计算分析，可知分别在 $5.5\,\mathrm{m}\le y'\le 55\,\mathrm{m}$ 和 $6.5\,\mathrm{m}\le y'\le 64\,\mathrm{m}$ 的范围内其函数解是正确的. 可见，水面高度 h 对于坝顶和坝底的适用范围影响都较大. 在 $b,h\ll H$ 条件下，采用最大最小应力准则，当 h 越大时，对于坝顶的适用范围将减小，而对坝底的适用范围将增大.

表 3 坝体的函数解与有限单元解的相对误差 (%)

考察点的 y'/m	8	9	10	15	20	30	40	50	60	71	72	75	80
$\sigma_{\max}$ 分量	80.13	5.39	0.87	0.09	0.00	0.04	0.13	0.17	0.17	4.50	5.94	14.02	59.56
$\sigma_{\min}$ 分量	0.32	0.33	0.17	0.01	0.01	0.04	0.38	1.16	1.32	3.03	3.61	4.59	2.47
$\tau_{\max}$ 分量	1.08	0.10	0.25	0.00	0.01	0.04	0.58	2.37	4.13	1.93	4.43	24.28	67.57

表 4 坝体的函数解与有限单元解的相对误差 (%)

考察点的 y'/m	8	9	10	15	20	30	40	50	60	70	71	75	80
$\sigma_{\max}$ 分量	64.64	10.33	0.38	0.26	0.01	0.10	0.21	0.14	0.59	4.39	5.35	12.58	45.64
$\sigma_{\min}$ 分量	0.58	0.56	0.41	0.01	0.00	0.06	0.34	0.80	0.48	3.24	3.90	6.78	8.05
$\tau_{\max}$ 分量	1.05	0.08	0.41	0.07	0.00	0.04	0.42	1.40	1.83	1.17	1.25	4.21	36.56

3 结 语

在弹性力学课程教学中，以楔形体受重力和液体压力，以及楔形体在楔顶或楔面受力为基本教学内容，应用弹性力学的一般原理，对矩形变截面悬臂梁 (坝体) 等工程实例开展实践性教学研究. 通过这种实践性教学研究，不仅能够启迪学生的研究性思维和动手能力，而且有利于激发学生的钻研精神和创新意识，对提高教学质量有着很好的推动作用.

参 考 文 献

1 范钦珊，陈建平，蔡新等. 研究型大学需要研究型教学 —— 力学课程研究型教学的几点体会. 力学课程报告论坛 2008 论文集. 北京：高等教育出版社， 2009. 24-27

2 Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity (Third Edition). Beijing: Tsinghua University Press, 2004

3 徐芝纶. 弹性力学 (第四版). 北京：高等教育出版社， 2006. 45-47, 77-81

4 奚绍中，郑世瀛. 应用弹性力学. 北京：中国铁道出版社， 1985. 79-80

5 王俊奎，丁立祚. 弹性固体力学. 北京：中国铁道出版社， 1990. 137-138

6 刘章军. 弹性力学内容精要与典型题解. 北京：中国水利水电出版社， 2009. 77-85

(责任编辑：刘俊丽)

矩形中厚板的解耦方程

钟 阳 [1)] 高媛媛 李 锐

(大连理工大学，大连 116024)

摘要 从矩形中厚板弯曲问题的基本方程出发，利用数学的方法，把弹性厚板的基本方程组转化成为解耦的相互独立的偏微分方程. 进而可以简化这类问题的求解过程.

关键词 矩形中厚板，精确解，方程解耦

中图分类号： O343 **文献标识码：** A

文章编号： 1000-0879(2012)02-074-03

矩形中厚板是一种较常见的结构形式，并在工程中得以广泛的应用. 由于用位移表示的矩形中厚板的平衡方程是相互耦合的偏微分方程组，求其解析解是一个数学上的难题. 为了寻求简单的求解方法，胡海昌 [1] 通过引入两个函数将

2011–06–02 收到第 1 稿， 2011–07–13 收到修改稿.

1) 钟阳， 1955 年生，男，博士，教授，主要从事路面结构分析工作. E-mail: zhongyang58@163.net

厚板的平衡方程解耦. 但是，文献 [1] 并没有给出选取函数的方法，具有一定的任意性，缺乏理论依据. 针对这一问题，本文利用纯数学的方法，直接从中厚板弯曲问题的基本方程出发，将其相互耦合的基本方程组转化成为解耦的相互独立的偏微分方程. 为简化这类问题的求解过程奠定了理论基础. 文中还证明了文献 [1] 的解耦方程只是本文所推导出的方程的特例.

1　弹性矩形中厚板的解耦方程

矩形中厚板的静力平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0\\ &\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0\\ &\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

板的内力与位移的关系为

$$\left.\begin{aligned} &M_x=-D\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)\\ &M_y=-D\Big(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\Big)\\ &M_{xy}=-\frac{D(1-\nu)}{2}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$Q_x=C\Big(\frac{\partial W}{\partial x}-\psi_x\Big),\quad Q_y=C\Big(\frac{\partial W}{\partial y}-\psi_y\Big)\tag{3}$$

其中，M_x, M_y 分别为垂直于 x 轴、y 轴截面上的弯矩；M_{xy} 为扭矩；Q_x, Q_y 分别为垂直于 x 轴，y 轴截面上的横向剪力；W 为板的挠度；ψ_x, ψ_y 分别为直线段在 xz, yz 平面内的转角；q 为板单位面积上的横向荷载；$C=\frac{5}{6}Gh$ 为剪切刚度；$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为抗弯刚度；$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ 为材料的剪切模量 (这里 E, ν, h 分别为材料的弹性模量、泊松比、厚度).

由式 (1) 的第 2 式和 3 式. 可得

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=-D\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)\Big]\tag{4}$$

$$Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=-D\Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\Big)+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)\Big]\tag{5}$$

将式 (2) 的前两式相加，有

$$M_x+M_y=-D\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)=-D(1+\nu)\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)\tag{6}$$

令

$$-\frac{M_x+M_y}{D(1+\nu)}=\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}=M\tag{7}$$

由式 (4) 可知

$$Q_x=-D\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)\Big]=-D\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)-\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\Big)\Big]\tag{8}$$

令

$$\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}=\varPsi\tag{9}$$

由式 (8), (9) 可得

$$Q_x=-D\Big[\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\varPsi}{\partial y}\Big]\tag{10}$$

同理，由式 (5) 可得

$$Q_y=-D\Big[\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\varPsi}{\partial x}\Big]\tag{11}$$

将式 (10) 、(11) 代入式 (1) 的第 1 式，得

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=-D\Big[\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\Big]+q=-D\nabla^2 M+q=0\tag{12}$$

因此有

$$\nabla^2 M=\frac{q}{D}\tag{13}$$

由式 (3) 可得

$$C\Big(\frac{\partial W}{\partial x}-\psi_x\Big)=-D\Big[\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\varPsi}{\partial y}\Big]\tag{14}$$

$$C\Big(\frac{\partial W}{\partial y}-\psi_y\Big)=-D\Big[\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\varPsi}{\partial x}\Big]\tag{15}$$

式 (14) 对 x 求导，式 (15) 对 y 求导可分别得到

$$C\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\Big)=-D\Big[\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2\varPsi}{\partial x\partial y}\Big]\tag{16}$$

$$C\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)=-D\Big[\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2\varPsi}{\partial x\partial y}\Big]\tag{17}$$

式 (16) 、式 (17) 相加并利用式 (7) 可得

$$\nabla^2 W+\frac{D}{C}\nabla^2 M-M=0\tag{18}$$

式 (14) 对 y 求导，式 (15) 对 x 求导后将两式相减并利用式 (9) 可得

$$\nabla^2\varPsi=\frac{2C}{D(1-\nu)}\varPsi\tag{19}$$

式 (13), 式 (18) 和式 (19) 构成矩形中厚板的静力平衡方程式 (1) 的解耦方程. 为了清晰可见，其写在一起

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 M=\frac{q}{D}\\&\nabla^2\Psi=\frac{2C}{D(1-\nu)}\Psi\\&\nabla^2 W+\frac{D}{C}\nabla^2 M-M=0\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

这样，板的所有未知量都可由 M, W 和 Ψ 3 个函数表示. 对于转角，由式 (14) 和式 (15) 有

$$\left.\begin{aligned}\psi_x=\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{D}{C}\left[\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right]\\\psi_y=\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{D}{C}\left[\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

对于弯矩和扭矩，由式 (2) 和式 (20) 可得到

$$\left.\begin{aligned}&M_x=-D\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)=\\&\quad -D\bigg(M-(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\cdot\\&\quad \left[\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{D(1-\nu)}{2C}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{D}{C}\frac{\partial M}{\partial y}\right]\bigg)\\&M_y=-D\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right)=\\&\quad -D\bigg(M-(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\cdot\\&\quad \left[\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{D\big(1-\nu\big)}{2C}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{D}{C}\frac{\partial M}{\partial x}\right]\bigg)\\&M_{xy}=-\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)=\\&\quad -\frac{D(1-\nu)}{2}\bigg[2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\frac{2D}{C}\frac{\partial^2 M}{\partial x\partial y}+\\&\quad \frac{D(1-\nu)}{2C}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)\bigg]\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

由于, 方程 (20) 是解耦方程, 进而可以简化问题的求解难度和过程.

如令

$$F=W+\frac{D}{C}M\tag{23}$$

这样式 (18) 就可以表示成为

$$M=\nabla^2 F\tag{24}$$

由式 (23) 、式 (24) 有

$$W=F-\frac{D}{C}\nabla^2 F\tag{25}$$

再由式 (13) 、式 (24) 可得到

$$\nabla^4 F=\frac{q}{D}\tag{26}$$

因此，矩形中厚板弯曲问题又可以归结为求解以下两个解耦的相互独立的偏微分方程.

$$\nabla^4 F=\frac{q}{D},\quad \nabla^2\Psi=\frac{2C}{D(1-\nu)}\Psi\tag{27}$$

对于转角，由式 (14) 、式 (15) 有

$$\left.\begin{aligned}\psi_x=\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{D}{C}\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\\\psi_y=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{D}{C}\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

对于弯矩和扭矩，由式 (2), 式 (28) 可得

$$M_x=-D\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{D(1-\nu)^2}{2C}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right]\tag{29}$$

$$M_y=-D\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{D(1-\nu)^2}{2C}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right]\tag{30}$$

$$M_{xy}=-\frac{D(1-\nu)}{2}\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{D(1-\nu)}{2C}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)\right]\tag{31}$$

式 (27) 与胡海昌 [1] 得到的公式是一样的. 比较式 (20) 和式 (27) 可知，两个方程都是解耦方程. 后者要比前者的方程个数少，但是方程阶数增高了. 特别要指出的是，由以上的推导过程可知，方程 (27) 可以由方程 (20) 推导出，反之不能. 由此可知，文献 [1] 的解耦方程只是本文所推导出的方程的特例.

参 考 文 献

1 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京：科学出版社，1981

2 Cooke DW, Levinson M. Thick rectangular plates II, the generalized Levy solution. *Int J Mech Scc*, 1983, 25(3): 207-215

（责任编辑：刘俊丽）