

# 开口薄壁压杆考虑剪滞效应和几何非线性的 临界荷载<sup>1)</sup>

陈玉骥<sup>2)</sup> 罗旗帜

(佛山科学技术学院土木与建筑系, 广东佛山 528000)

**摘要** 针对上翼缘和下翼缘, 假设不同的剪力滞翘曲位移函数, 导出了薄壁压杆的能量泛函. 基于最小势能原理, 对开口薄壁压杆考虑剪力滞效应和几何非线性的稳定性进行了分析, 推导了压杆的特征方程, 并求出了简支压杆考虑剪力滞效应的临界荷载以及欧拉公式的修正系数, 讨论了翼缘宽度、厚度和压杆长度以及几何非线性对临界荷载修正系数的影响, 说明了欧拉临界荷载公式的适用条件.

**关键词** 薄壁压杆, 剪力滞, 几何非线性, 临界荷载, 修正系数

中图分类号: TU387.7 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2012)03-029-04

DOI: 10.6052/1000-0879-11-456

## THE CRITICAL LOAD OF THE OPEN THIN-WALLED COMPRESS BAR IN CONSIDERATION OF SHEAR LAG EFFECT AND GEOMETRY NONLINEARITY<sup>1)</sup>

CHEN Yuji<sup>2)</sup> LUO Qizhi

(Department of Civil Engineering and Architecture, Foshan Science and Technology University, Guangdong,  
Foshan 528000, China)

**Abstract** Different shear warp displacement functions are assumed for the top flanges and bottom flanges. The energy function for the open thin-walled compress bar is obtained. Based on the minimum potential energy principle, the characteristic equation of the compress bar is derived. The critical load and the correct coefficient for Euler formula of the simple-supported compress bar are calculated. The influence of the width, the thickness of the flange and the span of the compress bar as well as the geometry nonlinearity on the current coefficient of the critical load is discussed. The conditions for the applications of Euler critical load formula are discussed.

**Key words** thin-walled compress bar, shear lag, geometry nonlinearity, critical load, revise coefficient

压杆的临界荷载通常可按欧拉公式<sup>[1]</sup>计算. 欧拉临界荷载公式的推导, 涉及平面假定. 对于薄壁压杆, 如工字钢, 其翼缘存在剪滞效应<sup>[2]</sup>, 特别是宽翼工字钢, 其剪滞效应十分显著. 此时, 若用欧拉公式计算压杆的临界荷载, 将会导致较大的误差. 目前, 对于薄壁压杆考虑剪力滞的稳定分析还比较少, Vlasov<sup>[3]</sup>提出了薄壁杆件失稳分析的经典方法, 但该法不能反映薄壁杆件的剪力滞现象. Timoshenko 和 Gere<sup>[4]</sup>在不考虑翘曲的情况下, 研究了狭长矩形

截面拱在均布径向荷载和两端等弯矩作用时平面内和平面外的稳定问题. 吴秀水等<sup>[5-10]</sup>用数值法对薄壁压杆的稳定性进行了研究, 但大都未考虑剪力滞效应和非线性影响. 本文以工字截面简支压杆为例, 根据最小势能原理, 对开口薄壁压杆考虑剪力滞效应和几何非线性的稳定性进行分析.

为方便起见, 以下分析时, 引入如下假定:

- (1) 材料的变形在线弹性范围之内;
- (2) 杆件的横向刚度和抗扭刚度均比竖向刚度

2011-11-29 收到第 1 稿, 2012-02-23 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50978058), 广东省自然科学基金资助项目 (S2011010005037).

2) 陈玉骥, 1962 年生, 男, 教授, 博士, 主要从事土木工程结构分析和弹塑性理论及其应用研究. E-mail: chenyl1310@163.com

大;

- (3) 仅考虑竖向挠度的几何非线性;
- (4) 只考虑杆件的竖向 (腹板平面内) 失稳形式.

### 1 薄壁压杆的能量泛函

图 1 所示压杆截面, 坐标  $y$  和  $z$  轴分别为水平和竖向形心轴,  $x$  为轴向坐标. 设翼缘的剪滞翘曲位移函数为

$$\varpi_i(x, y) = \left(1 - \frac{(B_i - |y|)^3}{B_i^3}\right) \kappa_i(x) \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

式中,  $\varpi_i$  为上下翼缘的剪滞翘曲位移函数,  $\kappa_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) 分别为上下翼缘剪切转角的最大差值函数,  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) 分别为上下翼缘宽度的一半.

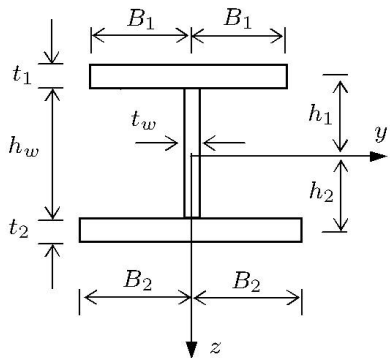


图 1 工字梁截面

根据考虑竖向挠度非线性的几何方程以及式 (1), 可得压杆的应变为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= z_i [w''(x) + \varpi_{i,x}(x, y)] + 0.5 (w'(x))^2 \\ \gamma_i &= z_i \varpi_{i,y}(x, y) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中,  $w$  为压杆的挠度;  $\varepsilon_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 和  $z_i$  分别为上下翼缘和腹板的正应变、剪应变和竖向坐标; 对于腹板, 取  $\varpi_{3,y} = \varpi_{3,x} = 0$ .

由应变可得压杆的能量泛函为

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI_w (w'')^2 + \frac{1}{4} EA_w (w')^4 + \right. \\ &ES_w (w')^2 w'' \left. \right] dx + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI_{f_i} (w'')^2 + \right. \right. \\ &\frac{1}{4} EA_{f_i} (w')^4 + \frac{3}{2} EI_{f_i} w'' \kappa'_i + \\ &ES_{f_i} (w')^2 \left( w'' + \frac{3}{4} \kappa'_i \right) + \frac{9}{14} EI_{f_i} (\kappa'_i)^2 \left. \right] dx + \\ &\left. \frac{G}{2} \int_0^l \frac{9}{5} \frac{I_{f_i}}{B_i^2} \kappa_i^2 dx \right\} - \frac{1}{2} \int_0^l P (w')^2 dx \quad (3) \end{aligned}$$

式中,  $l$  为压杆的跨度,  $I_w$  和  $I_{f_1}$  以及  $I_{f_2}$  分别为腹板和上下翼缘对截面形心轴的惯性矩,  $S_w$  和  $S_{f_1}$  以及  $S_{f_2}$  分别为腹板和上下翼缘对截面形心轴的静矩,  $A_w$  和  $A_{f_1}$  以及  $A_{f_2}$  分别为腹板和上下翼缘的截面积,  $P$  为杆端所受到的压力,  $E$  和  $G$  分别为材料的弹性模量和切变模量.

### 2 薄壁筒支压杆的临界荷载修正系数

对于筒支压杆, 可设

$$w = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \kappa_1 = b \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \kappa_2 = c \cos \frac{\pi x}{l} \quad (4)$$

式中,  $a, b, c$  是任意参数.

将式 (4) 代入式 (3), 根据最小势能原理  $\delta \Pi = 0$ , 并考虑到  $S_w + S_{f_1} + S_{f_2} = 0$ , 可得

$$\left. \begin{aligned} &\left[ EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 - P + \frac{3}{2} EA \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 \right] la + \\ &\frac{3}{4} EI_{f_1} \left( \frac{\pi}{l} \right) lb + \frac{3}{4} EI_{f_2} \left( \frac{\pi}{l} \right) lc + \\ &\underline{ES_{f_1} ab} + \underline{ES_{f_2} ac} = 0 \\ &\frac{3}{4} EI_{f_1} \left( \frac{\pi}{l} \right)^3 la + \left[ \frac{9}{14} EI_{f_1} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \frac{9}{5} G \frac{I_{f_1}}{B_1^2} \right] lb + \\ &\frac{1}{2} \underline{ES_{f_1}} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 = 0 \\ &\frac{3}{4} EI_{f_2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^3 la + \left[ \frac{9}{14} EI_{f_2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \frac{9}{5} G \frac{I_{f_2}}{B_2^2} \right] lc + \\ &\frac{1}{2} \underline{ES_{f_2}} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中,  $I = I_w + I_{f_1} + I_{f_2}$  为压杆整个截面对形心轴的惯性矩;  $A = A_w + A_{f_1} + A_{f_2}$  为压杆截面的截面积; 带下划线的为非线性项. 设压杆的临界荷载为  $P_{cr} = \eta P_E$ , 其中  $P_E = EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^2$  为欧拉临界荷载,  $\eta$  为剪力滞效应对欧拉公式的修正系数. 由式 (5) 消去参数  $b$  和  $c$  可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[ 3A - \frac{1}{9\pi^2} \left( \frac{S_{f_1}^2}{I_{f_1} K'_1} + \frac{S_{f_2}^2}{I_{f_2} K'_2} \right) \right] a^3 - \\ &\frac{1}{8\pi} \left( \frac{S_{f_1}}{K'_1} + \frac{S_{f_2}}{K'_2} \right) a^2 + \\ &\left[ I(1 - \eta) - \frac{I_{f_1}}{16K'_1} - \frac{I_{f_2}}{16K'_2} \right] a = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

式中,  $K'_1 = \frac{1}{14} + \frac{1}{5\pi^2} \frac{G}{E} \left( \frac{l}{B_1} \right)^2$ ,  $K'_2 = \frac{1}{14} + \frac{1}{5\pi^2} \frac{G}{E} \left( \frac{l}{B_2} \right)^2$ .

在失稳的临界状态, 参数  $a$  有非零实解, 此时必须有

$$\left[ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{S_{f1}}{K'_1} + \frac{S_{f2}}{K'_2} \right) \right]^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \left[ 3A - \frac{1}{9\pi^2} \left( \frac{S_{f1}^2}{I_{f1}K'_1} + \frac{S_{f2}^2}{I_{f2}K'_2} \right) \right] \cdot \left[ I(1-\eta) - \frac{I_{f1}}{16K'_1} - \frac{I_{f2}}{16K'_2} \right] \geq 0 \quad (7)$$

由此可得修正系数的最小值

$$\eta = 1 - \left\{ \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{S_1}{K'_1} \right)^2 + \left( \frac{S_2}{K'_2} \right)^2 \right] + \frac{1}{4K'_1K'_2} \left( 9\varsigma_1\varsigma_2 - 4\varsigma_1^2 \frac{I_{f2}}{I_{f1}} - 4\varsigma_2^2 \frac{I_{f1}}{I_{f2}} \right) + 27\pi^2 \bar{\psi} \left( \frac{\beta_1}{K'_1} + \frac{\beta_2}{K'_2} \right) \right\} / \left[ 16 \left( 27\pi^2 \bar{\psi} - \frac{\varsigma_1^2}{\beta_1 K'_1} - \frac{\varsigma_2^2}{\beta_2 K'_2} \right) \right] \quad (8)$$

式中,  $\beta_1 = \frac{I_{f1}}{I}$ ,  $\beta_2 = \frac{I_{f2}}{I}$ ,  $\varsigma_1 = \frac{S_{f1}}{|S_{f1}| + |S_{f2}|}$ ,  $\varsigma_2 = \frac{S_{f2}}{|S_{f1}| + |S_{f2}|}$ ,  $\bar{\psi} = \frac{AI}{(|S_{f1}| + |S_{f2}|)^2}$ .

若不考虑几何非线性影响, 则将式 (5) 中带下划线项 (非线性项) 去掉, 由相应齐次方程组的系数行列式应为零的条件, 可得不考虑几何非线性影响的剪力滞效应对欧拉公式的修正系数

$$\eta = 1 - \frac{\beta_1 K'_2 + \beta_2 K'_1}{16K'_1 K'_2} \quad (9)$$

### 3 计算分析

一跨度为  $l=2\text{m}$  的简支 H 型钢, 基本参数为:  $t_1 = t_2 = 25\text{ mm}$ ,  $t_w = 15\text{ mm}$ ,  $B_1 = B_2 = 200\text{ mm}$ ,  $h_w = 360\text{ mm}$ ,  $E = 210\text{ GPa}$ ,  $G = 80\text{ GPa}$ . 为考查翼缘厚度、半宽以及跨度对修正系数  $\eta$  的影响, 以下分 5 种情况, 每种情况又分 5 种不同几何参数进行计算. 第 1, 取不同的翼缘厚度  $t_1 = t_2 = 15\text{ mm}$ ,  $20\text{ mm}$ ,  $25\text{ mm}$ ,  $30\text{ mm}$ ,  $35\text{ mm}$ , 其他参数与基本参数相同; 第 2, 上下翼缘宽度相等, 取不同的翼缘半宽  $B_1 = B_2 = 100\text{ mm}$ ,  $150\text{ mm}$ ,  $200\text{ mm}$ ,  $250\text{ mm}$ ,  $300\text{ mm}$ , 其他参数与基本参数相同; 第 3, 上下翼缘宽度不等, 取不同的翼缘半宽  $B_1 = 90\text{ mm}$  和  $B_2 = 110\text{ mm}$ ,  $B_1 = 140\text{ mm}$  和  $B_2 = 160\text{ mm}$ ,  $B_1 = 180\text{ mm}$  和  $B_2 = 220\text{ mm}$ ,  $B_1 = 230\text{ mm}$  和

$B_2 = 270\text{ mm}$ ,  $B_1 = 270\text{ mm}$  和  $B_2 = 330\text{ mm}$ , 其他参数与基本参数相同. 这种情况中,  $B_2 = 1.2B_1$ , 且 5 种翼缘总面积分别与第 3 情况对应的相同; 第 4, 上下翼缘宽度不等, 并取不同的上下翼缘半宽比值  $B_1/B_2 = 200\text{ mm}/200\text{ mm}$ ,  $180\text{ mm}/220\text{ mm}$ ,  $160\text{ mm}/240\text{ mm}$ ,  $140\text{ mm}/260\text{ mm}$ ,  $120\text{ mm}/280\text{ mm}$ . 这种情况中, 5 组上下翼缘的总面积相同; 第 5, 取不同的跨度  $l = 2\text{ m}$ ,  $3\text{ m}$ ,  $4\text{ m}$ ,  $6\text{ m}$ ,  $8\text{ m}$ , 其他参数与基本参数相同. 以上 5 种情况的计算结果 (修正系数) 见表 1~5.

表 1 不同翼缘厚度时的修正系数 (上下翼缘等宽不等厚)

$t_1 = t_2/\text{mm}$	15	20	25	30	35
线性解	0.943 0	0.939 6	0.937 2	0.935 6	0.934 4
$\eta$ 非线性解	0.942 8	0.939 3	0.936 8	0.934 9	0.933 6

表 2 不同翼缘半宽时的修正系数 (上下翼缘等宽)

$B_1 = B_2/\text{mm}$	100	150	200	250	300
线性解	0.985 5	0.965 1	0.937 2	0.885 4	0.803 8
$\eta$ 非线性解	0.985 2	0.964 8	0.936 8	0.884 0	0.800 1

表 3 不同翼缘半宽时的修正系数 (上下翼缘不等宽)

$B_1/B_2$	90/110	140/160	180/220	230/270	270/330
线性解	0.985 4	0.965 1	0.937 4	0.887 0	0.814 5
$\eta$ 非线性解	0.985 3	0.964 7	0.936 8	0.885 8	0.810 2

表 4 不同上下翼缘半宽比值时的修正系数 (上下翼缘截面积总和不变)

$B_1/B_2$	200/200	180/220	160/240	140/260	120/280
线性解	0.937 2	0.937 4	0.937 9	0.938 6	0.939 6
$\eta$ 非线性解	0.936 8	0.936 9	0.937 3	0.937 9	0.938 8

表 5 不同跨度时的修正系数

$l/\text{m}$	1.5	2	2.5	3	4
线性解	0.845 3	0.937 2	0.958 6	0.970 7	0.983 2
$\eta$ 非线性解	0.843 2	0.936 8	0.958 4	0.970 6	0.983 1

由以上结果表可见:

(1) 当考虑翼缘的剪力滞效应时, 修正系数均小于 1, 相应的临界荷载均较欧拉公式的结果有所减少. 可见, 欧拉临界荷载公式高估了薄壁压杆的临界荷载;

(2) 考虑非线性的结果与不考虑非线性的 (线性解) 相比, 前者略小, 但相差甚微, 故几何非线性对考虑剪滞时的临界荷载修正系数影响很小;

(3) 在翼缘宽度不变的前提下, 改变翼缘厚度, 对临界荷载修正系数的影响很小, 可以忽略不计;

(下转第 35 页)

到结构的可靠度比 MC 法的结果略大 (约大 1%), 略偏危险, 虽然针对不同结构与参数分布, 可能得到偏保守的结果, 这也说明利用响应面法计算的可靠度只可作为结构安全的初步评估, 最终的评估还需要结合其他方法使用。

总的来说, 两种方法计算得到的结构可靠度和参数概率灵敏度系数结果比较接近, 说明基于响应面法计算结构的可靠性及参数的概率灵敏度系数是可行的。

## 5 结 论

本文探讨了响应面方法在结构可靠性及参数灵敏度分析中的应用和可行性。将响应面函数中参数的梯度信息与参数的分散程度结合, 得到各参数的灵敏度系数, 再归一化灵敏度系数得到概率灵敏度; 将响应面模型与一次二阶矩法相结合计算结构的可靠度。通过与 ANSYS 提供的 MC 法进行程序验证, 结果表明基于响应面法的灵敏度及可靠度分析与 MC 分析结果的差别比较小, 表明本文所提的方法是可行的。由于该方法计算速度快, 计算量小, 精度较高, 故在复杂结构的可靠性与参数灵敏度分析具有一定的应用前景。

## 参 考 文 献

- 1 王善, 何健. 导弹结构可靠性. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2002. 1-10
- 2 Ladeveze P, Puel G, Deraemaeker A, et al. Validation of structural dynamics model with uncertainties. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, 191: 1639-1675
- 3 Moens D, Vandepitte D. A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2005, 194: 1527-1555
- 4 Wen YK. Reliability and performance-based design. *Struct Safety*, 2001, 23: 407-428
- 5 Yang ZJ, Su XT. Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46: 3222-3234
- 6 王东, 陈建康, 王启智等. Monte-Carlo 随机有限元结构可靠度分析新方法. 四川大学学报, 2008, 40(3): 20-26 (Wang Dong, Chen Jiankang, Wang Qizhi, et al. The new method of structural reliability analysis by Monte-Carlo stochastic finite element. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2008, 40(3): 20-26 (in Chinese))
- 7 李强, 郭云健, 李鹏辉等. 一种基于响应面法的火炮身管设计参数灵敏度分析计算方法. 火炮发射与控制学报, 2010, 3(1): 56-59 (Li Qiang, Guo Yunjian, Li Penghui, et al. A sensitivity analysis calculation method of gun barrel design parameter based on response surface method. *Journal of Gun Launch & Control*, 2010, 3(1): 56-59(in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

(上接第 31 页)

(4) 随着翼缘宽度的增加, 或者压杆跨度的减小, 即随着跨宽比 (若上下翼缘等宽, 跨宽比为  $l/(2B_1)$  或  $l/(2B_2)$ ; 若上下翼缘不等宽, 跨宽比为  $l/(B_1 + B_2)$ ) 的减小, 修正系数逐渐减小. 当跨宽比小于 4 时, 采用欧拉公式计算临界荷载, 将产生较大的误差. 故欧拉公式仅适用于大跨宽比的压杆。

(5) 若上下翼缘总面积不变, 改变上下翼缘宽度的比值, 临界荷载修正系数的变化很小, 这说明, 不管上下翼缘是否等宽, 只要总面积相同, 则临界荷载几乎相同。

## 参 考 文 献

- 1 龙驭球, 包世华. 结构力学 (II). 北京: 高等教育出版社, 2006
- 2 程翔云. 梁桥理论与计算. 北京: 人民交通出版社, 1990
- 3 Vlasov VZ. Thin-Walled Elastic Beams. Washington DC: National Science Foundation, 1961
- 4 Timoshenko SP, Gere JM. Theory of Elastic Stability. New York: McGraw-Hill, 1961
- 5 吴秀水, 辛克贵, 姜美兰. 横向荷载作用下薄壁杆件稳定分析的有限杆元法. 工程力学, 2001, 18(1): 47-55 (Wu Xiushui, Xin Kegui, Jiang Meilan. Ateral buckling analysis of thin-

walled members by finite member element method. *Engineering Mechanics*, 2001, 18(1): 47-55 (in Chinese))

- 6 王银辉, 吴剑敏, 刘东. 变截面空心薄壁墩的稳定计算. 公路, 2004, (1): 74-77 (Wang Yinghui, Wu Jianming, Liu Dong. Stability calculation of non-prismatic thin-walled box piers. *Highway*, 2004, (1): 74-77 (in Chinese))
- 7 魏德敏, 陈宇清. 薄壁曲梁的稳定极限承载力. 力学与实践, 2006, 28(1): 19-22 (Wei Demin, Chen Yuqing. Ultimate bearing capacity of thin-walled curved beams. *Mechanics in Engineering*, 2006, 28(1): 19-22 (in Chinese))
- 8 张永健. 考虑剪力滞效应的薄壁结构特性分析. [博士论文]. 西安: 长安大学, 2007
- 9 郑昌坝, 张洪海, 林志祥. 工字型截面悬臂钢梁的稳定性研究. 力学与实践, 2007, 29(6): 56-59 (Zheng Changba, Zhang Honghai, Lin Zhixiang. On stability of I-section steel beam cantilevers. *Mechanics in Engineering*, 2007, 29(6): 56-59 (in Chinese))
- 10 胡启平, 董宝锋, 吕铭. 基于哈密顿理论的薄壁杆件稳定性分析. 四川建筑科学研究, 2011, 37(4): 26-29 (Hu Qiping, Dong Baofeng, Lü Ming. Analysis for stability of thin-walled bar using Hamiltonian theory. *Sichuan Building Science*, 2011, 37(4): 26-29 (in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)