关于梯度系统
—— 分析力学札记之十八

梅凤翔
(北京理工大学力学系，北京 100081)

摘要 给出定常的二阶 Lagrange 系统和一阶 Lagrange 系统成为梯度系统的条件. 如果梯度系统的势函数可以成为 Lyapunov 函数，那么就可进一步研究力学系统的稳定性.

关键词 Lagrange 系统，梯度系统， Lyapunov 函数，稳定性

中图分类号： O316　**文献标识码：** A
文章编号： 1000-0879(2012)01-089-02

专著 [1] 第 9 章“大范围的非线性技巧”中研究了两类重要系统，一个是梯度系统，另一个是 Hamilton 系统. 梯度系统是微分方程和动力系统中的重要问题，特别适合用 Lyapunov 函数来研究. 如果一个力学系统能够成为梯度系统，那么便可用来研究系统的稳定性. 本文讨论定常的二阶 Lagrange 系统和一阶 Lagrange 系统成为梯度系统的条件，并进一步讨论系统的稳定性.

1 梯度系统

梯度系统的微分方程有形式

$$\dot{x}_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\,,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{I}$$

其中 $V=V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为势函数. 方程 (I) 可以表为矢量形式

$$\dot{\boldsymbol{X}}=-\mathrm{grad}V(\boldsymbol{X}) \tag{II}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&\mathrm{grad}\,V=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\end{aligned}$$

梯度系统有如下重要性质 [1]:

(1) 函数 V 是系统 (II) 的一个 Lyapunov 函数，并且 $\dot{V}=0$, 当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 是一个平衡点;

(2) 设 Z 是一个梯度流的解的 α 极限点或 ω 极限点，则 Z 为平衡点;

(3) 对于梯度系统 (II), 任一平衡点处的线性化系统都只有实特征值.

以上性质，特别是第一和第三条性质，可用来研究力学系统的平衡点及其稳定性.

2 力学系统的梯度表示

2.1 二阶 Lagrange 系统

二阶 Lagrange 系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s\,,\quad s=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

假设系统 Lagrange 函数 L 和非势广义力 Q_s 都不含时间 t, 即有 $L=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, $Q_s=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 下面讨论方程 (1) 成为梯度系统的条件. 为此，引进广义动量 p_s 和 Hamilton 函数 H

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\,,\quad H=p_s\dot{q}_s-L \tag{2}$$

则方程 (1) 表为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}\,,\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\tilde{Q}_s\,,\quad s=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

其中

$$\tilde{Q}_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})) \tag{4}$$

进而，方程 (3) 可表为如下形式

$$\dot{a}^\mu=\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+\varLambda_\mu\,,\quad \mu,\nu=1,2,\cdots,2n \tag{5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&a^s=q_s\,,\quad a^{n+s}=p_s\\&(\varOmega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}_{n\times n}\\-\boldsymbol{1}_{n\times n}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\&\varLambda_s=0\,,\quad \varLambda_{n+s}=\tilde{Q}(\boldsymbol{a})\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

对方程 (5), 如果满足条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left(\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+\varLambda_\mu\right)-\\&\qquad\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\varOmega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+\varLambda_\rho\right)=0\\&\qquad(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

则它是一个梯度系统. 此时，可求得势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$ 使得

$$\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+\varLambda_\mu=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu} \tag{8}$$

本文于 2011–11–11 收到.
1) 梅凤翔，教授，博士生导师. 从事一般力学和应用数学的教学和科研工作.　E-mail: meifx@bit.edu.cn

2.2 一阶 Lagrange 系统

一阶 Lagrange 系统的 Lagrange 函数为 [2]

$$L = A_s(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_s - B(t,\boldsymbol{q}), \quad s = 1,2,\cdots,k \tag{9}$$

假设 A_s 和 B 不含时间 t, 即设

$$L = A_s(\boldsymbol{q})\dot{q}_s - B(\boldsymbol{q}) \tag{10}$$

并设 $k = 2n$, 则微分方程可表为

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} = 0 \\ &\mu,\nu = 1,2,\cdots,2n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

设

$$\det(\Omega_{\mu\nu}) = \det\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial a^\nu}\right) \neq 0$$

则可由方程 (11) 解出所有 $\dot{a}^\mu$

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}, \quad \mu,\nu = 1,2,\cdots,2n \tag{12}$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \tag{13}$$

对于方程 (12), 如果满足条件

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left(\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\Omega^{\rho\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right) = 0 \\ &\mu,\nu,\rho = 1,2,\cdots,2n \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

则它是一个梯度系统. 此时, 可求得势函数 $V = V(\boldsymbol{a})$ 使得

$$\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu} = -\frac{\partial V}{\partial a^\mu}, \quad \mu,\nu = 1,2,\cdots,2n \tag{15}$$

3 力学系统的稳定性

对于二阶 Lagrange 系统和一阶 Lagrange 系统, 如果能够成为梯度系统, 并使势函数 V 成为 Lyapunov 函数, 那么就可利用 Lyapunov 定理来研究这些系统的稳定性, 由 Rumyatsev 定理研究部分变量稳定性. 同时, 也可用梯度系统的第三条性质来研究稳定性.

例 1 二阶 Lagrange 系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \tag{16}$$

方程 (5) 给出

$$\dot{a}^1 = a^3,\ \dot{a}^2 = a^4,\ \dot{a}^3 = a^1,\ \dot{a}^4 = a^2 \tag{17}$$

容易判断条件 (7) 满足, 因此, 它是一个梯度系统. 由梯度系统的第三条性质知, 零解 $a^1 = a^2 = a^3 = a^4 = 0$ 是不稳定的.

例 2 一阶 Lagrange 系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 q_2 - q_1\dot{q}_2) + q_1 q_2 \tag{18}$$

对比式 (9) 有

$$A_1 = \frac{1}{2}q_2, \quad A_2 = -\frac{1}{2}q_1, \quad B = q_1 q_2$$

方程 (12) 给出

$$\dot{a}^1 = a^1, \quad \dot{a}^2 = -a^2 \tag{19}$$

容易看出条件 (14) 满足, 因此, 它是一个梯度系统. 由式 (15) 可求得势函数

$$V = -\frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 \tag{20}$$

按方程 (19) 求得

$$\dot{V} = -(a^1)^2 - (a^2)^2$$

由 Rumyatser 定理知, 系统的零解 $a^1 = a^2 = 0$ 相对变量 a^2 是稳定的, 相对变量 a^1 是不稳定的.

4 结 论

二阶 Lagrange 系统和一阶 Lagrange 系统在一定条件下可成为梯度系统. 这样, 就可利用梯度系统第三条性质来研究力学系统的稳定性. 如果梯度系统的势函数能成为 Lyapunov 函数, 那么便可利用 Lyapunov 定理或 Rumyatser 定理来研究力学系统的稳定性.

参 考 文 献

1 Hirsch MW, Smale S, Devaney RL. 微分方程、动力系统与混沌导论. 甘少波译. 北京: 人民邮电出版社, 2008
2 梅凤翔. 关于一阶 Lagrange 系统 —— 分析力学札记之十七. 力学与实践, 2011, 33(1): 78-80

(责任编辑: 刘俊丽)

(上接第 121 页)

市场上有许多玩具合理地运用了力学概念和原理. 将这些玩具用作理论力学课程的教具很有意义. 可以生动形象地使学生接受力学的基本概念, 增加学习兴趣和提高学习效率.

致谢 感谢上海交通大学刘延柱教授对本文的修改.

参 考 文 献

1 庄表中, 王惠明. 理论力学工程应用新实例. (盘配书). 北京: 高等教育出版社, 高等教育电子音像出版社, 2009
2 庄表中, 李欣业, 徐铭陶. 工程动力学: 振动与控制 (DVD). 北京: 机械工业出版社, 2010